Kemia │Tehtävä 1.

Kemi │Uppgift 1.

Chemistry │Question 1.

1. C
2. B
3. C
4.

a)

Glukoosin ainemäärä:

$$n(glukoosi) = \frac{m(glukoosi)}{M(glukoosi)} = \frac{1000\ \mathrm{g}}{180{,}16\ \mathrm{g/mol}} = 5{,}5506\ \mathrm{mol}$$

Hiilidioksidin ainemäärä:

$$n(CO_2) = 6 \cdot n(glukoosi) = 33{,}304\ \mathrm{mol}$$

Hiilidioksidin tilavuus:

$$V(\mathrm{CO_2}) = \frac{nRT}{p} = \frac{33{,}304\ \mathrm{mol} \cdot 8{,}31446 \frac{\mathrm{Pa \cdot m^3}}{\mathrm{mol \cdot K}} \cdot 298{,}15\ \mathrm{K}}{101\ 325\ \mathrm{Pa}} = 0{,}8148\ \mathrm{m^3} \approx \mathbf{0{,}815\ m^3}$$

b)

Ilman tilavuus:

$$V(\mathrm{ilma}) = \frac{V(\mathrm{CO_2})}{0{,}0004} = \frac{0{,}8148\ \mathrm{m^3}}{0{,}0004} = 2036{,}97\ \mathrm{m^3} \approx \mathbf{2{,}04 \cdot 10^3\ m^3}$$

c)

Yhtä glukoosimoolia kohti muodostuu 6 mol happea:

$$n(\mathrm{O_2}) = 6 \cdot n(\mathrm{glukoosi}) = 6 \cdot 5{,}551\ \mathrm{mol} = 33{,}304\ \mathrm{mol}$$

Tarvittava energiamäärä:

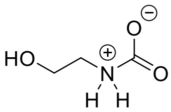
$$33{,}304\ \mathrm{mol} \cdot 1882\ \mathrm{kJ/mol} = 62\ 678\ \mathrm{kJ} \approx \mathbf{62{,}7\ MJ}$$

Kemia │Tehtävä 2.

Kemi │Uppgift 2.

Chemistry │Question 2.

1. A
2. D
3. C
4.



5.

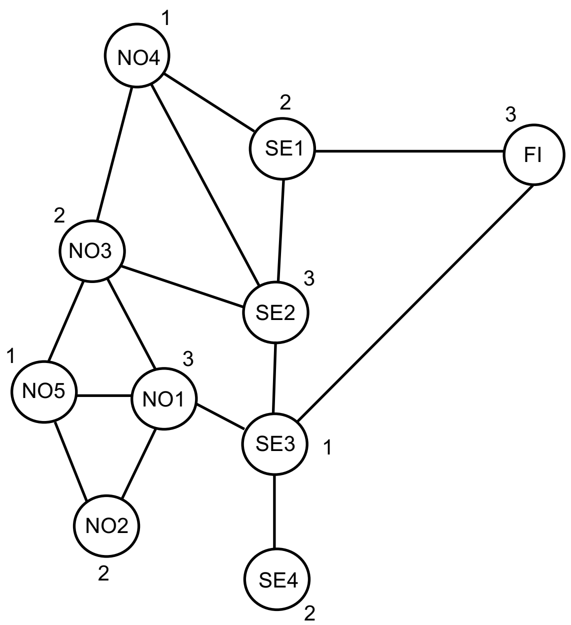
   a) $Mg_2SiO_4 + 2\ CO_2 \rightarrow 2\ MgCO_3 + SiO_2$
   b) $Mg_3Si_2O_5(OH)_4 + 3\ CO_2 \rightarrow 3\ MgCO_3 + 2\ SiO_2 + 2\ H_2O$

Ongelmanratkaisu │Tehtävä 1.

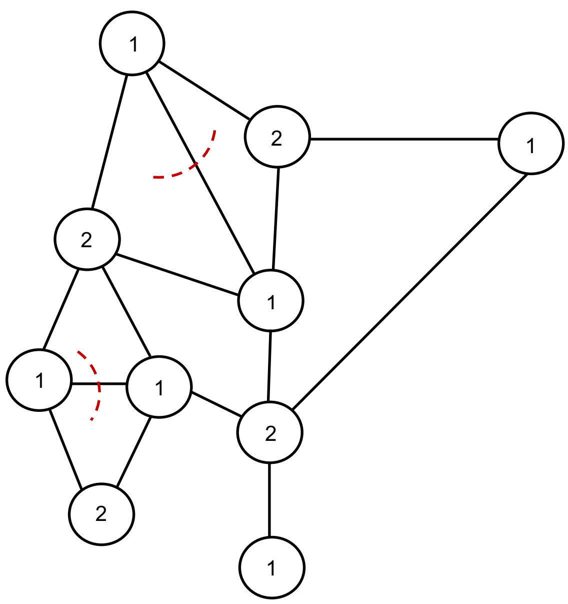
Problemlösning │Uppgift 1.

