

Matematiikka

PITKÄ

60 % pk-seudun

lukiolaisista
opiskelee Mafynetillä
yo-kirjoituksiin



70 %

lääketieteen

valintakoeväylän
paikoista mafylaisille
keväällä 2026

Suomen

**kattavimmat
malliratkaisut**

Opiskelijoiden ja
opettajien käyttöön

Malliratkaisut

SYKSY
2026



Mafy – oppimisen asialla jo vuodesta 2010

**Mafynetti-
oppimissovellus**

**Valmennuskurssit ja
oppimateriaalit**

Valintakokeet A, B, C ja F

Ylioppilaskirjoitukset

A-englanti
Biologia
Fysiikka
Historia
Kemia

Maantiede
Matematiikka
Psykologia
Yhteiskuntaoppi
Äidinkieli

Käyttöehdot

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafy.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on **kielletty**.

Lukion opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukion kurseillasi.

Nämä mallivastaukset ovat Mafy Oy:n omaisuutta.

Mallivastaukset laatii Mafyn oppimateriaaliitiimi

Tiimi kehittää lukion
oppimateriaaleja.

Mallivastausten
tekemiseen
osallistuivat:

Jaakko **Alasuvanto**
Sakke **Suomalainen**
Lassi **Vienonen**
Matti **Virolainen**

Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	4
Ratkaisu tehtävään 3	7
Ratkaisu tehtävään 4	10
Ratkaisu tehtävään 5	12
Ratkaisu tehtävään 6	14
Ratkaisu tehtävään 7	18
Ratkaisu tehtävään 8	22
Ratkaisu tehtävään 9	24
Ratkaisu tehtävään 10	27
Ratkaisu tehtävään 11	30
Ratkaisu tehtävään 12	36
Ratkaisu tehtävään 13	39

Malliratkaisut päivitetty 28. syyskuuta 2026 klo 16:47.

1. Karhujen huviretki (12 p.)

Karhujen huviretkelle osallistui 30 teddykarhua, 16 jääkarhua, 21 pesukarhua, 6 verokarhua ja 2 tiekarhua. Anna vastaukset seuraaviin kysymyksiin pyöristettynä prosenttiyksikön tai karhun tarkkuuteen.

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Jokaisen osatehtävän vastaus on kokonaisluku.

1.1 Kuinka monta prosenttia osallistujista oli pesukarhuja? (2 p.)

 %

1.2 Retken osallistujista 32 % söi retkellä karhunvatukoita. Kuinka moni söi karhunvatukoita? (2 p.)

 karhua

1.3 Kuinka monta prosenttia enemmän jääkarhuja oli kuin verokarhuja? (2 p.)

 %

1.4 Kuinka monta prosenttia vähemmän verokarhuja oli kuin jääkarhuja? (2 p.)

 %

1.5 Teddykarhuja oli ilmoittautunut alun perin enemmän, mutta 14 % ilmoittautuneista ei saapunut paikalle. Kuinka monta teddykarhua oli ilmoittautunut retkelle? (2 p.)

 teddykarhua

1.6 Karhut ostivat evääksi nallekarkkeja, joiden veroton hinta oli 12 otsoa ja arvonlisäverollinen hinta 15 otsoa. Kuinka suuri on nallekarkkien arvonlisäveroprosentti karhumaailmassa? (2 p.)

 %**Ratkaisu:**

Retken osallistujien kokonaismäärä on

$$n = 30 + 16 + 21 + 6 + 2 = 75.$$

1.1 28 2 p. (yht. 2 p.)

Pesukarhujen osuus osallistujista on

$$\frac{21}{75} = 0,28 = 28\%.$$

1.2 24 2 p. (yht. 2 p.)

Karhunvatukoita syöneitä oli

$$0,32 \cdot 75 = 24.$$

1.3 167 2 p. (yht. 2 p.)

Vertailuarvona on verokarhujen määrä 6:

$$\frac{16 - 6}{6} = 1,666 \dots \approx 167\%.$$

1.4 63 2 p. (yht. 2 p.)

Vertailuarvona on nyt jääkarhujen määrä 16:

$$\frac{16 - 6}{16} = 0,625 = 62,5\% \approx 63\%.$$

1.5 35 2 p. (yht. 2 p.)Paikalle saapui $100\% - 14\% = 86\%$ ilmoittautuneista. Merkitään ilmoittautuneiden määrää kirjaimella x :

$$0,86x = 30 \quad || : 0,86$$

$$x = \frac{30}{0,86} = 34,88 \dots \approx 35.$$

1.6 25 2 p. (yht. 2 p.)

