Valintakoe A 2026, matematiikan syventävän osan Mafy-ratkaisut

Tehtävä C1.1

Merkitään talletuksen suuruutta kirjaimella x.

Koska korkokanta on $5\,\%$, niin tilillä on vuoden kuluttua talletuksesta koron maksun jälkeen pääoma $1{,}05x$. Kun ensimmäinen 500 euron stipendi on maksettu, tilillä on pääoma $1{,}05x - 500$.

Kahden vuoden kuluttua talletuksesta tilillä on koron maksun jälkeen pääoma $1{,}05(1{,}05x - 500)$. Kun toinen 500 euron stipendi on maksettu, tilillä on pääoma

$$1{,}05(1{,}05x - 500) - 500 = 1{,}05^2x - 525 - 500 = 1{,}1025x - 1025$$

Kolmen vuoden kuluttua talletuksesta tilillä on koron maksun jälkeen pääoma $1{,}05(1{,}1025x - 1025)$. Kun kolmas 500 euron stipendi on maksettu, tilillä on pääoma

$$\begin{aligned} 1{,}05(1{,}1025x - 1025) - 500 &= 1{,}157625x - 1076{,}25 - 500 \\ &= 1{,}157625x - 1576{,}25 \end{aligned}$$

Etsitään alaraja talletuksen suuruudelle merkitsemällä tämä pääoma nollaksi.

$$\begin{aligned} 1{,}157625x - 1576{,}25 &= 0 \\ 1{,}157625x &= 1576{,}25 \qquad \| : 1{,}157625 \\ x &= 1361{,}624\ldots \end{aligned}$$

Jotta stipendin maksaminen olisi mahdollista, pääoman pitää olla lopuksi vähintään nolla. Tarkistetaan, riittääkö $1361{,}62\,€$ talletus vai pitääkö tallettaa $1361{,}63\,€$.

$$1361{,}62\,€ \cdot 1{,}05 - 500\,€ = 929{,}701\,€ \approx 929{,}70\,€$$
$$929{,}70\,€ \cdot 1{,}05 - 500 = 476{,}185\,€ \approx 476{,}19\,€$$
$$476{,}19\,€ \cdot 1{,}05 - 500 = -0{,}0005\,€ \approx 0{,}00\,€$$

Siis $1361{,}62\,€$ talletus riittää, olettaen että pankki pyöristää pääoman $476{,}185\,€$ ylöspäin. Tämä pääomahan on yhtä kaukana pääomista $476{,}18\,€$ ja $476{,}19\,€$.

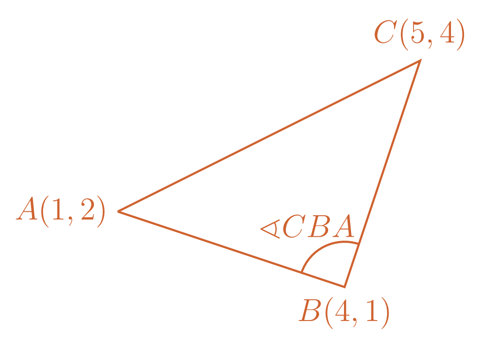
Vastaus: $1361{,}62\,€$

Mikäli pankki pyöristääkin arvoon $476{,}18\,€$, on talletuksen oltava vähintään $1361{,}63\,€$. Uskomme, että molemmat vastaukset $1361{,}62\,€$ ja $1361{,}63\,€$ hyväksytään, sillä tehtävän tarkoitus tuskin oli mitata pyöristystämistaitoja.

Tehtävä C1.2

Ratkaisuvaihtoehto 1

Piirretään mallikuva.



Ratkaistaan tehtävä laskemalla vektorien $\overline{BC}$ ja $\overline{BA}$ välinen kulma.

Määritetään vektorit $\overline{BC}$ ja $\overline{BA}$.

$$\overline{BC} = (5-4)\bar{i} + (4-1)\bar{j} = \bar{i} + 3\bar{j}$$
$$\overline{BA} = (1-4)\bar{i} + (2-1)\bar{j} = -3\bar{i} + \bar{j}$$

Lasketaan vektorien pituudet.

$$|\overline{BC}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$
$$|\overline{BA}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Lasketaan vektorien pistetulo.

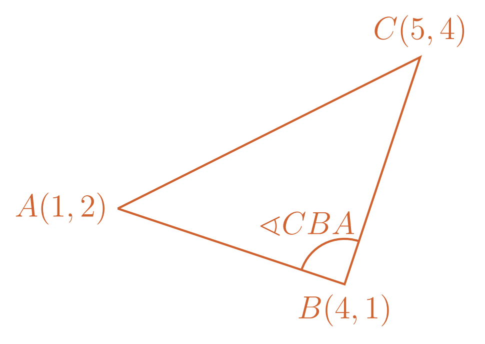
$$\overline{BC} \cdot \overline{BA} = 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 = 0$$

Koska pistetulo on nolla, on vektorien välinen kulma $90°$. Siis kysytty kulma on $90°$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Kolmion kärkipisteet ovat $A = (1,2)$, $B = (4,1)$ ja $C = (5,4)$. On laskettava kulman CBA suuruus.

