Matematiikka | Tehtävä 1.

a) [1 p.] Huomataan, että

$$(x-5)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 2\cdot x \cdot 5 + 5^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x(x-10) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ tai } x = 10.$$

Näin ollen yhtälö $(x-5)^2 = 25$ toteutuu jos ja vain jos $x = 0$ tai $x = 10$.

b) [1 p.] Epäyhtälö $x^2 > 17$ toteutuu jos ja vain jos $x^2 - 17 > 0$. Ratkaistaan polynomin $x^2 - 17$ nollakohdat:

$$x^2 - 17 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 17 \Leftrightarrow x = -\sqrt{17} \text{ tai } x = \sqrt{17}.$$

Koska paraabeli $y = x^2 - 17$ on ylöspäin aukeava, niin epäyhtälö $x^2 - 17 > 0$ toteutuu jos ja vain jos $x < -\sqrt{17}$ tai $x > \sqrt{17}$.

c) [1 p.] Huomataan, että

$$\frac{5}{4} - \frac{x}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{3\cdot 5}{3\cdot 4} - \frac{4\cdot x}{4\cdot 3} = 1 \Leftrightarrow \frac{15}{12} - \frac{4\cdot x}{12} = 1 \Leftrightarrow \frac{15-4x}{12} = 1 \Leftrightarrow 15 - 4x = 1\cdot 12 \Leftrightarrow 15 - 4x = 12$$
$$\Leftrightarrow \quad -4x = 12 - 15 \Leftrightarrow -4x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Näin ollen ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $\frac{5}{4} - \frac{x}{3} = 1$, on $x = \frac{3}{4}$.

d) [1 p.] Huomataan, että

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{4}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{x\cdot 4}{2\cdot 5} = 1 \Leftrightarrow \frac{x\cdot 4}{10} = 1 \Leftrightarrow x\cdot 4 = 1\cdot 10 \Leftrightarrow x\cdot 4 = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Näin ollen ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $\frac{x}{2}\cdot\frac{4}{5}$, on $x = \frac{5}{2}$.

e) [1 p.] Koska $-\ln x < -6 \Leftrightarrow \ln x > 6 \Leftrightarrow e^{\ln x} > e^6 \Leftrightarrow x > e^6$, niin epäyhtälö $-\ln x < -6$ toteutuu jos ja vain jos $x > e^6$.

f) [1 p.] Huomataan, että $1 - |\cos x| = 0 \Leftrightarrow 1 = |\cos x|$. Tiedetään, että $\cos x = 1$ jos ja vain jos $x = n\cdot 2\pi$ ja että $\cos x = -1$ jos ja vain jos $x = \pi + n\cdot 2\pi$, missä n on mikä tahansa kokonaisluku.

Näin ollen yhtälö $1 - |\cos x| = 0$ toteutuu jos ja vain jos $x = n\cdot\pi$, missä n on mikä tahansa kokonaisluku.

Matematiikka | Tehtävä 2.

a) [3 p.] Junan pituus: Koska 120 km = 120000 m ja 1 h = $60 \cdot 60$ s = 3600 s, niin 120 km/h = (120000/3600) m/s = (100/3) m/s. Näin ollen junan A pituus $l_j = 3\text{ s} \cdot (100/3)\text{ m/s} = 100\text{ m}$.

Tunnelin pituus: $l_t = 27\text{ s} \cdot (100/3)\text{ m/s} = 900\text{ m}$.

b) [3 p.] Siitä hetkestä kun junan B keula kulkee pisteestä d tunnelin suuaukolle kuluu

$$\frac{50\text{ km}}{120\text{ km/h}} \approx 0,416667\text{ h}.$$

Siitä hetkestä kun junan B keula lähtee pisteestä d siihen hetkeen kun sen perä tulee tunnelista ulos kuluu

$$\frac{50\text{ km} + 4\text{ km} + 0,11\text{ km}}{120\text{ km/h}} = \frac{54,11\text{ km}}{120\text{ km/h}} \approx 0,450917\text{ h}.$$

Tunnelin etäisyys pisteestä e on 100 km − 54 km = 46 km. Siitä hetkestä kun junan C keula kulkee pisteestä e tunnelin toiselle suuaukolle kuluu

$$\frac{46\text{ km}}{160\text{ km/h}} = 0,2875\text{ h}.$$

Siitä hetkestä kun junan C keula lähtee pisteestä e siihen hetkeen kun sen perä tulee tunnelista ulos kuluu

$$\frac{46\text{ km} + 4\text{ km} + 0,09\text{ km}}{160\text{ km/h}} = \frac{50,09\text{ km}}{160\text{ km/h}} \approx 0,313063\text{ h}.$$

Näin ollen Junan C perä tulee ulos tunnelista ennen kuin junan B keula menee tunneliin. Junat eivät törmää.

Matematiikka | Tehtävä 3.

a) [2 p.] Huomataan, että

$$\int_1^9 3\sqrt{x}\,dx = \Big/_1^9\; 3\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} = \Big/_1^9\; 2x^{3/2} = 2\cdot 9^{3/2} - 2\cdot 1^{3/2} = 2\cdot 27 - 2 = 52.$$

b) [2 p.] Huomataan, että

$$\int_{-1}^1 (2\sin x + 2)\,dx = \int_{-1}^1 2\sin x\,dx + \int_{-1}^1 2\,dx = 2\int_{-1}^1 \sin x\,dx + \int_{-1}^1 2\,dx.$$

Koska $\sin x$ on pariton funktio, niin $\int_{-1}^1 \sin x\,dx = 0$. Näin ollen

$$2\int_{-1}^1 \sin x\,dx + \int_{-1}^1 2\,dx = 0 + \int_{-1}^1 2\,dx = \int_{-1}^1 2\,dx = \Big/_{-1}^1\; 2x = 2\cdot 1 - 2\cdot(-1) = 4.$$

c) [2 p.] Selvitetään ensin polynomin $x^2 - 3x - 4$ nollakohdat. Nämä ovat

$$\frac{-(-3) + \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1} = \frac{3+\sqrt{9+16}}{2} = \frac{3+\sqrt{25}}{2} = 4$$

ja

$$\frac{-(-3) - \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1} = \frac{3-\sqrt{25}}{2} = -1.$$

Koska kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli, integraali saadaan kolmessa osassa seuraavasti:

$$\int_{-2}^5 |x^2 - 3x - 4|\,dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 3x - 4)\,dx + \int_{-1}^4 -(x^2 - 3x - 4)\,dx + \int_4^5 (x^2 - 3x - 4)\,dx.$$

Huomataan, että

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{-1} (x^2 - 3x - 4)\,dx &= \Big/_{-2}^{-1}\; \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x \\
&= \frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2 - 4\cdot(-1) - (\frac{1}{3}\cdot(-2)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-2)^2 - 4\cdot(-2)) = \frac{17}{6}, \\
\int_{-1}^4 -(x^2 - 3x - 4)\,dx &= -\int_{-1}^4 (x^2 - 3x - 4)\,dx = -\Big/_{-1}^4\; \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x \\
&= -(\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot(4)^2 - 4\cdot(4) - (\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2 - 4\cdot(-1))) = \frac{125}{6}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\int_4^5 (x^2 - 3x - 4)\,dx &= \Big/_4^5\; \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x \\
&= \frac{1}{3}\cdot(5)^3 - \frac{3}{2}\cdot(5)^2 - 4\cdot(5) - (\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot(4)^2 - 4\cdot(4)) = \frac{17}{6}.
\end{aligned}$$

Näin ollen integraalin arvo on

$$\int_{-2}^5 |x^2 - 3x - 4|\,dx = \frac{17}{6} + \frac{125}{6} + \frac{17}{6} = \frac{53}{2}.$$

Fysiikka | Tehtävä 1.

a) [2 p.] Snellin lain avulla saadaan laskettua taitekulma α_2, kun tunnetaan taitekertoimet n_1 ja n_2 sekä tulokulma α_1: $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$.

Näin ollen: $n_{\text{jää}} \sin\alpha_{\text{jää}} = n_{\text{ilma}} \sin\alpha_{\text{ilma}}$ ja $n_{\text{vesi}} \sin\alpha_{\text{vesi}} = n_{\text{jää}} \sin\alpha_{\text{jää}}$.

Sijoitetaan ensimmäinen lauseke jälkimmäiseen.
Saadaan: $\sin\alpha_{\text{vesi}} = \dfrac{n_{\text{ilma}}}{n_{\text{vesi}}} \sin\alpha_{\text{ilma}} = \dfrac{1{,}000}{1{,}333} \sin 25^\circ \Rightarrow \alpha_{\text{vesi}} = 18{,}48^\circ \approx 18^\circ$.

b) [2 p.] Arkhimedeen lain mukaan fluidiin upotettuun kappaleeseen kohdistuu noste N, jonka suuruus on yhtä suuri kuin kappaleen syrjäyttämän fluidin paino. Tässä tapauksessa syrjäytetyn fluidin tilavuus on sama kuin jäälohkareen vedenpinnan alla olevan osan tilavuus V_x. Kelluessaan jäälohkare on tasapainossa, jolloin siihen vaikuttavien voimien summa on 0: $\Sigma F = N - G = 0 \Rightarrow N = G$, missä G on jäälohkareen paino.

$$N = G \Rightarrow \rho_{\text{vesi}} \cdot V_x \cdot g = m_{\text{jää}} \cdot g = \rho_{\text{jää}} \cdot V_{\text{jää}} \cdot g$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{vesi}} \cdot V_x = \rho_{\text{jää}} \cdot V_{\text{jää}} \Rightarrow \frac{V_x}{V_{\text{jää}}} = \frac{\rho_{\text{jää}}}{\rho_{\text{vesi}}} = \frac{0{,}915\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}{1{,}005\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} = 0{,}9104.$$

Vedenpinnan alapuolella on siis $0{,}9104\ \text{m}^3$ ja yläpuolella $(1{,}0000 - 0{,}9104)\ \text{m}^3 = 0{,}0896\ \text{m}^3$. Koska lohkare on kuutio, on jokaisen sivun mitta 1,0 m. Koska ylä- ja alapintojen pinta-alat ovat $A = 1{,}0\ \text{m}^2$, saadaan vedenpinnan yläpuolella olevan osan korkeus h laskettua tilavuuden lausekkeesta $V = Ah \Rightarrow h = \frac{V}{A} = 0{,}0896\ \text{m} \approx 9{,}0\ \text{cm}$.

c) [2 p.] Sulamiseen tarvittava lämpömäärä $Q = sm$, missä s on materiaalin sulamislämpö ja m sen massa. Jos Q on systeemiin ajassa t viety lämpö, on keskimääräinen lämpövirta kappaleeseen $\frac{Q}{t}$, joka vastaa keskimääräistä sulatustehoa P. Siis $P = \dfrac{Q}{t} = \dfrac{sm}{t}$.

$$t = 21\ \text{d} \cdot 24 \frac{\text{h}}{\text{d}} \cdot 60 \frac{\text{min}}{\text{h}} \cdot 60 \frac{\text{s}}{\text{min}} = 1814400\ \text{s}.$$

$$P = \frac{sm}{t} = \frac{s \cdot \rho_{\text{jää}} \cdot V_{\text{jää}}}{t} = \frac{333\ \frac{\text{J}}{\text{g}} \cdot 0{,}915\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 1000000\ \text{cm}^3}{1814400\ \text{s}} = 167{,}9\ \frac{\text{J}}{\text{s}} \approx 170\ \text{W}.$$

Fysiikka | Tehtävä 2.

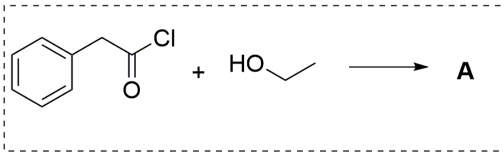
1. [1 p.] B.
2. [1 p.] B.
3. [1 p.] C.
4. [1 p.] A.
5. [1 p.] D.
6. [1 p.] A.

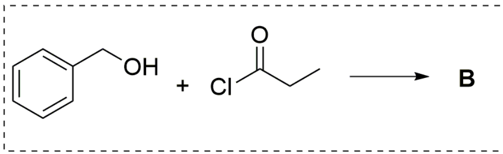
Kemia | Tehtävä 1.

1. [1 p.] B
2. [1 p.] D
3. [1 p.] C
4. [1 p.] B
5. [1 p.] C
6. [1 p.] D

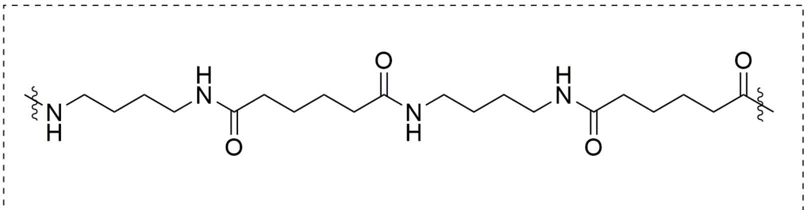
Kemia | Tehtävä 2.

1. [1 p.]

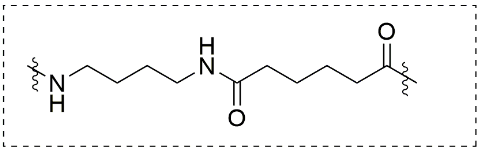




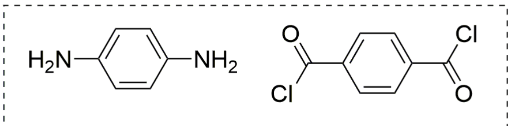
2. [1 p.]



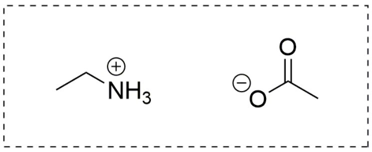
tai



3. [1 p.]



4. [1 p.]



Kieliversioiden välisen eroavaisuuden vuoksi, vastauksessa hyväksytään myös etikkahapon ja etaanidiamiinin välisen happo-emäsreaktion tuotteiden rakennekaavat.

5. [2 p.]

Reagenssien ainemäärät:

Etikkahappo:

$$m = \rho V = 1{,}05\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{ml}} \cdot 10{,}0\ \mathrm{ml} = 10{,}5\ \mathrm{g}$$

$$n = \frac{m}{M} = \frac{10{,}5\ \mathrm{g}}{60{,}05\ \mathrm{g/mol}} = 0{,}17485\ \mathrm{mol}$$

Isoamyylialkoholi:

$$m = \rho V = 0{,}81\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{ml}} \cdot 10{,}0\ \mathrm{ml} = 8{,}1\ \mathrm{g}$$

$$n = \frac{m}{M} = \frac{8{,}1\ \mathrm{g}}{88{,}15\ \mathrm{g/mol}} = 0{,}091889\ \mathrm{mol}$$

Etikkahappo ja isoamyylialkoholi reagoivat 1:1 (rikkihappo toimii katalyyttinä), joten **isoamyylialkoholi on rajoittava reagenssi**.

Isoamyyliasetaatin teoreettinen saanto mooleina:
***n*(isoamyyliasetaatti)** = n(isoamyylialkoholi) = 0,091889 mol ≈ **0,0919 mol**

Isoamyyliasetaatin moolimassan voi laskea vähentämällä reagenssien yhteenlasketuista moolimassoista veden moolimassan:

$$M_{\mathrm{isoamyyliasetaatti}} = M_{\mathrm{etikkahappo}} + M_{\mathrm{isoamyylialkoholi}} - M_{\mathrm{vesi}}$$

$$M_{\mathrm{isoamyyliasetaatti}} = 60{,}05\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} + 88{,}15\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} - 18{,}02\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} = 130{,}18\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$$

Isoamyyliasetaatin teoreettinen saanto grammoina:
m(isoamyyliasetaatti) = $n \cdot M$ = 0,091889 mol · 130,18 g/mol = 11,962 g.
Reaktion saanto-% = (6,67 g/ 11,962 g) · 100 % = **55,8 %**

tai

$$\text{Reaktion saanto-\%} = \frac{\dfrac{6{,}67\ \mathrm{g}}{130{,}18\ \dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}}}{0{,}091889\ \mathrm{mol}} \cdot 100\ \% = \frac{0{,}051237\ \mathrm{mol}}{0{,}091889\ \mathrm{mol}} \cdot 100\ \% = \mathbf{55{,}8}\ \%$$

Ongelmanratkaisu | Tehtävä 1.

1. [1 p.] D.
2. [1 p.] A.
3. [1 p.] C.
4. [1 p.] D.
5. [1 p.] B.
6. [1 p.] B.

Ongelmanratkaisu | Tehtävä 2.

Osatehtävä 1. [2 p.].

- Opasteen toimintavirheellä eli solmulla H22 on eniten (viisi) välittömiä seurauksia eli siitä johtuvia muita vaaratekijöitä tai tapahtumia.
- Eliminoimalla solmun, jonka out-degree on suurin, vähennetään todennäköisesti eniten vaaratilanteita, kun muuta tietoa esimerkiksi tapahtumien yleisyydestä ei ole käytettävissä.