Problem Solving │Question 1.

1. B
2. C
3. D
4. a) ja b); a) och b); a) and b): Kyllä/Ja/Yes. Esimerkiksi/Till exempel/For example:



c) Kaksi/Två/Two. Esimerkiksi/Till exempel/For example:



Ongelmanratkaisu | Tehtävä 2. Loppuosataulukko.
Esimerkkiratkaisut ja perustelut.

1. A
   Kussakin vaiheessa tehdään yksi tekstivertailu ja puolitetaan hakualue. 1000 voidaan puolittaa 9 tai 10 kertaa jonka jälkeen a ja l kohtaavat. Lopuksi tehdään vielä yksi tekstivertailu joka varmistaa löytyikö avain vai ei.

2. B
   Teksti vie n tavua tilaa ja kokonaislukutaulukko vie $8n$ tavua tilaa.

3. D
   Koska puolitushaun kutakin vaihetta varten tarvitaan 2 lukemista (yksi kokonaislukutaulukosta ja yksi tekstistä), voidaan sekunnissa tehdä 50 vaihetta. Tekstin pituus voi siten olla $2^{50} \approx 10^{15}$, eli selvästi enemmän kuin 10^{12}.

4. `[ 2 3 5 7 1 4 9 6 8 ]`

	loppuosataulukko	loppuosa
1	**2**	`aabacacc`
2	**3**	`abacacc`
3	**5**	`acacc`
4	**7**	`acc`
5	**1**	`baabacacc`
6	**4**	`bacacc`
7	**9**	`c`
8	**6**	`cacc`
9	**8**	`cc`

5. Alussa $a = 1$, $l = 13$

   - (1+13)/2 = 7. ”`babbacaca`” < ”`abbc`”: epätosi ⇒ $a = 1, l \leftarrow 7$
   - (1+7)/2 = 4. ”`abbacaca`” < ”`abbc`”: tosi ⇒ $a \leftarrow 5, l = 7$
   - (5+7)/2 = 6. ”`acaca`” < ”`abbc`”: epätosi ⇒ $a = 5, l \leftarrow 6$
   - (5+6)/2 = 5. ”`aca`” < ”`abbc`”: epätosi ⇒ $a = 5, l \leftarrow 5$
   - a ja l saavuttivat toisensa, tarkastetaan vielä kohdan 5 osoittama loppuosa:
     ”`aca`” ≠ ”`abbc`” ⇒ avainta ”`abbc`”ei löydy tekstistä.

	loppuosataulukko	loppuosa
1	**13**	`a`
2	**2**	`aabbabbacaca`
3	**3**	`abbabbacaca`
4	**6**	`abbacaca`
5	**11**	`aca`
6	**9**	`acaca`
7	**5**	`babbacaca`
8	**8**	`bacaca`
9	**4**	`bbabbacaca`
10	**7**	`bbacaca`
11	**12**	`ca`
12	**1**	`caabbabbacaca`
13	**10**	`caca`

Fysiikka | Tehtävä 1.

Fysik | Uppgift 1.

Physics | Question 1.

1. D.
2. B.
3. C.
4. Lasketaan ensin hiekkamäärän massa: $m_{hiekka} = \rho_{hiekka}V_{hiekka}$ = 1500 kg/m^3 * 71 m^3 = 106500 kg

   Hiekka pystyy luovuttamaan energiaa, kun se jäähtyy alkulämpötilasta 595 °C loppulämpötilaan 49 °C. Tällöin lämpötilan muutos on ΔT_{hiekka} = 595 °C – 49 °C = 546 °C.
   Luovutettu energiamäärä on $Q = c_{hiekka}m_{hiekka}\Delta T_{hiekka}$ = 48845160 kJ

   Edellä lasketun luovutetun energiamäärän sekä veden lämpötilamuutoksen (ΔT_{vesi} = 91 °C - 49 °C = 42 °C) saadaan laskettua veden massa: $m_{vesi} = Q / (c_{vesi}\ \Delta T_{vesi})$ = 277560,9 kg ≈ **280 000 kg**

   Veden tilavuudeksi saadaan tällöin $V_{vesi} = m_{vesi} / \rho_{vesi}$ ≈ 277560,9 kg / 1000 kg/m^3 = 277,5609 m^3 ≈ **280 m^3**
   Vastaukseksi hyväksytään joko veden massa tai veden tilavuus.

Beräknar först sandens massa: $m_{sand} = \rho_{sand}\ V_{sand}$ = 1500 kg/m^3 * 71 m^3 = 106500 kg

Sanden kan avge energi då den svalnar från initialtemperaturen 595 °C till temperaturen 49 °C. Temperaturförändringen är då ΔT_{sand} = 595 °C – 49 °C = 546 °C.
Mängden värme som avges är $Q = c_{sand}m_{sand}\Delta T_{sand}$ = 48845160 kJ

Med den ovan beräknade värmemängden, samt vattnets temperaturförändring (ΔT_{vatten} = 91 °C - 49 °C = 42 °C) kan man beräkna vattnets massa: $m_{vatten} = Q / (c_{vatten}\ \Delta T_{vatten})$ = 277560,9 kg ≈ **280 000 kg**

Vattnets volym är då: $V_{vatten} = m_{vatten} / \rho_{vatten}$ ≈ 277560,9 kg / 1000 kg/m3 = 277,5609 m^3 ≈ **280 m^3**

Som svar godkänns antingen massa eller volym.

First let's calculate the mass of the sand: $m_{sand} = \rho_{sand}V_{sand}$ = 1500 kg/m^3 * 71 m^3 = 106500 kg

The sand can release energy, when it cools from the initial temperature of 595 °C to the final temperature of 49 °C. The temperature difference is then ΔT_{sand} = 595 °C – 49 °C = 546 °C.
The amount of released energy is $Q = c_{sand}m_{sand}\Delta T_{sand}$ = 48845160 kJ

Using the previously calculated energy and the temperature difference (ΔT_{water} = 91 °C - 49 °C = 42 °C), we can calculate the mass of water: $m_{water} = Q / (c_{water}\ \Delta T_{water})$ = 277560,9 kg ≈ **280 000 kg**

The volume of water is $V_{water} = m_{water} / \rho_{water}$ ≈ 277560,9 kg / 1000 kg/m^3 = 277,5609 m^3 ≈ **280 m^3**
Either the water's mass or volume is accepted as an answer.

Fysiikka | Tehtävä 2.

Fysik | Uppgift 2.

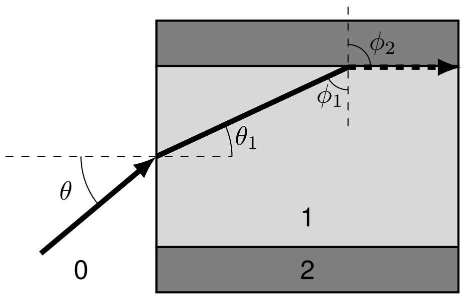
Physics | Question 2.

1. B.

2. C.

3. A.

4.



0=vesi/vatten/water: $n_0 = 1{,}33$
1=ydin/kärna/core: $n_1 = 1{,}50$
2=kuori/hölje/cladding: $n_2 = 1{,}46$

Haetaan ensin kokonaisheijastuksen rajakulma ytimen ja kuoren välillä. Tämä vastaa taittumisen tilannetta, jossa taitekulma kuoreen on $\phi_2 = 90°$. Tällöin ytimestä rajapintaan tulevan säteen kulma saadaan taittumislain avulla: $n_1 \sin\phi_1 = n_2 \sin\phi_2$. Tästä $\phi_1 = \sin^{-1}\left(\frac{n_2 \sin\phi_2}{n_1}\right) = 76{,}74°$. Tällöin vedestä kuituun taittuneen valon kulma on oltava $90° - \phi_1 = 13{,}26°$.

Kuidun ytimen ja veden rajapinnassa tapahtuu myös taittuminen. Tällöin tulokulma θ saadaan käyttäen uudestaan taittumislakia: $n_0 \sin\theta = n_1 \sin\theta_1$, josta saadaan $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_0}\right) = \underline{15{,}0°}$.

Jos kulma on tätä pienempi, niin taittumista kuidun ytimestä kuoreen ei tapahdu eli säde pysyy kuidun ytimen sisällä.

Vi tar först reda på den kritiska vinkeln för totalreflektion mellan kärnan och skalet. Detta motsvaras av en situation där brytningsvinkeln in i skalet är $\phi_2 = 90°$. I detta fall fås den inkommande strålens infallsvinkel från brytningslagen: $n_1 \sin\phi_1 = n_2 \sin\phi_2$. som ger $\phi_1 = \sin^{-1}\left(\frac{n_2 \sin\phi_2}{n_1}\right) = 76{,}74°$. Det betyder att vinkeln för strålen som träffat gränsytan mellan vatten och kärnan bör vara $90° - \phi_1 = 13{,}26°$.

Det sker också en brytning i gränsytan mellan vattnet och kärnan. Infallsvinkeln θ fås genom att man utnyttjar brytningslagen på nytt: $n_0 \sin\theta = n_1 \sin\theta_1$, ur vilken man får $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_0}\right) = \underline{15{,}0°}$.

Om vinkeln är mindre än så kan ingen brytning från kärnan till skalet ske, dvs. strålen hålls innanför kärnan.

First, we search for the angle of the total internal reflection between the core and the cladding. This corresponds to a situation where the angle of refraction into the cladding is $\phi_2 = 90°$. In this case, the angle of the incident ray can be obtained from the law of refraction: $n_1 \sin\phi_1 = n_2 \sin\phi_2$. We get $\phi_1 = \sin^{-1}\left(\frac{n_2 \sin\phi_2}{n_1}\right) = 76.74°$ This means that the angle of the ray entering the core is $90° - \phi_1 = 13.26°$.

There is a refraction also in the boundary between water and the core. The angle of incidence θ is obtained using the law of refraction again: $n_0 \sin\theta = n_1 \sin\theta_1$, resulting in $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_0}\right) = \underline{15.0°}$.

If the angle is smaller than this, there will not be refraction into the cladding, i.e., the ray stays inside the core.

Matematiikka | Tehtävä 1.

Matematik | Uppgift 1.

Mathematics | Question 1.

Mallivastaukset:

a) Yhtälön molemmat puolet on määritelty kun $x \neq \pm 1$. Tällöin $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x = 0$.

b) Tulon nollasäännön perusteella ratkaisut ovat $x = 2$ sekä $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$.

c) $f'(x) = e^{1-x}(-1) = -e^{1-x}$.

d) $\displaystyle\int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-1}x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$, missä C on vakio.

e) Kosinin jaksollisuuden perusteella yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $2\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$. Tämän toinen ratkaisu on vastakkaismerkkinen kulma $x = -\frac{\pi}{3}$ ja kaikki ratkaisut saadaan lisäämällä täyden ympyrän monikerrat: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

f) Todennäköisyys vähintään yhdelle voitolle on komplementaarinen sille, että ei saada yhtään voittoa. Näin ollen kysytty todennäköisyys on $1 - 0{,}99^{10} = 0{,}0956179\ldots$. Prosentteina ilmaistuna tämä on likimain $9{,}56\,\%$.

Modellsvar:

a) Ekvationens båda led är definierade när $x \neq \pm 1$. Då gäller att $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x = 0$.

b) Nollproduktmetoden ger lösningarna $x = 2$ och $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$.

c) $f'(x) = e^{1-x}(-1) = -e^{1-x}$.

d) $\displaystyle\int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-1}x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$, där C är konstant.

e) Ekvationen kan skrivas på formen $2\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$. Ekvationens andra lösning är $x = -\frac{\pi}{3}$ och cosinusfunktionens periodicitet ger de övriga lösningarna: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

f) Komplementhändelsen till åtminstone en vinst är att man inte får någon vinst. Sannolikheten för åtminstone en vinst kan sålunda beräknas med komplementet enligt: $1 - 0{,}99^{10} = 0{,}0956179\ldots$.
I procentform är sannoliheten ca $9{,}56\,\%$.

Model responses:

a) Both sides of the equation are defined if $x \neq \pm 1$. Then $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x = 0$.

b) By the zero-product property, the solutions are $x = 2$ and $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$.

c) $f'(x) = e^{1-x}(-1) = -e^{1-x}$.

d) $\int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-1}x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$, where C is a constant.

e) By the periodicity of cosine, we can derive $2\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$. Another solution to this is an angle of opposite sign, $x = -\frac{\pi}{3}$, and all solutions are obtained by adding the multiples of full circles: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

f) The probability of at least one win is complementary to the probability of no win. Thus, the requested probability is $1 - 0.99^{10} = 0.0956179\ldots$. Expressed as a percentage, this is approximately 9.56%.

Matematiikka | Tehtävä 2.

Matematik | Uppgift 2.

Mathematics | Question 2.

Mallivastaukset:

a) Jotta 10 litran tankissa olisi 1 % voiteluöljyä, pitää sen tilavuuden olla $\frac{10}{100}\,\mathrm{l} = 0{,}1\,\mathrm{l}$. Tankkaamalla x l 5-prosenttia voiteluöljyä sisältävää seosta saadaan $0{,}05x$ litraa öljyä ja yhtälöksi $0{,}05x = 0{,}1 \Leftrightarrow x = 2$.

Stinan tulee siis tankata 2 litraa 5-prosenttista seosta ja 8 litraa polttoainetta, jossa ei ole voiteluöljyä lainkaan.

b) Olkoon x 5-prosenttisen seoksen määrä seosta. Tällöin tankattu kokonaismäärä on $6 + x$ ja voiteluöljyn määrä $\frac{5}{100}x$. Täten yhtälöksi saadaan

$$\frac{\frac{5}{100}x}{6+x} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{5}{100}x = \frac{1}{100}(6+x) \Leftrightarrow 5x = 6 + x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Stinan tulee siis tankata vielä $1{,}5$ l 5-prosenttista seosta.

Modellsvar:

a) För att en 10 liters tank ska bestå av 1 % smörjolja, borde volymen för smörjoljan vara $\frac{10}{100}\,\mathrm{l} = 0{,}1\,\mathrm{l}$. Genom att tanka x liter av bränslet som innehåller 5-procent smörjmedel fås $0{,}05x$ liter smörjolja. Vi kan ställa upp ekvationen $0{,}05x = 0{,}1 \Leftrightarrow x = 2$. Stina borde m.a.o. tanka 2 liter av 5-procentiga bränslet och 8 liter av bränslet som inte innehåller någon olja.

b) Antag att x är mängden av 5-procentiga bränslet som finns i blandningen. Totala mängden som tankats är $6 + x$ och mängden smörjolja är $\frac{5}{100}x$. Vi får ekvationen

$$\frac{\frac{5}{100}x}{6+x} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{5}{100}x = \frac{1}{100}(6+x) \Leftrightarrow 5x = 6 + x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Stina borde tanka $1{,}5$ liter till av 5-procentiga bränslet.

Model responses:

a) To have 1% of lubricating oil in 10 liter tank, its volume has to be $\frac{10}{100}\,\mathrm{l} = 0{,}1\,\mathrm{l}$. By refuelling x l 5-percentage mixture we get $0.05x$ liters of lubricating oil, and equation $0.05x = 0.1 \Leftrightarrow x = 2$.

Stina hence needs to refuel 2 liters of 5-percentage mixture and 8 liters of fuel with no lubricating oil.

b) Let x be the amount of 5-percentage mixture. Hence the total volume refuelled is $6 + x$, and the amount of lubricating oil is $\frac{5}{100}x$. Hence we get.

$$\frac{\frac{5}{100}x}{6+x} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{5}{100}x = \frac{1}{100}(6+x) \Leftrightarrow 5x = 6 + x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} = 1.5.$$

Stina then needs to refuel another 1.5 l of 5-percentage mixture.

Matematiikka | Tehtävä 3.

Matematik | Uppgift 3.

Mathematics | Question 3.

Mallivastaukset:

a) Yhtälön kummatkin puolet on määritelty vain jos $x \geq 0$. Merkitään $f(x) = 2x^2 + a - \sqrt{x}$, jolloin kysymys palautuu funktion f nollakohtien määrään, kun $x \geq 0$, niitä pitää olla tasan yksi. Voidaan havaita, että $f(0) = a > 0$, ja jos $b > 1$, on $4b^3 > 1 \Rightarrow 4b^4 > b \Rightarrow 2b^2 > \sqrt{b}$ ja siksi $f(b) = 2b^2 + a - \sqrt{b} > 0$. Näin ollen funktion f ainoat mahdolliset nollakohdat ovat välillä $[0, 1]$.

$$f'(x) = 4x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \Leftrightarrow x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Koska funktion f derivaatalla on vain yksi nollakohta $\frac{1}{4}$, funktio saa negatiivisia arvoja vain jos $f(\frac{1}{4}) < 0$. Tällöin nollakohtia on kaksi. Jos $f(\frac{1}{4}) = 0$, on nollakohtia tasan 1.

