Matematiikka | Tehtävä 1.

Matematik | Uppgift 1.

Mathematics | Question 1.

Mallivastaus:

a) $\pi x + 3 = \sqrt{2} + 4x \Leftrightarrow (\pi - 4)x = \sqrt{2} - 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2} - 3}{\pi - 4}$.

b) $(x-2)(x-3) = 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 6 \Leftrightarrow x(x-5) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 5\}$.

c) Polynomin $x^2 - 4$ nollakohdat ovat ± 2. Toisen asteen kertoimen perusteella polynomin kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jolloin $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ tai $x > 2$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{4}(3n+2) = (3 \cdot 1 + 2) + (3 \cdot 2 + 2) + (3 \cdot 3 + 2) + (3 \cdot 4 + 2) = 38$.

e) $(\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}) \cdot (-3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}) = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = -7$.

f) Merkitään $x = \cos t$ ja $y = \sin t$. On etsittävä yksikköympyrältä $x^2 + y^2 = 1$ pisteet joille $x = y$. Sijoittamalla $y = x$ saadaan $2x^2 = 1$, josta $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Välillä $[0, 2\pi]$ näitä vastaavat kulmat $t \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$.

Modellsvar:

a) $\pi x + 3 = \sqrt{2} + 4x \Leftrightarrow (\pi - 4)x = \sqrt{2} - 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2} - 3}{\pi - 4}$.

b) $(x-2)(x-3) = 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 6 \Leftrightarrow x(x-5) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 5\}$.

c) Nollställena till polynomet $x^2 - 4$ är ± 2. Utgående från koefficienten för andra gradens termen är polynomets graf en parabel som öppnas uppåt, varvid $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ eller $x > 2$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{4}(3n+2) = (3 \cdot 1 + 2) + (3 \cdot 2 + 2) + (3 \cdot 3 + 2) + (3 \cdot 4 + 2) = 38$.

e) $(\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}) \cdot (-3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}) = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = -7$.

f) Vi betecknar $x = \cos t$ och $y = \sin t$. Då gäller det att hitta punkterna på enhetscirklen $x^2 + y^2 = 1$ för vilka $x = y$. Genom att insätta $y = x$ fås $2x^2 = 1$, varvid $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Inom intervallet $[0, 2\pi]$ är vinklarna som svarar mot dessa $t \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$.

Model response:

a) $\pi x + 3 = \sqrt{2} + 4x \Leftrightarrow (\pi - 4)x = \sqrt{2} - 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2} - 3}{\pi - 4}$.

b) $(x-2)(x-3) = 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 6 \Leftrightarrow x(x-5) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 5\}$.

c) The zeros of the polynomial $x^2 - 4$ are ± 2. Based on the quadratic coefficient, the graph of the polynomial is an upward opening parabola, hence $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ or $x > 2$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{4}(3n+2) = (3 \cdot 1 + 2) + (3 \cdot 2 + 2) + (3 \cdot 3 + 2) + (3 \cdot 4 + 2) = 38$.

e) $(\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}) \cdot (-3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}) = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = -7$.

f) Let $x = \cos t$ and $y = \sin t$. One should seek the unit circle $x^2 + y^2 = 1$ points satisfying $x = y$. Substitution $y = x$ gives $2x^2 = 1$, whence $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. In interval $[0, 2\pi]$ the corresponding angles are $t \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$.

Matematiikka | Tehtävä 2.

Matematik | Uppgift 2.

Mathematics | Question 2.

Mallivastaus:

a) Erinomaisen lomapäivän todennäköisyys saadaan tulosäännöllä: $0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,378$, prosentteina n. 38%.

Hyvän lomapäivän todennäköisyyttä laskettaessa huomataan, että tapaukset, joissa yksi ehto ei toteudu, mutta kaksi muuta toteutuvat ovat toisensa poissulkevat. Täten kokonaistodennäköisyys saadaan summana

$$0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,456,$$

prosentteina n. 46%.

b) Mallivastaus 1: Olkoon V rekan perävaunun tilavuus ja $V_K(t) = c_K t$ se tilavuus, jonka Kalle saa lastattua täyteen t minuutissa. Koska Kalle saa perävaunun täyteen 120 minuutissa, on $V = c_K \cdot 120$, siis $c_K = \frac{V}{120}$.

Olkoon lisäksi $V_T(t) = c_T t$ tilavuus, jonka Tomi saa lastattua t minuutissa. Koska Tomi ja Kalle yhteistyössä saavat kaksi perävaunua täyteen 144 minuutissa, on

$$V_K(144) + V_T(144) = 2V \Leftrightarrow \frac{V}{120} \cdot 144 + c_T \cdot 144 = 2V \Leftrightarrow c_T = \frac{V}{180}.$$

Näin ollen $V_T(t) = \frac{V}{180}t$, ja siis Tomi saa vaunun täyteen kun

$$V_T(t) = V \Leftrightarrow \frac{V}{180}t = V \Leftrightarrow t = 180.$$

Tomilta aikaa kuluisi siis 180 min = 3 h.

Mallivastaus 2: Kalle täyttää ensin oman rekkansa (120 minuuttia) ja siirtyy sitten auttamaan Tomia. Kun kokonaisaika on 144 min, niin Kalle käytti $24 = 144 - 120$ minuuttia Tomin rekan täyttämiseen. Toisaalta $\frac{24\,\text{min}}{120\,\text{min}} = \frac{1}{5}$ eli Kalle täytti $\frac{1}{5}$ Tomin rekasta ja Tomi $\frac{4}{5}$. Tomi käyttää siis $\frac{4}{5}$ rekan täyttämiseen 144 min, jolloin koko rekan täyttämiseen menee Tomilta $\frac{5}{4} \cdot 144\,\text{min} = 180\,\text{min} = 3$ h.

Modellsvar:

a) Sannolikheten för en utmärkt semesterdag fås ur produktregeln: $0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,378$, uttryckt i procentenheter ca. 38%.

Då man beräknar sannolikheten för en hyfsad semesterdag noterar man att händelser, då ett villkor inte uppfylls medan de två andra uppfylls, utesluter varandra. Därmed fås den totala sannolikhteten som summan

$$0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,456,$$

i procentenheter ca. 46%.

b) Modellsvar 1: Släpvagnens volym betecknas V och $V_K(t) = c_K t$ är den volym som Kalle fyller under tiden t minuter. Eftersom Kalle fyller sitt släp på 120 minuter är $V = c_K \cdot 120$, dvs. $c_K = \frac{V}{120}$.

Vidare betecknar $V_T(t) = c_T t$ volymen som Tomi fyller på t minuter. Eftersom Tomi och Kalle fyller två släp på 144 minuter är

$$V_K(144) + V_T(144) = 2V \Leftrightarrow \frac{V}{120} \cdot 144 + c_T \cdot 144 = 2V \Leftrightarrow c_T = \frac{V}{180}.$$

Därmed är $V_T(t) = \frac{V}{180}t$ och Tomi får således sitt släp fyllt då

$$V_T(t) = V \Leftrightarrow \frac{V}{180}t = V \Leftrightarrow t = 180.$$

För Tomi skulle det ta 180 min = 3 h.

Modellsvar 2: Kalle fyller först sin lastbil (120 minuter) och börjar sedan hjälpa Tomi. Eftersom totala tiden är 144 min så förbrukade Kalle $24 = 144 - 120$ minuter för att fylla Tomis släp. Å andra sidan är $\frac{24\,\text{min}}{120\,\text{min}} = \frac{1}{5}$ dvs. Kalle fyllde $\frac{1}{5}$ av Tomis släp och Tomi fyllde $\frac{4}{5}$. Tomi använder alltså 144 min för att fylla $\frac{4}{5}$ av lastbilens släp, varvid stuvandet av hela släpet tar $\frac{5}{4} \cdot 144\,\text{min} = 180$ min = 3 h för Tomi.

Model response:

a) The probability of an excellent day is given by the product rule: $0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.9 = 0.378$, as a percentage ca. 38%.

While calculating the probability of a good day, we notice that the cases where one condition is satisfied, but the others are not, are exclusive. Hence the total probability is obtained as a sum

$$0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.1 + 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.9 + 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.9 = 0.456,$$

as a percentage ca. 46%.

b) Model response 1: Let V be the truck volume and $V_K(t) = c_K t$ the volume Kalle can load in t minutes. Because Kalle can fully load the truck in 120 minutes, we have $V = c_K \cdot 120$, hence $c_K = \frac{V}{120}$.

Let also $V_T(t) = c_T t$ be the volume which Tomi can load in t minutes. Because Tomi and Kalle together can fully load two trucks in 144 minutes, we have

$$V_K(144) + V_T(144) = 2V \Leftrightarrow \frac{V}{120} \cdot 144 + c_T \cdot 144 = 2V \Leftrightarrow c_T = \frac{V}{180}.$$

Hence $V_T(t) = \frac{V}{180}t$, and Tomi can fully load the truck when

$$V_T(t) = V \Leftrightarrow \frac{V}{180}t = V \Leftrightarrow t = 180.$$

Tomi would hence spend 180 min = 3 h.

Model response 2: Kalle first fully loads his own truck (120 minutes) and then moves to assist Tomi. Since the total time is 144 min, Kalle spent $24 = 144 - 120$ minutes in assisting Tomi to load his truck.

On the other hand, $\frac{24\,\text{min}}{120\,\text{min}} = \frac{1}{5}$, meaning that Kalle loaded $\frac{1}{5}$ of Tomi's truck and Tomi loaded $\frac{4}{5}$. Hence Tomi spends 144 min to load $\frac{4}{5}$ of the truck, which means that to fully load the truck takes Tomi $\frac{5}{4} \cdot 144\,\text{min} = 180$ min = 3 h.

Matematiikka | Tehtävä 3.

Matematik | Uppgift 3.

Mathematics | Question 3.

Mallivastaukset:

a) $f(0) = 1 > 0$ ja $f(1) = \sin^2 1 - 2 + 1 = \sin^2 1 - 1 < 1 - 1 = 0$, joten funktion f jatkuvuuden perusteella välillä $[0, 1]$ on ainakin yksi nollakohta.

Koska $f'(x) = 2\sin x \cos x - 2 < 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 = 0$, on f aidosti vähenevä eikä nollakohtia siksi voi olla useampia. Päättelyssä on huomioitu että yhtäsuuruus $2\sin x \cos x = 2$ tulisi kyseeseen vain, jos jollekin x:n arvolle $\sin x = \cos x = 1$, mikä on mahdotonta.

b) Mallivastaus 1: Funktio $|x|$ on parillinen, joten

$$\int_{-2}^{-1} |x|\, dx = \int_{1}^{2} |x|\, dx.$$

Toisaalta funktio x^3 on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$, joten

$$\int_{-2}^{-1} x^3\, dx < 0 \qquad \text{ja} \qquad \int_{1}^{2} x^3\, dx > 0.$$

Voidaan siis päätellä, että jälkimmäinen integraali on suurempi.

Mallivastaus 2: Suoraan laskemalla saadaan

$$\int_{-2}^{-1} (|x| + x^3)\, dx = \int_{-2}^{-1} (-x + x^3)\, dx = \Big/_{-2}^{-1} (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4) = -\frac{9}{4}$$

ja

$$\int_{1}^{2} (|x| + x^3)\, dx = \int_{1}^{2} (x + x^3)\, dx = \Big/_{1}^{2} (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4) = \frac{21}{4},$$

joten jälkimmäinen integraali on suurempi.

Modellsvar:

a) $f(0) = 1 > 0$ och $f(1) = \sin^2 1 - 2 + 1 = \sin^2 1 - 1 < 1 - 1 = 0$. Pga att funktionen f är kontinuerlig finns det därmed minst ett nollställe inom intervallet $[0, 1]$.

Eftersom $f'(x) = 2\sin x \cos x - 2 < 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 = 0$, är f strikt avtaganade och därför kan det inte finnas fler nollställen. I resonemanget har man noterat att likheten $2\sin x \cos x = 2$ kan gälla bara ifall det för något x värde gäller att $\sin x = \cos x = 1$, vilket är omöjligt.

b) Modellsvar 1: Funktionen $|x|$ är jämn och således är

$$\int_{-2}^{-1} |x|\, dx = \int_{1}^{2} |x|\, dx.$$

Å andra sidan är funktionen x^3 negativ då $x < 0$ och positiv då $x > 0$, varmed

$$\int_{-2}^{-1} x^3\, dx < 0 \qquad \text{och} \qquad \int_{1}^{2} x^3\, dx > 0.$$

Vi kan alltså sluta oss till att den senare integralen är större.

Modellsvar 2: Genom en direkt beräkning fås

$$\int_{-2}^{-1}(|x|+x^3)\,dx = \int_{-2}^{-1}(-x+x^3)\,dx = \Big/_{-2}^{-1}(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4) = -\frac{9}{4}$$

och

$$\int_{1}^{2}(|x|+x^3)\,dx = \int_{1}^{2}(x+x^3)\,dx = \Big/_{1}^{2}(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4) = \frac{21}{4},$$

dvs. den senare integralen är större.

Model responses:

a) $f(0) = 1 > 0$ and $f(1) = \sin^2 1 - 2 + 1 = \sin^2 1 - 1 < 1 - 1 = 0$, and because of the continuity of function f, there is at least one zero in interval $[0, 1]$.

   Because $f'(x) = 2\sin x\cos x - 2 < 2\cdot 1\cdot 1 - 2 = 0$, f is strictly decreasing, and there cannot be more zeros. It has been noticed here that the equality $2\sin x\cos x = 2$ can hold only if $\sin x = \cos x = 1$ for some x, but this is impossible.

b) Model response 1: function $|x|$ is even. Hence

$$\int_{-2}^{-1}|x|\,dx = \int_{1}^{2}|x|\,dx.$$

   On the other hand, function x^3 is negative, when $x < 0$ and positive, when $x > 0$, so

$$\int_{-2}^{-1}x^3\,dx < 0 \qquad \text{ja} \qquad \int_{1}^{2}x^3\,dx > 0.$$

   We can hence conclude that the latter integral is greater.

   Model response 2: By directly calculating,

$$\int_{-2}^{-1}(|x|+x^3)\,dx = \int_{-2}^{-1}(-x+x^3)\,dx = \Big/_{-2}^{-1}(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4) = -\frac{9}{4}$$

   and

$$\int_{1}^{2}(|x|+x^3)\,dx = \int_{1}^{2}(x+x^3)\,dx = \Big/_{1}^{2}(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4) = \frac{21}{4},$$

   Hence the latter integral is greater.

Fysiikka | Tehtävä 1.

Fysik | Uppgift 1.

Physics | Question 1.

1. C.

2. B.

3. C.

4. Kansainvälinen avaruusasema on tasaisessa ympyräliikkeessä, jolloin sen vauhti *v* on vakio. Aseman kiihtyvyys $a = \frac{v^2}{r}$, kun *r* on sen etäisyys Maan keskipisteestä: $r = R_M + h$ = 6371 km + 420 km = 6791 km. Newtonin toisen lain mukaisesti Maan vetovoima aiheuttaa avaruusasemalle (massa *m*) keskeiskiihtyvyyden. Tällöin $F = ma = \frac{mv^2}{r}$. Tästä voidaan ratkaista ISS:n vauhti kiertoradalla: $v = \sqrt{\frac{rF}{m}}$.
   Voima *F* saadaan joko suoraan osakysymyksessä 1 esitetystä arvosta tai laskemalla se Newtonin gravitaatiolain avulla tehtävän alussa esitettyjen arvojen perusteella.

   Yhteen kierrokseen kuluva aika *T* saadaan, kun tunnetaan vauhti *v* ja kierroksen pituus: $s = 2\pi r$, sillä matka $s = vT$. Siten $T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{rF}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{rm}{F}}$
   Lukuarvojen sijoittaminen antaa tulokseksi 5600 s = 93 min.

ISS befinner sig i en likformig cirkelrörelse med konstant fart *v*. Rymdstationens acceleration är $a = \frac{v^2}{r}$, där *r* är avståndet till jordens medelpunkt: $r = R_J + h$ = 6371 km + 420 km = 6791 km. Enligt Newtons andra lag har ISS vars massa är *m* en centripetalacceleration som orsakas bara av tyngdkraften. Därför gäller $F = ma = \frac{mv^2}{r}$. Ur denna ekvation kan farten lösas ut: $v = \sqrt{\frac{rF}{m}}$.
Kraften F fås antingen direkt ur värdet som getts i delfråga 1 eller genom att beräkna den med Newtons gravitationslag och värdena som gavs i början av uppgiften.

Tiden *T* för ett varv fås då man känner till farten *v* och omloppsbanans längd: $s = 2\pi r$, eftersom $s = vT$. Därmed fås $T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{rF}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{rm}{F}}$
Då värden insätts ger uttrycket ovan 5600 s = 93 min.

The ISS is in uniform circular motion with constant speed *v*. The acceleration of the station is $a = \frac{v^2}{r}$, where *r* is the distance to the center of Earth: $r = R_E + h$ = 6371 km + 420 km = 6791 km.

According to Newton's second law the ISS with mass *m* has a centripetal acceleration caused only by the gravity. Hence, $F = ma = \frac{mv^2}{r}$. The speed of ISS can be obtained from the previous equation: $v = \sqrt{\frac{rF}{m}}$.
The force *F* can be obtained directly from sub-question 1, or it can be calculated from the values given in the question using Newton's law of gravitation.

The time *T* for one revolution can be obtained using speed *v* and the length of the orbit: $s = 2\pi r$, since $s = vT$. Thus $T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{rF}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{rm}{F}}$
Inserting the values to the above relation gives 5600 s = 93 min.

Fysiikka | Tehtävä 2.

Fysik | Uppgift 2.

Physics | Question 2.

1. C.

2. B.

3. B.

4. Ohmin lain mukaan vastuksen resistanssi *R* saadaan jännitteen ja virran suhteesta: *R = U/I.* Nyt *R*= 10,0 Ω, mikä vastaa jännite-virta-käyrän pistettä, jossa *U* = 27 V ja *I* = 2,7 A. Pisteen voi löytää joko haarukoimalla tai hahmottelemalla koordinaatistoon suoran *I = 1/R * U* ja etsimällä tämän suoran ja jännite-virta-käyrän leikkauspisteen. Teho saadaan näiden luettujen arvojen avulla:

$$P = U \cdot I = 27\ \mathrm{V} \cdot 2{,}7\ \mathrm{A} = 72{,}9\ \mathrm{W} \approx 73\ \mathrm{W}$$

Enligt Ohms lag fås resistansen *R* ur förhållandet mellan spänning och ström: *R = U/I.* Nu är *R*= 10,0 Ω, vilket i spännings-ström grafen motsvarar en punkt där *U* = 27 V och *I* = 2,7 A. Denna punkt kan hittas antingen genom gradvisa ”närmanden” eller genom att rita upp den räta linjen *I = 1/R * U* och finna dess skärningspunkt med spännings-ström kurvan. Effekten kan sedan beräknas genom insättning av de avlästa värdena:

$$P = U \cdot I = 27\mathrm{V} \cdot 2{,}7\mathrm{A} = 72{,}9\mathrm{W} \approx 73\mathrm{W}$$

According to Ohm’s law the resistance *R* is obtained from the voltage and current: *R = U/I.* Now *R*=10.0 Ω, which corresponds to a point in the voltage-current curve with values *U* = 27 V and *I* = 2.7 A. This point can be found either by pinpointing or by drawing a straight line in the graph with *I = 1/R * U* and finding the intersection of this line and the voltage-current curve. The power can be calculated using the obtained values:

$$P = U \cdot I = 27\ \mathrm{V} \cdot 2.7\ \mathrm{A} = 72.9\ \mathrm{W} \approx 73\ \mathrm{W}$$

Ongelmanratkaisu │Tehtävä 1.

Problemlösning │Fråga 1.

Problem Solving │Question 1.

1. A. Bensiini, koska autokanta uusiutuu niin hitaasti. Vaikka jatkossa kaikki uudet autot olisivat vaihtoehtoisilla käyttövoimilla, niin silti koko autokannassa olisi enemmän bensa-autoja.

1. A. Bensin, eftersom personbilsbeståndet förnyas så långsamt. Även om alla nya bilar skulle använda alternativa drivkrafter skulle det fortfarande finnas mest bensindrivna bilar i bilparken.

1. A. Gasoline, because the car fleet renews so slowly. Even if all new cars would be using alternative driving powers, there would still be more gasoline cars in the car fleet.