Piirretään mallikuva.



Kosinilauseen mukaan

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2,$$

jossa a, b ja c ovat kolmion sivujen pituudet ja γ on sivujen a ja b välinen kulma. Kolmion kulman suuruus voidaan ratkaista kosinilauseella, jos tiedetään sivujen pituudet.

Kun janan päätepisteet ovat (x_1, y_1) ja (x_2, y_2), janan pituus on

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Lasketaan sivun AB pituus.

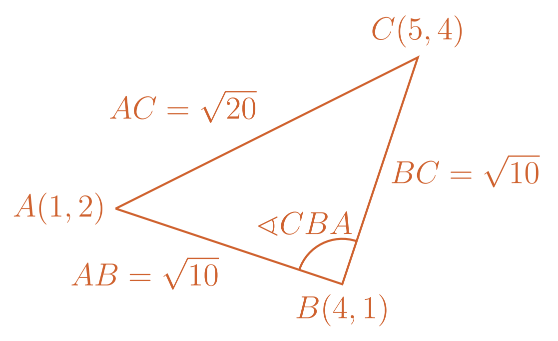
$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(4-1)^2 + (1-2)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{9+1} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

Lasketaan sivun BC pituus.

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(5-4)^2 + (4-1)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{1+9} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

Lasketaan sivun AC pituus.

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{16+4} \\ &= \sqrt{20} \end{aligned}$$



Kosinilauseen mukaan

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma &= c^2 \\ AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\sphericalangle CBA) &= AC^2 \\ \sqrt{10}^2 + \sqrt{10}^2 - 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos(\sphericalangle CBA) &= \sqrt{20}^2 \\ 10 + 10 - 2 \cdot 10 \cdot \cos(\sphericalangle CBA) &= 20 \\ 20 - 20 \cdot \cos(\sphericalangle CBA) &= 20 \quad \| -20 \\ -20 \cdot \cos(\sphericalangle CBA) &= 0 \quad \| : (-20) \\ \cos(\sphericalangle CBA) &= 0 \\ \sphericalangle CBA &= 90° \end{aligned}$$

Vastaus: $90°$

Tehtävä C1.3

Merenpinnan korkeus h metreinä on

$$h(t) = a\sin(bt + c) + d,$$

jossa t on aika tunteina keskiyöstä alkaen.

Sinifunktio $\sin(bt + c)$ on jaksollinen ja saa arvoja väliltä $[-1, 1]$. Siten $a\sin(bt + c)$ saa arvoja väliltä $[-a, a]$, jos $a > 0$, ja jos $a < 0$, niin $a\sin(bt + c)$ saa arvoja väliltä $[a, -a]$. Tavallisesti amplitudi a valitaan positiiviseksi, joten sovitaan nytkin, että $a > 0$. Siten sen välin pituus, jolta funktio h saa arvoja, on $2a$. Vakiotermi d ei vaikuta välin pituuteen, ainoastaan siihen, mistä pisteestä väli alkaa ja mihin pisteeseen se loppuu.

Korkeus on alimmillaan $4\,\mathrm{m}$ ja korkeimmillaan $8\,\mathrm{m}$. Näiden keskiarvo $6\,\mathrm{m}$ on merenpinnan keskimääräinen korkeus. Siten $d = 6\,\mathrm{m}$.

Suurimman ja pienimmän korkeuden erotus on

$$8\,\mathrm{m} - 4\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{m}.$$

Ratkaistaan a.

$$\begin{aligned} 2a &= 4 && \| : 2 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Amplitudi a voidaan laskea myös vähentämällä suurimmasta korkeudesta keskimääräinen korkeus.

Koska veden pinta on alimmillaan klo 4.00 ja seuraavan kerran korkeimmillaan klo 16.25, niin puolet funktion h jaksosta on

$$16\frac{25}{60}\,\mathrm{h} - 4\,\mathrm{h} = 12\frac{25}{60}\,\mathrm{h} = 12\frac{5}{12}\,\mathrm{h}.$$

Siten funktion h jakson pituus on

$$\begin{aligned} 2 \cdot 12\frac{5}{12}\,\mathrm{h} &= 24\frac{10}{12}\,\mathrm{h} \\ &= 24\frac{5}{6}\,\mathrm{h}. \end{aligned}$$

Toisaalta jakson pituus on $\frac{2\pi}{b}$. Ratkaistaan b.

