Matematiikka | Tehtävä 1.

Perustele vastauksesi kaikissa tehtävissä.

a) Tuotteen hintaa lasketaan 10 % ja sen jälkeen korotetaan 10 %. Kuinka monta prosenttia hinta tämän jälkeen on alkuperäisestä? (1 p.)

b) Ratkaise yhtälö $3x^2 - 2x + 2 = 2(x^2 + 1)$. (1 p.)

c) Perustele, että yhtälö $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2$ on tosi kaikille reaaliluvuille a ja b. (1 p.)

d) Ratkaise yhtälö $|x-2| = 2x + 1$. (1 p.)

e) Ratkaise yhtälö $(2^x)^2 - 3 \cdot 4^{x-1} = 2$. (1 p.)

f) Perustele, onko välillä $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ mahdollista, että $\cos\alpha \sin\alpha > 0$? (1 p.)

Mallivastaukset:

a) Jos tuotteen hinta on aluksi x, on se muutosten jälkeen $1{,}1 \cdot 0{,}9x = 0{,}99x$, siis 99 % alkuperäisestä.

b)

$$\begin{aligned} & 3x^2 - 2x + 2 = 2(x^2+1) \\ \Leftrightarrow\ & 3x^2 - 2x + 2 = 2x^2 + 2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x(x-2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x \in \{0, 2\}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} & (a+b)^2 + (a-b)^2 \\ =\ & a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 \\ =\ & 2a^2 + 2b^2. \end{aligned}$$

d) Oletetaan ensin, että $x \geq 2$. Tällöin yhtälö saa muodon $x - 2 = 2x + 1 \Leftrightarrow -x = 3 \Leftrightarrow x = -3$. Tämä ei kuitenkaan toteuta ehtoa $x \geq 2$.

Oletetaan sitten, että $x < 2$. Tällöin yhtälö saa muodon $-x + 2 = 2x + 1 \Leftrightarrow -3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. Täten yhtälön ainoa ratkaisu on $x = \frac{1}{3}$.

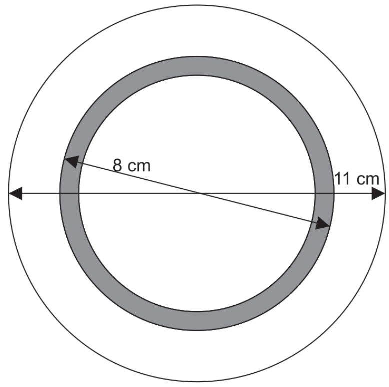
e)

$$\begin{aligned} & (2^x)^2 - 3 \cdot 4^{x-1} = 2 \\ \Leftrightarrow\ & 4^x - \frac{3}{4}4^x = 2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{4} \cdot 4^x = 2 \\ \Leftrightarrow\ & 4^x = 8 \\ \Leftrightarrow\ & 2^{2x} = 2^3 \\ \Leftrightarrow\ & 2x = 3 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

f) Kun $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, on välttämättä $\sin\alpha \geq 0$ ja $\cos\alpha \leq 0$, joten $\cos\alpha\sin\alpha > 0$ ei ole mahdollista.

Matematiikka | Tehtävä 2.

Maalarinteippi on paksuudeltaan 0,1 mm, ja sitä myydään rullassa halkaisijaltaan 8 cm olevan pahvirungon ympärille kierrettynä. Täyden rullan ulkohalkaisija on 11 cm.



a) Kuinka pitkä on pahvirungon ympärille kierretty 1. kierros? Entä kuinka pitkä on 2. kierros? Kunkin kierroksen pituus mitataan teipin ulkopinnasta. (2 p.)

b) Kuinka monta metriä teippiä on täydessä rullassa likimäärin? Voit olettaa, että jokainen kierros teippiä muodostaa täydellisen ympyrän. Perustele vastauksesi. (4 p.)