2. A. Bensiini. Tehtävän 1 perustelun lisäksi: vaikka bensiinin tuotanto olisi päästötöntä, niin bensiiniautot aiheuttaisivat silti eniten CO_2-päästöjä.

2. A. Bensin. Fortsättning till resonemanget för fråga 1: även om bensinproduktionen var utsläppsfri skulle bensinbilar fortfarande orsaka de flesta CO_2-utsläppen.

2. A. Gasoline. In addition to reasoning for question 1: even if gasoline production were emission-free, gasoline cars would still cause most CO_2 emissions.

3. C. Käyttövoimaveron osuus vuotuisista ajokustannuksista

$$= \frac{19 \cdot 0{,}015\ €/\mathrm{pv} \cdot 365\ \mathrm{pv}}{(19 \cdot 0{,}015\ €/\mathrm{pv} \cdot 365\ \mathrm{pv} + 0{,}242\ €/\mathrm{kWh} \cdot 0{,}168\ \mathrm{kWh/km} \cdot 5000\ \mathrm{km})} \cdot 100\ \% \approx 33{,}9\ \%$$

3. C. Drivkraftsskatten i förhållande till de årliga körkostnaderna:

$$= \frac{19 \cdot 0.015\ €/\mathrm{d} \cdot 365\ \mathrm{d}}{(19 \cdot 0.015\ €/\mathrm{d} \cdot 365\ \mathrm{d} + 0.242\ €/\mathrm{kWh} \cdot 0.168\ \mathrm{kWh/100\ km} \cdot 5000\ \mathrm{km})} \cdot 100\ \% \approx 33.9\ \%$$

3. C. The proportion of the tax on driving power of the annual driving costs:

$$= \frac{19 \cdot 0.015\ €/\mathrm{d} \cdot 365\ \mathrm{d}}{(19 \cdot 0.015\ €/\mathrm{d} \cdot 365\ \mathrm{d} + 0.242\ €/\mathrm{kWh} \cdot 0.168\ \mathrm{kWh/100\ km} \cdot 5000\ \mathrm{km})} \cdot 100\ \% \approx 33.9\ \%$$

4. Tehtävän voi ratkaista esimerkiksi näin:

$$20 \cdot 0{,}031\ €/\mathrm{pv} \cdot 365\ \mathrm{pv} + 2{,}49\ €/\mathrm{kg} \cdot 0{,}039\ \mathrm{kg/km} \cdot x\ \mathrm{km} \leq 2{,}35 \cdot 0{,}053\ €/\mathrm{km} \cdot x\ \mathrm{km}$$

josta voidaan ratkaista:

$$x\ \mathrm{km} \geq (226{,}30\ € \ /\ 0{,}02744\ €/\mathrm{km}) \approx 8247\ \mathrm{km}$$

4. Till exempel kan problemet lösas så här:

$$20 \cdot 0.031\ €/\mathrm{d} \cdot 365\ \mathrm{d} + 2.49\ €/\mathrm{kg} \cdot 0.039\ \mathrm{kg/km} \cdot x\ \mathrm{km} \le 2.35 \cdot 0.053\ €/\mathrm{km} \cdot x\ \mathrm{km}$$

så:

$$x\ \mathrm{km} \ge (226.30\ € / 0.02744\ €/\mathrm{km}) \approx 8247\ \mathrm{km}$$

4. For example, the problem can be solved like this:

$$20 \cdot 0.031\ €/\mathrm{d} \cdot 365\ \mathrm{d} + 2.49\ €/\mathrm{kg} \cdot 0.039\ \mathrm{kg/km} \cdot x\ \mathrm{km} \le 2.35 \cdot 0.053\ €/\mathrm{km} \cdot x\ \mathrm{km}$$

so:

$$x\ \mathrm{km} \ge (226.30\ € / 0.02744\ €/\mathrm{km}) \approx 8247\ \mathrm{km}$$

5. Teslalla ajettavien vuosien määrä saadaan autojen hankintahintojen erotuksen ja vuotuisten ajokustannusten erotuksen suhteesta:

$$\frac{(50\,000 - 30\,000)\ €}{\left(\underbrace{2{,}35\ €/\mathrm{l} \cdot 0{,}053\ \mathrm{l/km} \cdot 200\ \mathrm{km/vk} \cdot 52\ \mathrm{vk/v}}_{\text{Volkswagenin vuotuiset ajokustannukset}} - \left(\underbrace{22 \cdot 0{,}015\ €/\mathrm{pv} \cdot 365\ \mathrm{pv/v}}_{\text{Teslan käyttövoimavero vuodessa}} + \underbrace{0{,}168\ \mathrm{kWh/km} \cdot 200\ \mathrm{km/vk} \cdot 52\ \mathrm{vk/v} \cdot 0{,}242\ €/\mathrm{kWh}}_{\text{Teslan sähkönkulutuksen hinta vuodessa}}\right)\right)}$$

≈ 27 vuotta

5. Antalet år en Tesla måste köras är förhållandet av skillnaden mellan inköpspriset för bilarna och skillnaden mellan de årliga körkostnaderna:

$$\frac{(50\,000 - 30\,000)\ €}{\left(\underbrace{2.35\ €/\mathrm{l} \cdot 0.053\ \mathrm{l/km} \cdot 200\ \mathrm{km/v} \cdot 52\ \mathrm{v/år}}_{\text{Årlig körkostnad för Volkswagen}} - \left(\underbrace{22 \cdot 0.015\ €/\mathrm{d} \cdot 365\ \mathrm{d/år}}_{\text{Årlig drivkraftsskatt för Tesla}} + \underbrace{0.168\ \mathrm{kWh/km} \cdot 200\ \mathrm{km/v} \cdot 52\ \mathrm{v/år} \cdot 0.242\ €/\mathrm{kWh}}_{\text{Årlig elkostnad för Tesla}}\right)\right)}$$

≈ 27 år

5. The number of years a Tesla must be driven is the ratio of the difference between the purchase price of the cars and the difference between the annual driving costs:

$$\frac{(50\,000 - 30\,000)\ €}{\left(\underbrace{2.35\ €/\mathrm{l} \cdot 0.053\ \mathrm{l/km} \cdot 200\ \mathrm{km/wk} \cdot 52\ \mathrm{wk/yr}}_{\text{Volkswagen's annual driving costs}} - \left(\underbrace{22 \cdot 0.015\ €/\mathrm{d} \cdot 365\ \mathrm{d/yr}}_{\text{Tesla's annual tax on driving power}} + \underbrace{0.168\ \mathrm{kWh/km} \cdot 200\ \mathrm{km/wk} \cdot 52\ \mathrm{vk/yr} \cdot 0.242\ €/\mathrm{kWh}}_{\text{The cost of Tesla's electricity consumption per year}}\right)\right)}$$

≈ 27 years

Ongelmanratkaisu | Tehtävä 2.

Problemlösning | Fråga 2.

Problem Solving | Question 2.

1. A ja D.

1. A och D.

1. A and D.

2. D.

3.

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

4.

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

5. Vastaukseksi kelpaa esimerkiksi, että $2 \cdot (1 + 1) = (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1)$ ei päde. Lukujen 2, 1 ja 1 tilalla saa olla mikä tahansa seuraavista kolmikoista:

5. Svaret är att till exempel $2 \cdot (1 + 1) = (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1)$ gäller inte. I stället för 2, 1 och 1 kan man ha:

5. An example of a correct answer is that $2 \cdot (1 + 1) = (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1)$ does not hold. Instead of 2, 1 and 1, any of these triples applies:

2 1 1	2 2 1	2 2 3	2 3 3	3 1 3	3 2 3	3 3 2
2 1 2	2 2 2	2 3 2	3 1 1	3 2 2	3 3 1	3 3 3

6. D 1 piste, E 0,5 pistettä.

6. D 1 poäng, E 0.5 poäng.

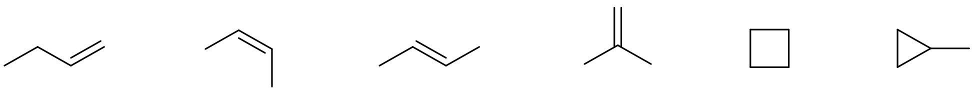
6. D 1 point, E 0.5 points.

Kemia │Tehtävä 1.

Kemi │Uppgift 1.

Chemistry │Question 1.