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{b} &= 24\frac{5}{6} \\ \frac{2\pi}{b} &= \frac{149}{6} && \| \cdot 6b \\ 2\pi \cdot 6 &= 149 \cdot b && \| : 149 \\ \frac{12\pi}{149} &= b \\ b &= \frac{12\pi}{149} \\ b &= 0{,}253014\ldots \end{aligned}$$

Siis

$$h(t) = 2\sin\left(\frac{12\pi}{149}t + c\right) + 6.$$

Tiedetään, että merenpinta on alimmillaan korkeudella $h(4) = 4$, kun $t = 4$. Ratkaistaan c.

$$\begin{aligned} h(4) &= 4 \\ 2\sin\left(\frac{12\pi}{149} \cdot 4 + c\right) + 6 &= 4 && \| - 6 \\ 2\sin\left(\frac{12\pi}{149} \cdot 4 + c\right) &= 4 - 6 \\ 2\sin\left(\frac{12\pi}{149} \cdot 4 + c\right) &= -2 && \| : 2 \\ \sin\left(\frac{12\pi}{149} \cdot 4 + c\right) &= -1 \\ \sin\left(\frac{48\pi}{149} + c\right) &= -1 \\ \frac{48\pi}{149} + c &= -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \\ c &= -\frac{48\pi}{149} - \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \\ c &= -\frac{96\pi}{298} - \frac{149\pi}{298} + n \cdot 2\pi \\ c &= -\frac{245\pi}{298} + n \cdot 2\pi, \end{aligned}$$

jossa $n \in \mathbb{Z}$.

Voidaan valita $n = 0$, jolloin $c = -\frac{245\pi}{298} = -2{,}582853\ldots$.

Vastaus: $a = 2$, $b \approx 0{,}25$, $c \approx -2{,}6$ ja $d = 6$

Jotta funktion yksikkö menee oikein, on vakioissa a ja d oltava yksikkönä metri ja vakiossa b yksikkö $\frac{1}{\mathrm{h}}$. Emme usko, että näitä yksiköitä kuitenkaan tarvitsee antaa vastauksessa.

Tehtävänannossa luvut $4\,\mathrm{m}$ ja $8\,\mathrm{m}$ on annettu vain yhden merkitsevän numeron tarkkuudella. Vastauksiin saa kuitenkin jättää yhden merkitsevän numeron enemmän.

Tehtävä C2.1

Bakteerien määrä hetkellä t on

$$b(t) = b(0)e^{kt},$$

jossa $k > 0$ on vakio ja $b(0)$ on bakteerien määrä hetkellä $t = 0$.

On osoitettava, että joka hetki bakteerien määrän muutosnopeus on suoraan verrannollinen bakteerien määrään.

Voidaan olettaa, että $b(0) > 0$, sillä muuten bakteerien määrä olisi nolla joka hetkellä.

Derivoidaan.

$$\begin{aligned} b'(t) &= b(0)e^{kt} \cdot \mathrm{D}(kt) \\ &= b(0)e^{kt} \cdot k \\ &= kb(0)e^{kt} \\ &= kb(t) \end{aligned}$$

Koska $k > 0$ on vakio, niin bakteerien määrän muutosnopeus on suoraan verrannollinen bakteerien määrään $b(t)$, mikä oli todistettava. Verrannollisuuskerroin on k.

Vastaus: Bakteerien määrän muutosnopeus on suoraan verrannollinen bakteerien määrään verrannollisuuskertoimella k.

Tehtävä C2.2

Ratkaistaan kahdentumisaika T.

$$
\begin{aligned}
b(t+T) &= 2b(t) \\
b(0)e^{k(t+T)} &= 2b(0)e^{kt} && \| : b(0)\,(\neq 0) \\
e^{k(t+T)} &= 2e^{kt} \\
e^{kt+kT} &= 2e^{kt} \\
e^{kt}\cdot e^{kT} &= 2e^{kt} && \| : e^{kt}\,(\neq 0) \\
e^{kT} &= 2 \\
kT &= \ln 2 && \| : k\,(\neq 0) \\
T &= \frac{\ln 2}{k}
\end{aligned}
$$

Siis kahdentumisaika on olemassa, ja sen pituus on $\frac{\ln 2}{k}$.

Vastaus: Kahdentumisaika on $T = \dfrac{\ln 2}{k}$.

Tehtävä C2.3

Lasketaan keskiarvo bakteerien määrälle aikavälillä $[0, T] = [0, \frac{\ln 2}{k}]$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T b(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{T}\int_0^T b(0)e^{kt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{b(0)}{T}\int_0^T e^{kt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{b(0)}{T}\cdot\frac{1}{k}\int_0^T ke^{kt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{b(0)}{kT}\Big/_{0}^{T} e^{kt} \\
&= \frac{b(0)}{kT}(e^{kT} - e^{k\cdot 0}) \\
&= \frac{b(0)}{kT}(e^{kT} - e^{0}) \\
&= \frac{b(0)}{kT}(e^{kT} - 1) \qquad \Big\| \, T = \frac{\ln 2}{k} \\
&= \frac{b(0)}{k\cdot\frac{\ln 2}{k}}(e^{k\cdot\frac{\ln 2}{k}} - 1) \\
&= \frac{b(0)}{\ln 2}(e^{\ln 2} - 1) \\
&= \frac{b(0)}{\ln 2}(2 - 1) \\
&= \frac{b(0)}{\ln 2}\cdot 1 \\
&= \frac{b(0)}{\ln 2}
\end{aligned}$$

Siis bakteerien määrän keskiarvo aikavälillä $[0, T]$ on $\frac{b(0)}{\ln 2}$. Se ei riipu vakiosta k.

Vastaus: Bakteerien määrän keskiarvo aikavälillä $[0, T]$ on $\frac{b(0)}{\ln 2}$. Se ei riipu vakiosta k.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä.