

Ohje: Ratkaisuihin tulee kirjoittaa näkyviin kaikki tarvittavat välivaiheet. Pelkistä vastauksista ei anneta pisteitä.

1. Olkoon $f(x) = xe^x + 5x + 7$.

a) Laske funktion f derivaatta $f'(x)$. Kerro mitä derivointikaavoja ja derivointisääntöjä käytät laskusi missäkin vaiheessa.

b) Ratkaise, millä luvun x arvoilla $2f'(x) - 4 = 6$.

Derivaatalle voidaan todistaa lukuisia ominaisuuksia, esimerkiksi mikäli funktiot $g(x)$ ja $h(x)$ ovat derivoituvia, niin $(g + h)'(x) = g'(x) + h'(x)$ ja $(gh)'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$. Näitä ja muita tunnettuja tuloksia saa hyödyntää ratkaisussa.

2. a) Ratkaise yhtälö $\sqrt{x^2 - 1} = x + 3$.

b) Millä luvun a arvoilla epäyhtälö $|x - 3a| < 2 - a$ on voimassa, kun $x = 1$?

3. Määritä paraabelin $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ ja suoran $g(x) = -x + 1$ leikkauspisteet sekä niiden rajaaman äärellisen alueen pinta-ala.

4. Heitetään kahta (kuusisivuista) noppaa (ensin toinen; sitten riippumattomasti toinen). Kumpaa-kin noppaa heitettäessä kunkin silmäluvun todennäköisyys on $1/6$.

a) Mikä on kunkin silmälukuparin (heittojärjestyksessä) todennäköisyys? Perustele.

b) Tiedetään, että toisen nopan silmäluvuksi on tullut 6, muttei tiedetä kumman nopan. Mikä on todennäköisyys, että toisenkin nopan silmäluku on 6?

c) Olkoot toinen noppa punainen ja toinen sininen. Tiedetään, että punaisen nopan silmäluvuksi on tullut 6. Mikä on todennäköisyys, että sinisenkin nopan silmäluku on 6?

5. Olkoot $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ tason vektoreita, jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0 \\ 3\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = 4. \end{cases}$$

a) Määritä pistetulot $\vec{a} \cdot \vec{a}$ ja $\vec{b} \cdot \vec{b}$.

b) Oletetaan lisäksi, että $\vec{a} \neq -\vec{b}$. Osoita, että vektori $\vec{a} + \vec{b}$ jakaa vektorien $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välisen kulman kahteen yhtä suureen osaan.

c) Oletetaan vielä, että $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$. Määritä vektorien $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välisen kulman suuruus.

Tehtävässä voi olla hyötyä seuraavasta: Olkoot $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ ja $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$. Tällöin $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_xb_x + a_yb_y$.