Jyväskylän yliopisto ja Tampereen yliopisto

Tampere: Matematiikan ja tilastollisen data-analyysin tutkinto-ohjelman valintakoe, 7.6.2021

Ohje: Ratkaisuissa tulee kirjoittaa näkyviin kaikki tarvittavat välivaiheet. Pelkistä vastauksista ei anneta pisteitä.

1. **a)** Poista itseisarvomerkit: $\big||\pi-4|-|\pi-3|\big|$.

b) Esitä lauseke muodossa, jossa neliöjuuri ei esiinny nimittäjässä: $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

c) Ratkaise yhtälö $\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}=1$.

d) Olkoon $f(x)=e^{x^2}$. Ratkaise yhtälö $f'(x)-2f(x)=0$.

e) Ratkaise epäyhtälö $\ln(x+1)<\ln(2x-1)$.

2. Ratkaise yhtälö $\int_{-2}^{x}(t-2)\mathrm{d}t=-4$ muuttujan x suhteen.

3. Tutkittava, millä muuttujien x, y (≥ 0) arvoilla yhtälö

$$\sqrt{x+\sqrt{y}}=\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}}+\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}}$$

on voimassa.

4. Läpinäkymättömässä pussissa on valkoinen tai musta pallo. Pallo on valkoinen todennäköisyydellä $1/2$. Tiputetaan pussiin musta pallo. Poimitaan pussista pallo niin, että kummankin pallon nostotodennäköisyys on $1/2$. Poimittu pallo on musta. Mikä on todennäköisyys, että myös pallo pussissa on musta?

5. Kolme ympyrää sivuaa toisiaan ulkopuolisesti. Ympyröiden keskipisteet ovat A, B ja C, sekä vastaavat säteiden pituudet r_A, r_B ja r_C.

a) Lausu säteiden pituudet kolmion ABC sivujen pituuksien $a=|BC|$, $b=|AC|$ ja $c=|AB|$ avulla.

b) Oletetaan, että kolmio ABC on suorakulmainen, missä AB on hypotenuusa, $r_C=1$ ja $r_B=2$. Piirrä kuva ja määritä r_A.

Ratkaisu- ja pisteytysehdotus

1. a) Koska $3 < \pi < 4$, on $|\pi - 4| = 4 - \pi$ ja $|\pi - 3| = \pi - 3 \quad (\mathbf{1p})$. Siis $\big||\pi - 4| - |\pi - 3|\big| = |(4 - \pi) - (\pi - 3)| = |7 - 2\pi| = 7 - 2\pi \quad (\mathbf{1p})$.

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+\sqrt{3}} &= \frac{(2-\sqrt{3})\cdot 1}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \qquad (\mathbf{1p}) \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3}^2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3} \qquad (\mathbf{1p}). \end{aligned}$$

c) Kertomalla x^2:lla ($x \neq 0$) ja siirtämällä termejä puolelta toiselle saadaan yhtäpitävä yhtälö $x^2 - 2x - 3 = 0 \quad (\mathbf{1p})$. Tästä saadaan ratkaisut:

$$\frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{2\pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \qquad (\mathbf{1p}).$$

d) $f'(x) = De^{x^2} = e^{x^2}\cdot Dx^2 = 2xe^{x^2} \quad (\mathbf{1p})$. Yhtälö $f'(x) - 2f(x) = 0$ saadaan siis muotoon $2xe^{x^2} - 2e^{x^2} = (2x-2)e^{x^2} = 0$. Koska $e^{x^2} > 0$ jokaisella reaaliluvulla x, tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $2x - 2 = 2(x-1) = 0$, joten yhtälön ratkaisu on $x = 1 \quad (\mathbf{1p})$.

e) Jotta epäyhtälön oikea puoli on määritelty, on oltava $2x > 1$ eli $x > \frac{1}{2}$; tällöin myös vasen puoli on määritelty. Koska luonnollinen logaritmifunktio $\ln$ on aidosti kasvava, alkuperäinen epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön $x + 1 < 2x - 1$ kanssa $(\mathbf{1p})$. Vähentämällä molemmilta puolilta x ja lisäämällä molemmille puolille 1, saadaan epäyhtälön ratkaisuksi $x > 2 \quad (\mathbf{1p})$.