Mallivastaus 1:
Ensimmäisen kierroksen pituus on $\pi \cdot (80 + 0,2)$ (mm), toisen $\pi \cdot (80 + 0{,}4)$, kolmannen $\pi \cdot (80 + 0{,}6)$. Kierroksen n pituus puolestaan on $\pi(80 + n \cdot 0{,}2)$. Yhteispituudeksi saadaan

$$\pi(80n + 0{,}2(1 + 2 + \cdots + n)) = \pi n(80 + 0{,}1(n + 1)),$$

jolloin halkaisija on $80 + 0{,}2n$. Yhtälöstä $80 + 0{,}2n = 110$ saadaan kierrosten määräksi $n = 150$, jolloin yllä olevasta lausekkeesta saadaan teipin pituudeksi $\pi \cdot 150(80 + 0{,}1 \cdot 151) \approx 44814{,}8$ mm, siis vajaat 45 metriä.

Mallivastaus 2:
Olkoon teipin kokonaispituus ℓ. Suoraksi vedettynä teippi muodostaa sivulta katsottuna pitkän suorakulmion, jonka pinta-ala on $0{,}1 \cdot \ell$. Tämä pinta-ala on sama, kun teippi kääritään rullaksi, jonka sisähalkaisija on 80 mm ja ulkohalkaisija 110 mm, siis

$$\pi \cdot 55^2 - \pi \cdot 40^2 = 1425\pi.$$

Yhtälöstä $1425\pi = 0.1\ell$ saadaan $\ell \approx 44767,7$, siis vajaat 45 metriä.

Matematiikka | Tehtävä 3.

a) Osoita laskemalla, että funktio $f(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + e^x$ toteuttaa yhtälön $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = e^x$. Sekä A että B ovat vakioita, ja $f''(x)$ tarkoittaa funktion $f'(x)$ derivaattaa. (3 p.)

$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$.

b) Selvitä, mikä funktio $f(x)$ toteuttaa yhtälön $f(x) = 6x^2 + \int_0^2 f(x)\,dx$. (3 p.)

Mallivastaukset:

a) Käyttämällä tulon, yhdistetyn funktion ja eksponenttifunktion derivointisääntöjä saadaan

$$f'(x) = Ae^{2x} \cdot 2 + B(e^{2x} + xe^{2x} \cdot 2) + e^x$$

ja tästä edelleen

$$f''(x) = Ae^{2x} \cdot 4 + B(e^{2x} \cdot 2 + e^{2x} \cdot 2 + xe^{2x} \cdot 4) + e^x.$$

Väite voidaan osoittaa oikeaksi laskemalla summa

$$\begin{aligned}
& f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) \\
= \;& 4Ae^{2x} + 4Be^{2x} + 4Bxe^{2x} + e^x \\
- \;& 8Ae^{2x} - 4Be^{2x} - 8Bxe^{2x} - 4e^x \\
+ \;& 4Ae^{2x} + 4Bxe^{2x} + 4e^x \\
= \;& e^x
\end{aligned}$$

b) Merkitään $c = \int_0^2 f(x)\,dx$, jolloin $f(x) = 6x^2 + c$. Täten

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (6x^2 + c)\,dx = \Big/_0^2 (2x^3 + cx) = 2 \cdot 2^3 + 2c.$$

Yhtälöstä $6x^2 + c = 6x^2 + 16 + 2c$ saadaan $c = -16$.

Fysiikka | Tehtävä 1.

1) B.

2) A.

3) B.

4)

Kiekon B liike-energia törmäyksen jälkeen on $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,160\text{kg} \cdot (1,3\text{m/s})^2 = 0,1352\text{J}$.

Kiekon pysäyttää kitkavoima, jonka tekemä työ $W = -F_\mu \Delta s$.

Kitkavoiman suuruus $F_\mu = \mu N = \mu mg$.

Loppuvauhti on nolla. Työperiaatteen mukaan $\Delta K = W$, joten $0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\mu mg\Delta s$. Tästä saadaan ratkaistua kysytty matka:

$$\Delta s = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{(1,3\text{m/s})^2}{2 \cdot 0,050 \cdot 9,81\text{m/s}^2} = 1,7227\text{m} \approx 1,7\text{m}.$$

Tehtävän voi ratkaista myös Newtonin toiseen lakiin perustuen.

Fysiikka | Tehtävä 2.

1) C.

2) A.

3) D.

4)

Akkuun siirtynyt varaus saadaan integroimalla virtaa ($\Delta Q = \int I dt$), minkä voi tehdä graafisesti selvittämällä kuvasta 1 pinta-alan. Pinta-ala voidaan jakaa kahteen osaan: suorakulmioon ja laskevan käyrän alla olevan osaan. Yksittäinen kokonainen ruutu vastaa varausta $2\,\mathrm{A} \cdot 0,2\,\mathrm{h} = 0,4\,\mathrm{Ah}$.

Suorakulmiossa on ruutuja yhteensä 390 kpl, joten vakiovirtavaiheen aikana varausta siirtyy 156 Ah.

Laskevan käyrän kohdalla pinta-ala vastaa noin 75 ruutua (tarkemmin 74,7 kpl), mikä vastaa varausta 30 Ah.

Yhteensä akkuun siirtyneeksi varaukseksi tulee $156\mathrm{Ah} + 30\mathrm{Ah} = 186\mathrm{Ah}$.

Akkuun varastoituu täten energiaa $E = QU = 186\mathrm{Ah} \cdot 420\mathrm{V} = 78120\mathrm{Wh} = 78\mathrm{kWh}$.

Kemia │Tehtävä 1

Oikeat vastaukset

1. B

2. B

3. C

4.

Raudan ja kloorikaasun määrä alussa:

$$n(\mathrm{Fe, alussa}) = \frac{m}{M} = \frac{3{,}00\ \mathrm{g}}{55{,}85\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}} = 0{,}053715\ \mathrm{mol}$$

$$n(\mathrm{Cl_2, alussa}) = \frac{pV}{RT} = \frac{101325\ \mathrm{Pa}\ \cdot 0{,}01\ \mathrm{m^3}}{8{,}31451\ \frac{\mathrm{Pa \cdot m^3}}{\mathrm{mol \cdot K}} \cdot 295\ \mathrm{K}} = 0{,}41310\ \mathrm{mol}$$

Rauta ja kloorikaasu reagoivat seuraavan reaktioyhtälön mukaisesti: $2\ Fe + 3\ Cl_2 \rightarrow 2\ FeCl_3$

Reaktioyhtälöstä nähdään, että 2 mol Fe kuluttaa 3 mol Cl_2 eli

$$n(\mathrm{Cl_2, kulunut}) = \frac{3}{2} \cdot n(\mathrm{Fe, alussa}) = \frac{3}{2} \cdot 0{,}053715\ \mathrm{mol} = 0{,}08057\ \mathrm{mol}$$

Kloorikaasua jää jäljelle:

$$n(\mathrm{Cl_2, lopussa}) = 0{,}41310\ \mathrm{mol} - 0{,}08057\ \mathrm{mol} = 0{,}33253\ \mathrm{mol} \approx \mathbf{0{,}333\ mol}$$

Kloorikaasun paine reaktion lopussa

$$p(\mathrm{Cl_2, lopussa}) = \frac{nRT}{V} = \frac{0{,}33253\ \mathrm{mol}\ \cdot 8{,}31451 \frac{\mathrm{Pa \cdot m^3}}{\mathrm{mol \cdot K}} \cdot 325\ \mathrm{K}}{0{,}01\ \mathrm{m^3}} = 89856{,}68\ \mathrm{Pa} = \mathbf{89{,}9\ kPa}$$

Kemia │Tehtävä 2.

Oikeat vastaukset

1. A

2. C

3. D

4.

a)

Nestekromatografialaitteella analysoidun näytteen karbamatsepiinipitoisuus lasketaan kalibrointisuoran avulla:

$$\mathrm{x} = \frac{\mathrm{y} + 0{,}4682}{20{,}795} \Rightarrow \mathrm{x} = \frac{64{,}2 + 0{,}4682}{20{,}795} = 3{,}1098\ \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}}$$

Lasketaan konsentrointikerroin (1000 ml → 0,5 ml):

$$\frac{1000}{0{,}5} = 2000$$

Alkuperäisen jätevesinäytteen karbamatsepiinipitoisuus on siis:

$$\frac{3{,}1098\ \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}}}{2000} = 0{,}001555\ \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}} \approx 1{,}55\ \frac{\mathrm{\mu g}}{\mathrm{l}}$$

b)

Lasketaan karbamatsepiinin ($C_{15}H_{12}N_2O$) moolimassa:

$$M = (15 \cdot 12{,}01 + 12 \cdot 1{,}008 + 2 \cdot 14{,}01 + 16{,}00)\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} = 236{,}27\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$$

Lasketaan kuinka monta moolia yhdessä litrassa on karbamatsepiinia (kun pitoisuus on 0,021 mg/l):

$$n = \frac{m}{M} = \frac{0{,}021\ \mathrm{mg}}{236{,}27\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{mmol}}} = 8{,}888 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{mmol}$$

Lasketaan kuinka paljon puhdistamatonta jätevettä sisältää 1 mmol karbamatsepiinia:

$$V = \frac{1\ \mathrm{mmol}}{8{,}888 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{mmol}} \cdot 1\ \mathrm{l} = 11250{,}76\ \mathrm{l} \approx 11250\ \mathrm{l}$$

Ongelmanratkaisu | Tehtävä 1.

1. [1 p.] D.

2. [1 p.] D.

3. [1 p.] D.

4. [1 p.] Lehtisolmujen 1–4 työolot on määritelty intensiivisiksi. Lasketaan näiden lehtisolmujen osalta todennäköisyys, että työ keskeytyy usein. Todennäköisyys saadaan suhteuttamalla lehtisolmun usein-vastausten lukumäärä lehtisolmun kaikkien vastausten lukumäärään.

Lehtisolmu 1: $\frac{166}{15+62+166} = 0{,}68$.

Lehtisolmu 2: $\frac{51}{5+13+51} = 0{,}74$.

Lehtisolmu 3: $\frac{17}{1+4+17} = 0{,}77$.

Lehtisolmu 4: $\frac{35}{8+15+35} = 0{,}60$.

Todennäköisyys on suurin lehtisolmussa 3 eli kun tehtäviä on alle 14, tietojärjestelmiä on alle 13 ja kokouksia on vähintään 17.

5. [1 p.] Kun tehtäviä on korkeintaan 13, päädytään johonkin lehtisolmuista 2–7. Lasketaan näiden lehtisolmujen harvoin-vastausten lukumäärä ja suhteutetaan se samojen lehtisolmujen vastausten kokonaismäärään, joka saadaan kätevimmin vähentämällä kaikkien vastausten lukumäärästä (794) lehtisolmun 1 vastausten kokonaismäärä: $\frac{5+1+8+41+12+87}{794-15-62-166} = 0{,}28$. Eli todennäköisyys on 28 %.

6. [1 p.] Mikäli alkutilanteessa tehtävien määrä on alle 9, tietojärjestelmien määrä on alle 13, kokousten määrä on vähintään 4 mutta alle 17 ja kollegojen määrä on vähintään 11, ollaan lehtisolmussa 4, jossa on intensiiviset työolot.

Mikäli tehtävien määrä kasvaa vähintään 9:ään mutta pysyy alle 14:n, päädytään lehtisolmuun 6, jossa on rauhalliset työolot.

Ongelmanratkaisu | Tehtävä 2.

1. [1 p.] B.

2. [1 p.] A.

3. [1 p.] A.

4. [1 p.] Kaikilla negatiivisilla reaaliluvuilla.

5. [2 p.]

input0 – neuroni a: $w_0 = 0$
input1 – neuroni a: $w_1 = 10$
input2 – neuroni a: $w_2 = 0$
input0 – neuroni b: $w_0 = 50$
input1 – neuroni b: $w_1 = –10$
input2 – neuroni b: $w_2 = 0$
input0 – neuroni c: $w_0 = –2$
neuroni a – neuroni c: $w_1 = 2$
neuroni b – neuroni c: $w_2 = 2$.