Arvonlisävero lasketaan verottomasta hinnasta:

$$\frac{15 - 12}{12} = 0,25 = 25\%.$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

2. Derivaattoja ja integraaleja (12 p.)

Anna tässä tehtävässä pelkkä vastaus ilman perusteluja. Kirjoita vastauskenttiin derivaattojen ja integraalifunktioiden oikeat kertoimet, jotka ovat kokonaislukuja. Vastauksissa voi esiintyä myös nollia tai negatiivisia lukuja.

2.1 $D(3x^2 - 7x + 4) = ax^2 + bx + c$ (3 p.)

2.1.1 Kirjoita oikea kerroin vastauskenttään. (1 p.)

$$a = \boxed{}$$

2.1.2 Kirjoita oikea kerroin vastauskenttään. (1 p.)

$$b = \boxed{}$$

2.1.3 Kirjoita oikea kerroin vastauskenttään. (1 p.)

$$c = \boxed{}$$

2.2 $D(7 \sin(3x)) = d \cos x + f \sin(3x) + g \cos(3x)$ (3 p.)

2.2.1 Kirjoita oikea kerroin vastauskenttään. (1 p.)

$$d = \boxed{}$$

2.2.2 Kirjoita oikea kerroin vastauskenttään. (1 p.)

$$f = \boxed{}$$

2.2.3 Kirjoita oikea kerroin vastauskenttään. (1 p.)

$$g = \boxed{}$$

2.3 $\int (12x^2 + 8x - 4) dx = hx^3 + jx^2 + kx + C$ (3 p.)

2.3.1 Kirjoita oikea kerroin vastauskenttään. (1 p.)

$$h = \boxed{}$$

2.3.2 Kirjoita oikea kerroin vastauskenttään. (1 p.)

$$j = \boxed{}$$

2.3.3 Kirjoita oikea kerroin vastauskenttään. (1 p.)

$$k = \boxed{}$$

$$2.4 \quad \int 12 \sin(2x) dx = p \cos(x^2) + q \sin(x^2) + r \cos(2x) + C \quad (3 \text{ p.})$$

2.4.1 Kirjoita oikea kerroin vastauskenttään. (1 p.)

$$p = \boxed{}$$

2.4.2 Kirjoita oikea kerroin vastauskenttään. (1 p.)

$$q = \boxed{}$$

2.4.3 Kirjoita oikea kerroin vastauskenttään. (1 p.)

$$r = \boxed{}$$

Ratkaisu:

2.1 Derivoidaan termeittäin:

$$\begin{aligned} D(3x^2 - 7x + 4) &= 3 \cdot 2x - 7 + 0 = 6x - 7 \\ &= 0 \cdot x^2 + 6x + (-7) \end{aligned}$$

Vastaukset:

$$a = 0 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

$$b = 6 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

$$c = -7 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

2.2 Derivoidaan yhdistetyn funktion derivoimissäännöllä:

$$\begin{aligned} D(7 \sin(3x)) &= 7 \cos(3x) \cdot 3 = 21 \cos(3x) \\ &= 0 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin(3x) + 21 \cos(3x) \end{aligned}$$

Vastaukset:

$$d = 0 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

$$e = 0 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

$$f = 21 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

2.3 Integroidaan termeittäin:

$$\begin{aligned}\int (12x^2 + 8x - 4) dx &= 12 \cdot \frac{x^3}{3} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} - 4x + C \\ &= 4x^3 + 4x^2 - 4x + C\end{aligned}$$

Vastaukset:

$$h = 4 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

$$j = 4 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

$$k = -4 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

2.4 Koska $D(\cos(2x)) = -2 \sin(2x)$, saadaan

$$\begin{aligned}\int 12 \sin(2x) dx &= -6 \int -2 \sin(2x) dx \\ &= -6 \cdot \cos(2x) + C \\ &= 0 \cdot \cos(x^2) + 0 \cdot \sin(x^2) + (-6) \cos(2x) + C\end{aligned}$$

Vastaukset:

$$p = 0 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

$$q = 0 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

$$r = -6 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

3. Yhtälöitä ja sievennyksiä (12 p.)

Kirjoita osatehtävien 3.1 ja 3.2 vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset lukui-
na ilman välivaiheita ja perusteluja. Tehtävässä ei saa käyttää kuvakaappauksia eikä
kaavaeditoria.

3.1 Täydennä virke. (3 p.)

Yhtälön

$$\frac{8x - 49}{x - 6} = x$$

ratkaisu on $x = \boxed{}$.