Sijoittamalla $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{8} + a - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$ saadaan yhtälöstä $f(\frac{1}{4}) = 0$ ratkaisu $a = \frac{3}{8}$.

b) Olkoon a maalatun alueen x-koordinaatti maalin loppuessa. Maalatun alueen pinta-ala on

$$A = \int_{-6}^{a} \frac{1}{9}x^2\,dx = \Big/_{-6}^{a} \frac{1}{27}x^3 = \frac{1}{27}(a^3 - (-6)^3).$$

Tästä saadaan yhtälö

$$\frac{1}{27}(a^3 + 216) = 7 \Leftrightarrow a^3 = -27 \Leftrightarrow a = -3.$$

Maalatun alueen reuna on siis $-3 - (-6) = 3$ pituusyksikön päässä vasemmasta reunasta.

Modellsvar:

a) Ekvationens båda led är definierade ifall $x \geq 0$. Betecknar enligt $f(x) = 2x^2 + a - \sqrt{x}$, så är frågan ekvivalent med att visa att funktionen f har precis ett nollställe när $x \geq 0$. Vi kan observera att $f(0) = a > 0$, och ifall $b > 1$, är $4b^3 > 1 \Rightarrow 4b^4 > b \Rightarrow 2b^2 > \sqrt{b}$, varvid $f(b) = 2b^2 + a - \sqrt{b} > 0$. Därav finns funktionens, f, enda nollställen i intervallet $[0, 1]$.

$$f'(x) = 4x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Eftersom derivatan endast har ett nollställe, $\frac{1}{4}$, får funktionen negativa värden endast ifall $f(\frac{1}{4}) < 0$. Detta leder dock till att funktionen har två nollställen. Ifall $f(\frac{1}{4}) = 0$, har funktionen endast ett nollställe. Insättning ger $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{8} + a - \frac{1}{2} = a - \frac{3}{8}$, varefter ekvationen $f(\frac{1}{4}) = 0$ ger lösningen $a = \frac{3}{8}$.

b) Antag att a är det målade områdets x-kordinat där målfärgen tagit slut. Arean för det målade området är

$$A = \int_{-6}^{a} \frac{1}{9}x^2\,dx = \Big/_{-6}^{a} \frac{1}{27}x^3 = \frac{1}{27}(a^3 - (-6)^3).$$

Vi kan ställa upp ekvationen

$$\frac{1}{27}(a^3 + 216) = 7 \Leftrightarrow a^3 = -27 \Leftrightarrow a = -3.$$

Det målade områdets högra kant är $-3 - (-6) = 3$ längdenheter ifrån den vänstra kanten.

Model responses:

a) The both sides of the equation are defined only if $x \geq 0$. Denoting $f(x) = 2x^2 + a - \sqrt{x}$, the question reduces to the number of zeros of f, when $x \geq 0$, there has to be exactly one. We can observe that $f(0) = a > 0$, and if $b > 1$, also $4b^3 > 1 \Rightarrow 4b^4 > b \Rightarrow 2b^2 > \sqrt{b}$ and hence $f(b) = 2b^2 + a - \sqrt{b} > 0$. Hence the only possible zeros of f are in $[0, 1]$.

$$f'(x) = 4x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \Leftrightarrow x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Because the derivative of f has only one zero $\frac{1}{4}$, function has negative values only if $f(\frac{1}{4}) < 0$. In this case, there are two zeros. If $f(\frac{1}{4}) = 0$, there is exactly 1 zero.

By substituting, $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{8} + a - \frac{1}{2}$, and equation $f(\frac{1}{4}) = 0$ gives $a = \frac{3}{8}$.

b) Let a be the x-coordinate of the painted area when the paint runs out. The area of the painted region is

$$A = \int_{-6}^{a} \frac{1}{9}x^2\,dx = \Big/_{-6}^{a} \frac{1}{27}x^3 = \frac{1}{27}(a^3 - (-6)^3).$$

We get

$$\frac{1}{27}(a^3 + 216) = 7 \Leftrightarrow a^3 = -27 \Leftrightarrow a = -3.$$

The border of the painted region is hence $-3 - (-6) = 3$ units from the left edge.