Osatehtävä 2. [2 p.]
Täsmälleen kolmen solmun tapahtumaketjut, joiden viimeinen tapahtuma on räjähdys eli H11 ovat:
Myrkyttyminen → Terrorismi → Räjähdys
Terrorismi → Tulipalo → Räjähdys
Tupakoiminen → Tulipalo → Räjähdys
Sähkölaitteen häiriö → Tulipalo → Räjähdys
Radalta suistuminen → Tulipalo → Räjähdys
Törmääminen toiseen junaan → Tulipalo → Räjähdys
Välinpitämätön johtaminen → Tulipalo → Räjähdys
(Räjähdys → Tulipalo → Räjähdys)

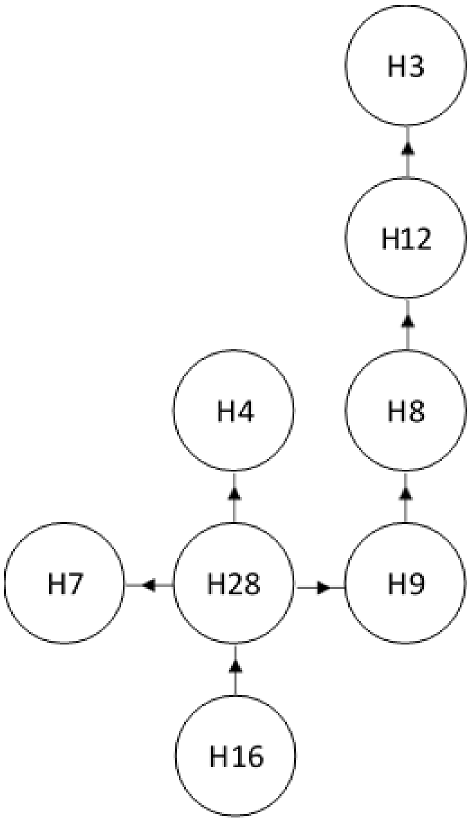
TAI:

H17 → H25 → H11
H25 → H13 → H11
H21 → H13 → H11
H9 → H13 → H11
H7 → H13 → H11
H4 → H13 → H11
H16 → H13 → H11
(H11 → H13 → H11)

- Useimmissa tapahtumaketjuista räjähdystä edeltävä tapahtuma on tulipalo.
- Terrorismista voi seurata sekä räjähdys että tulipalo, josta voi edelleen seurata räjähdys.
- Tulipaloa voidaan selvästi pitää todennäköisimpänä tapahtuma, joka edeltää välittömästi räjähdystä.

Osatehtävä 3. [2 p.]

- Poistetaan solmut H13 ja H27 verkostokuvaajasta.
- Tämän jälkeen piirretään suunnattu verkostokuvaaja lähtien solmusta H16 eli välinpitämätön johtaminen.



Vaarallisimman tapahtumaketjun valinnan esimerkkikriteerejä:

- Tapahtumilla voi olla muitakin seurauksia, kuin verkostokuvaajassa esitetyt.
- Jokainen tapahtumaketjun solmu on itsessään jo enemmän tai vähemmän vakava seuraus.
- Pidempi tapahtumaketju voi olla vaarallisempi, koska se aiheuttaa tietyllä ajanjaksolla useammin vahinkoa, mikäli tietoja todennäköisyyksistä ei ole annettu.
- Tässä tapauksessa pisin tapahtumaketju sisältää mm. sähköiskun, putoamisen ja törmäämisen ihmiseen eli kolme suoraa henkilövahinkoa.
- Törmääminen toiseen junaan ja radalta suistuminen voivat aiheuttaa suuriakin henkilövahinkoja.
- Törmääminen toiseen junaan on lähtökohtaisesti radalta suistumista vaarallisempi tapahtuma, koska siinä on osallisena kaksi junaa.

Vaarallisin jäljellä jäävä tapahtumaketju on joko:
Välipitämätön johtaminen → Rikkomus → Sähkölaitteen häiriö → Sähköisku → Putoaminen → Törmääminen ihmiseen.
(Eli H16 → H28 → H9 → H8 → H12 → H3.)

TAI

Välipitämätön johtaminen → Rikkomus → Törmääminen toiseen junaan. (Eli H16 → H28 → H4.)