2. Integroimalla polynomi $t - 2$ muuttujan t suhteen saadaan

$$\Big/_{\!-2}^{\,x} \Big((1/2)t^2 - 2t\Big) = -4. \quad (\mathbf{3p})$$

Sijoittamalla saadaan

$$\Big((1/2)x^2 - 2x\Big) - \Big((1/2)(-2)^2 - 2(-2)\Big) = -4. \quad (\mathbf{3p})$$

Kertomalla puolittain luvulla 2 saadaan

$$(x^2 - 4x) - (4 + 8) = -8$$

eli

$$x^2 - 4x - 4 = 0. \quad (\mathbf{2p})$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan perusteella

$$x = 2 \pm 2\sqrt{2}. \quad (\mathbf{2p})$$

3. Asetetaan oletuksen $x, y \geq 0$ lisäksi ehto $y \leq x^2$. $(\mathbf{2p})$

Silloin

(1) $\sqrt{y}$ on olemassa, koska $y \geq 0$,

(2) $\sqrt{x+\sqrt{y}}$ on olemassa, koska $x, \sqrt{y} \geq 0$,

(3) $\sqrt{x^2-y}$ on olemassa, koska $x^2 - y \geq 0$,

(4) $\sqrt{x+\sqrt{x^2-y}}$ on olemassa, koska $x, \sqrt{x^2-y} \geq 0$,

(5) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-y}}$ on olemassa, koska $x \geq \sqrt{x^2-y}$.

Siis tehtävän neliöjuuret on määritelty $(\mathbf{1p})$.

Tutkitaan sitten varsinaista yhtälöä

$$\sqrt{x+\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}} + \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}}.$$

Koska yhtälön kumpikin puoli on ei-negatiivinen $(\mathbf{1p})$, voidaan yhtälö korottaa puolittain toiseen potenssiin, jolloin saadaan yhtäpitävästi

$$x+\sqrt{y} = \left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}} + \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}}\right)^2. \quad (\mathbf{1p})$$

Soveltamalla binomin neliön kaavaa saadaan

$$x+\sqrt{y} = \frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2} + 2\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}}\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}} + \frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}. \quad (\mathbf{1p})$$

Lasketaan yhteen oikean puolen 1. ja 3. yhteenlaskettava, jolloin saadaan

$$x+\sqrt{y} = x + 2\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}}\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}}. \quad (\mathbf{1p})$$

Supistetaan kakkoset ja yhdistetään neliöjuurien tulot, jolloin saadaan

$$x+\sqrt{y} = x + \sqrt{(x+\sqrt{x^2-y})(x-\sqrt{x^2-y})}. \quad (\mathbf{1p})$$

Sovelletaan neliöiden erotuskaavaa, jolloin saadaan

$$x+\sqrt{y} = x + \sqrt{x^2-(x^2-y)}. \quad (\mathbf{1p})$$

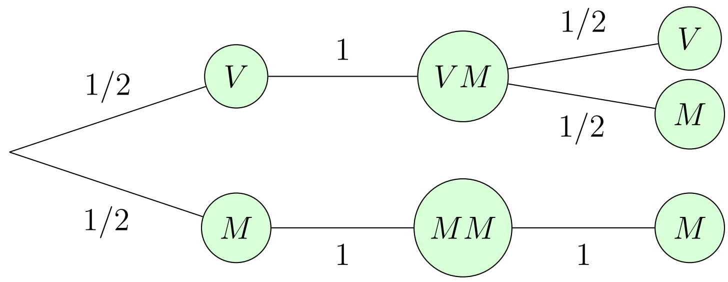
Näin alkuperäinen yhtälö saadaan yhtäpitävästi muotoon

$$x+\sqrt{y} = x+\sqrt{y}, \quad (\mathbf{1p})$$

joka on aina voimassa.

Vastaus: Yhtälö toteutuu, kun $y \leq x^2$.

4. Puukaavio kuvaa asetelman $(\mathbf{3p})$:



Puukaaviossa kunkin tapahtumaketjun todennäköisyys on siihen johtavien tapahtumien ehdollisten todennäköisyyksien tulo. Tapahtumaketjut ovat erillisiä, joten niiden todennäköisyydet voidaan summata, jos halutaan arvioida usean tapahtumaketjun todennäköisyys.

