Helsingin yliopisto
Matemaattisten tieteiden kandiohjelma / Taloustieteen kandiohjelma
Valintakoe 29.5.2023 – Ratkaisut ja pisteytys

1. Tasokäyrä kulkee pisteen $(3, 4)$ kautta. Määritä käyrän yhtälö, kun kyseessä on
   (a) origon kautta kulkeva suora, (3 pistettä)
   (b) origokeskinen ympyrä, (3 pistettä)
   (c) ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on origossa. (4 pistettä)

Ratkaisu.

(a) Suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}, \quad \text{(1 p.)}$$

joten sen yhtälö on $y = \frac{4}{3}x$ (tai $4x - 3y = 0$). (2 p.)

(b) Ympyrän säde r on pisteen $(3, 4)$ etäisyys origosta, eli

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5. \quad \text{(1 p.)}$$

Yhtälö on $x^2 + y^2 = r^2$ eli $x^2 + y^2 = 25$. (2 p.)

(c) Origohuippuisen, ylöspäin aukeavan paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2$ (1 p.). Koska piste $(3, 4)$ on käyrällä, niin on voimassa $4 = a \cdot 3^2$ (1 p.). Näin ollen $a = \frac{4}{9}$ (1 p.), joten paraabelin yhtälö on $y = \frac{4}{9}x^2$ (1 p.).

2. Laske integraalit
   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{3+x}\, dx$, (5 pistettä)
   (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{2|x|}\, dx$. (5 pistettä)

Ratkaisu.

(a)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{3+x}\, dx &= \Big/_{-1}^{1} \ln(3+x) \quad \text{(2 p.)} \\
&= \ln(3+1) - \ln(3-1) \quad \text{(1 p.)} \\
&= \ln\frac{4}{2} \quad \text{(1 p.)} \\
&= \ln 2. \quad \text{(1 p.)}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} e^{2|x|}\, dx &= \int_{-1}^{0} e^{-2x}\, dx + \int_{0}^{1} e^{2x}\, dx \quad \text{(2 p.)} \\
&= -\frac{1}{2} \Big/_{-1}^{0} e^{-2x} + \frac{1}{2} \Big/_{0}^{1} e^{2x} \quad \text{(1 p.)} \\
&= -\frac{1}{2}(e^0 - e^2) + \frac{1}{2}(e^2 - e^0) \quad \text{(1 p.)} \\
&= e^2 - 1. \quad \text{(1 p.)}
\end{aligned}$$

3. Olkoon $A = (1, 2)$. Vektorin $\overrightarrow{AB}$ pituus on 3, ja se on kohtisuorassa vektoria $3\bar{i} + 4\bar{j}$ vastaan. Määritä pisteen B koordinaatit.

Ratkaisu. Vektoria $3\bar{i} + 4\bar{j}$ vastaan kohtisuoria vektoreita ovat esimerkiksi vektorit $\bar{n} = \pm(4\bar{i} - 3\bar{j})$ (1 p.), joiden pituus on $\sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$ (1 p.). Näiden suuntaiset vektorit, joiden pistuus on 3, ovat $\frac{3}{5}\bar{n}$ (1 p.). Täten

$$\overrightarrow{AB} = \pm\frac{3}{5}(4\bar{i} - 3\bar{j}) = \pm\left(\frac{12}{5}\bar{i} - \frac{9}{5}\bar{j}\right). \quad \text{(2 p.)}$$

Vektori $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ (1 p.). Saadaan

$$\overrightarrow{OB} = i + 2\bar{j} + \frac{12}{5}\bar{i} - \frac{9}{5}\bar{j} = \frac{17}{5}\bar{i} + \frac{1}{5}\bar{j} \quad \text{(1 p.)}$$

tai

$$\overrightarrow{OB} = i + 2\bar{j} - \frac{12}{5}\bar{i} + \frac{9}{5}\bar{j} = -\frac{7}{5}\bar{i} + \frac{19}{5}\bar{j} \quad \text{(1 p.)}$$

Pisteen B koordinaatit ovat siten $(\frac{17}{5}, \frac{1}{5})$ (1 p.) tai $(-\frac{7}{5}, \frac{19}{5})$ (1 p.).

4. Säännöllisen tetraedrin muotoista noppaa heittämällä voi saada silmäluvuksi 1, 2, 3 tai 4. Nämä ovat kaikki yhtä todennäköisiä. Pelaaja heittää yhtä aikaa tetraedrin muotoista ja tavallista noppaa ja laskee silmälukujen summan.
   (a) Määritä kaikkien mahdollisten silmälukujen summien todennäköisyydet. (5 pistettä)
   (b) Määritä silmälukujen summan odotusarvo. (5 pistettä)

Ratkaisu. Taulukoidaan kaikki mahdolliset silmälukujen summat:

4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

(3 p.)

Kaikkiaan alkeistapauksia on $6 \cdot 4 = 24$ kappaletta. (1 p.)

(a) Taulukon perusteella saadaan todennäköisyydet

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = n)$	1/24	2/24	3/24	4/24	4/24	4/24	3/24	2/24	1/24

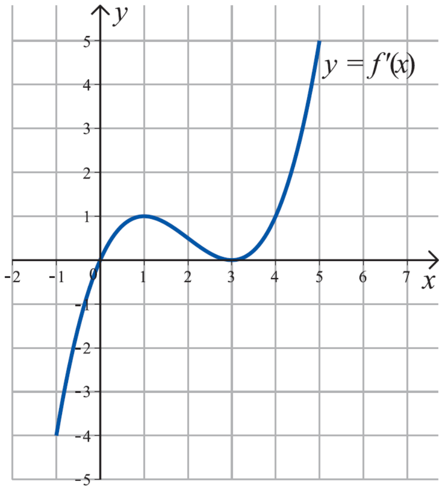
Yksi oikein (1 p.), 5 oikein (1 p.), kaikki oikein (1 p.).

(b) Summan odotusarvo on

$$\frac{1}{24}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 10) \quad \text{(2 p.)}$$

$$= \frac{144}{24} = 6. \quad \text{(1 p.)}$$

5. Alla olevassa kuviossa on erään funktion $f(x)$ derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja välillä $-1 < x < 5$.
   (a) Määritä kuvaajan perusteella derivaattafunktion $f'(x)$ nollakohdat. (3 pistettä)
   (b) Määritä kuvaajan perusteella ne välit, joilla funktio $f(x)$ on kasvava. (3 pistettä)
   (c) Määritä kuvaajan perusteella funktion $f(x)$ paikalliset ääriarvokohdat ja niiden tyypit. (4 pistettä)



Ratkaisu.

(a) $x = 0$ ja $x = 3$. Ensimmäisestä oikeasta (2 p.), toisesta oikeasta (1 p.).
(b) Funktio on kasvava, kun $0 \leqslant x < 5$. (3 p.)
(c) Piirretään merkkikaavio: (1 p.)

$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

$-1 \quad 0 \quad 3 \quad 5$

Näin ollen ainoa ääriarvokohta on $x = 0$ (2 p.), joka on minimi (1 p.).