1. D
2. B
3. D
4.



Kemia │Tehtävä 2.

Kemi │Uppgift 2.

Chemistry │Question 2.

1. B
2. A
3. C
4.

Litiumkarbonaattisaostuman ainemäärä:

$$n(\mathrm{Li_2CO_3}) = \frac{m(\mathrm{Li_2CO_3})}{M(\mathrm{Li_2CO_3})} = \frac{7{,}54\ \mathrm{g}}{73{,}89\ \mathrm{g/mol}} = 0{,}1020\ \mathrm{mol}$$

Litiumin ainemäärä saostumassa:

$$n(\mathrm{Li, saostuma}) = 2 \cdot n(\mathrm{Li_2CO_3}) = 0{,}02041\ \mathrm{mol}$$

Litiumista saatiin talteen 96 % eli litiumin ainemäärä näytteessä:

$$n(\mathrm{Li, näyte}) = \frac{0{,}2041\ \mathrm{mol}}{0{,}96} = 0{,}2126\ \mathrm{mol}$$

Litiumkobolttioksidin ainemäärä ja massa näytteessä:

$$n(\mathrm{LiCoO_2}) = n(\mathrm{Li}) = 0{,}2126\ \mathrm{mol}$$

$$m(\mathrm{LiCoO_2}) = n(\mathrm{LiCoO_2}) \cdot M(\mathrm{LiCoO_2}) = 0{,}2126\ \mathrm{mol} \cdot 97{,}87\ \mathrm{g/mol} = 20{,}8\ \mathrm{g}$$

Substansmängden för litiumkarbonatfällningen:

$$n(\mathrm{Li_2CO_3}) = \frac{m(\mathrm{Li_2CO_3})}{M(\mathrm{Li_2CO_3})} = \frac{7{,}54\ \mathrm{g}}{73{,}89\ \mathrm{g/mol}} = 0{,}1020\ \mathrm{mol}$$

Substansmängden för litium i fällningen:

$$n(\mathrm{Li, fällningen}) = 2 \cdot n(\mathrm{Li_2CO_3}) = 0{,}02041\ \mathrm{mol}$$

---

96 % av litium kunde återvinnas, dvs. substansmängden för litium i provet var:

$$n(\mathrm{Li, näyte}) = \frac{0{,}2041\ \mathrm{mol}}{0{,}96} = 0{,}2126\ \mathrm{mol}$$

Substansmängden och massan för litiumkoboltoxid i provet:

$$n(\mathrm{LiCoO_2}) = n(\mathrm{Li}) = 0{,}2126\ \mathrm{mol}$$

$$m(\mathrm{LiCoO_2}) = n(\mathrm{LiCoO_2}) \cdot M(\mathrm{LiCoO_2}) = 0{,}2126\ \mathrm{mol} \cdot 97{,}87\ \mathrm{g/mol} = 20{,}8\ \mathrm{g}$$

The amount of substance of lithium carbonate precipitate:

$$n(\mathrm{Li_2CO_3}) = \frac{m(\mathrm{Li_2CO_3})}{M(\mathrm{Li_2CO_3})} = \frac{7{,}54\ \mathrm{g}}{73{,}89\ \mathrm{g/mol}} = 0{,}1020\ \mathrm{mol}$$

The amount of substance of lithium in the precipitate:

$$n(\mathrm{Li, precipitate}) = 2 \cdot n(\mathrm{Li_2CO_3}) = 0{,}02041\ \mathrm{mol}$$

96% of lithium could be recovered, thus the amount of substance of lithium in the sample was:

$$n(\mathrm{Li, sample}) = \frac{0{,}2041\ \mathrm{mol}}{0{,}96} = 0{,}2126\ \mathrm{mol}$$

Amount of substance and mass of lithium cobalt oxide in the sample:

$$n(\mathrm{LiCoO_2}) = n(\mathrm{Li}) = 0{,}2126\ \mathrm{mol}$$

$$m(\mathrm{LiCoO_2}) = n(\mathrm{LiCoO_2}) \cdot M(\mathrm{LiCoO_2}) = 0{,}2126\ \mathrm{mol} \cdot 97{,}87\ \mathrm{g/mol} = 20{,}8\ \mathrm{g}$$