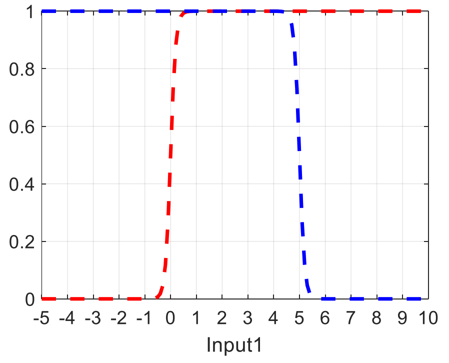
Lisätietona ratkaisun perustelua (ei vaadittu tehtävänannossa):

Funktio *u*(*t*) voidaan tavoittaa yhdistämällä kasvava sigmoidi ja laskeva sigmoidi (katso alla olevia kuvia 5.1 ja 5.2).

Syötteen input2 arvoa ei tiedetä, eikä se riipu *t*:stä, joten valitaan ensimmäisen kerroksen molempien neuronien w_2-parametrien arvoiksi 0.

Suunnitellaan kasvava sigmoidi, joka saa arvon 0,5 kohdassa input1 = 0 ja joka on lähellä minimiä (0) kohdassa input1 = –0,5 ja lähellä maksimia (1) kohdassa input1 = 0,5. Kuvan 2 (punainen pitkä katkoviiva) mukaisesti sopivat painokertoimet tällaisella sigmoidille ovat: $w_0 = 0$ ja $w_1 = 10$.

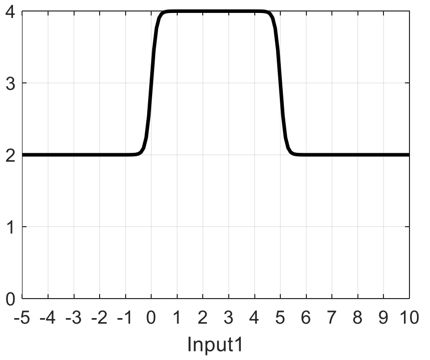
Suunnitellaan vähenevä sigmoidi, joka saa arvon 0,5 kohdassa input1 = 5 ja joka on lähellä maksimia kohdassa input1 = 4,5 ja lähellä minimiä kohdassa input1 = 5,5 ratkaisemalla ensin *x* yhtälöstä $\mathrm{output} = \frac{1}{1+e^{-x}} = 0{,}5$. Ratkaisuna saadaan *x* = 0. Jatketaan ratkaisemalla parametrien arvot yhtälöstä: $x = \mathrm{input0} \cdot w_0 + \mathrm{input1} \cdot w_1 + \mathrm{input2} \cdot w_2$. Sijoittamalla tunnetut arvot yhtälöön saadaan: $w_0 + 5 \cdot w_1 = 0$. Ratkaisuna saadaan: $w_0 = -5w_1$. Jotta saadaan vähenevä sigmoidi, täytyy w_1:n arvon olla negatiivinen. Kuvan 2 esimerkkejä soveltamalla saadaan sopivaksi arvoksi: $w_1 = –10$. Näin ollen $w_0 = -5w_1 = 50$.



Kuva 5.1. Alemman neuronikerroksen tulosteet Input1:n funktiona.

Ylemmän kerroksen lineaarinen neuroni laskee yllä suunniteltujen ja kuvassa 5.1 esitettyjen sigmoidien painotetun summan ja lisää tulokseen vakion w_0. Asetetaan alemman ja ylemmän kerroksen yhdistävien parametrien arvoiksi $w_1 = 2$ ja $w_2 = 2$, jolloin sigmoidi saadaan kasvamaan input1 = 0:n ympäristössä nollasta kakkoseen. Toinen sigmoidi saadaan puolestaan laskemaan input1 = 5:n ympäristössä kakkosesta nollaan.

Sigmoidien painotettu summa esitetään kuvassa 5.2. Asettamalla w0 = –2 saadaan neuroverkon ulostuloa siirrettyä pystysuuntaisesti alaspäin, jolloin tavoitetaan funktio u(t).



Kuva 5.2. Kasvavan ja vähenevän sigmoidin painotettu summa.