Pallo on valkoinen (V) tai musta (M) todennäköisyydellä $1/2$. Mustan pallon pussiin lisäämisen jälkeen pussissa on valkoinen ja musta tai kaksi mustaa palloa. Lopuksi poimitaan pallo pussista. Jos pussissa oli alunperin valkoinen pallo, todennäköisyydellä $1/2$ saadaan valkoinen tai musta pallo. Jos pallo pussissa oli alunperin musta, musta pallo saadaan varmasti. Mustan pallon poimintaan johtavien kahden alimman tapahtumaketjun todennäköisyydet ovat $1/2 \times 1 \times 1/2 = 1/4$ ja $1/2 \times 1 \times 1 = 1/2$ $(\mathbf{2p})$. Todennäköisyys poimia musta pallo pussista on $1/4 + 1/2 = 3/4$ $(\mathbf{2p})$.

Tehtävänä on laskea todennäköisyys mustalle pallolle pussissa ehdolla, että pussista on poimittu musta pallo. Musta pallo voi olla pussissa jäljellä vain, jos pallo pussissa oli alunperin musta. Todennäköisyys saadaan jakamalla ainoan tapahtumaketjun, jossa pallo pussissa oli alunperin musta, todennäköisyys mustan pallon poimiseen päätyvien tapahtumaketjujen todennäköisyydellä. Lasketaan siis puukaavion alimman tapahtumaketjun todennäköisyys suhteessa kahden alimman tapahtumaketjun todennäköisyyteen:

$$\frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3} \qquad (\mathbf{3p}).$$

Pussiin jäänyt pallo on musta todennäköisyydellä $2/3$.

5. a) a) Koska ympyrät sivuavat toisiaan, ne jakavat sivut säteiden pituisiin osiin. Siis

$$\begin{cases} r_B + r_C = a \\ r_A + r_C = b \\ r_A + r_B = c. \end{cases} \qquad (\mathbf{1p})$$

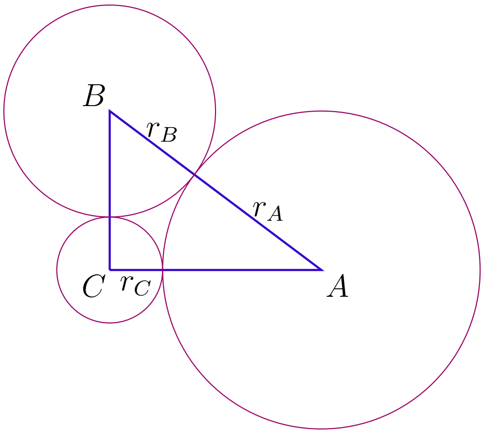
Merkitään piiriä $p = a + b + c$; kun yhtälöryhmän yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan

$$2r_A + 2r_B + 2r_C = a + b + c = p \iff r_A + r_B + r_C = p/2.$$

Siksi

$$\begin{cases} r_B + r_C = a \\ r_A + r_C = b \\ r_A + r_B = c. \end{cases} \implies \begin{cases} p/2 - r_A = a \\ p/2 - r_B = b \\ p/2 - r_C = c. \end{cases} \iff \begin{cases} r_A = p/2 - a = -a/2 + b/2 + c/2 \\ r_B = p/2 - b = a/2 - b/2 + c/2 \\ r_C = p/2 - c = a/2 + b/2 - c/2. \end{cases} \qquad (\mathbf{3p})$$

b)



$(\mathbf{1p})$

Säteistä pari pienintä tunnetaan, joten saadaan

$$\begin{cases} a = r_B + r_C = 1 + 2 = 3 \\ b = p/2 - r_B = p/2 - 2 \\ c = p/2 - r_C = p/2 - 1. \end{cases}$$

Koska $\triangle ABC$ on suorakulmainen, niin voidaan soveltaa Pythagoraan lausetta $(\mathbf{2p})$:

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 = c^2 \\ \iff & 3^2 + (p/2-2)^2 = (p/2-1)^2 \iff 9 + p^2/4 - 2p + 4 = p^2/4 - p + 1 \\ \iff & p = 9 + 4 - 1 = 12. \end{aligned}$$

Tästä seuraa $r_A = p/2 - a = 12/2 - 3 = 3$. $(\mathbf{3p})$ $\square$