3.2 Täydennä virke. (3 p.)

Yhtälöparilla

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ ax + 4y = 9 \end{cases}$$

ei ole ratkaisua, kun $a = \boxed{}$.

3.3 Kokonaisluvut a, b, c ja d toteuttavat yhtälön $ad - bc = 1$. Sievennä lauseke

$$(ac + bd)^2 - (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Esitä ratkaisusi tiiviisti siten, että se sisältää vain kaksi tai kolme olennaista väli-
vaihetta ja sievennetyn vastauksen. (6 p.)

Ratkaisu:**3.1 7.** 3 p. (yht. 3 p.)

Lisäselitys: Yhtälö on määritelty, kun $x \neq 6$. Kerrotaan yhtälö puolittain nimittä-
jällä $x - 6$.

$$\frac{8x - 49}{x - 6} = x \quad || \cdot (x - 6)$$

$$8x - 49 = x(x - 6)$$

$$8x - 49 = x^2 - 6x$$

$$x^2 - 14x + 49 = 0$$

$$(x - 7)^2 = 0$$

$$x - 7 = 0$$

$$x = 7$$

Yhtälön $x^2 - 14x + 49 = 0$ voi ratkaista myös toisen asteen ratkaisukaavalla:

$$x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 49}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = \frac{14}{2}$$

$$x = 7$$

3.2 2. 3 p. (yht. 3 p.)

Lisäselitys:

$$x + 2y = 3$$

$$ax + 4y = 9$$

Kerrotaan ylempi yhtälö puolittain luvulla 2 ja vähennetään se alemmasta yhtälöstä:

$$ax + 4y - (2x + 4y) = 9 - 6$$

$$ax - 2x + 4y - 4y = 3$$

$$(a - 2)x = 3$$

Kun $a \neq 2$, saadaan $x = \frac{3}{a-2}$, ja yhtälöparilla on ratkaisu. Kun $a = 2$, yhtälö saa muodon $0 = 3$, joka ei toteudu millään x :n arvolla. Tällöin yhtälöparilla ei siis ole ratkaisua.

3.3 Kerrotaan sulut auki.

$$\begin{aligned} & (ac + bd)^2 - (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ &= a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 - (a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2) \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)} \\ &= a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 - a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 - b^2d^2 \\ &= -(a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2) \\ &= -((ad)^2 - 2(ad)(bc) + (bc)^2) \\ &= -(ad - bc)^2 \quad \text{2 p. (yht. 4 p.)} \\ &= -(1)^2 \\ &= -1 \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)} \end{aligned}$$

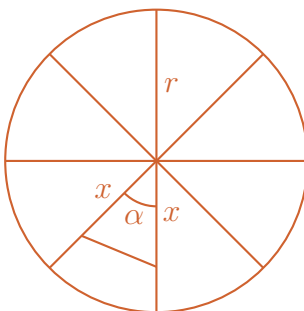
Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

4. Paloittelua (12 p.)

Pyöreä pizza, jonka halkaisija on 32 cm, on jaettu kahdeksaan yhtäsuureen sektoriin, kuten oheisessa kuvassa. Opiskelija jakaa yhden sektorin suoralla viillolla kahteen pinta-alaltaan yhtäsuureen osaan. Toinen osa on tasakylkinen kolmio, jonka huippukulma on sektorin kärjessä. Määritä kolmion kyljen pituus.

**Ratkaisu:**

Lisäselityskuva:



$$d = 32$$

$$r = \frac{d}{2} = 16$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

Yhden sektorin pinta-ala on

$$A_{\text{sektori}} = \frac{1}{8}\pi r^2 = \frac{1}{8}\pi \cdot 16^2 = 32\pi, \quad \text{2 p. (yht. 3 p.)}$$

joten halutun palan pinta-ala on

$$\frac{32\pi}{2} = 16\pi \quad \text{2 p. (yht. 5 p.)}$$

Olkoon kolmion kyljen pituus x . Kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{1}{2}x \cdot x \cdot \sin 45^\circ \quad (1 \text{ p. (yht. 6 p.)}) = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}x^2 \quad (2 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

Saadaan yhtälö:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}x^2 = 16\pi \quad (2 \text{ p. (yht. 10 p.)}) \quad || \cdot 2\sqrt{2}$$

$$x^2 = 32\sqrt{2}\pi$$

$$x = (\pm) \sqrt{32\sqrt{2}\pi}$$

$$x = 11,9236 \dots$$

$$\approx 12 \text{ (cm)} \quad (2 \text{ p. (yht. 12 p.)})$$

Vastaus: Kolmion kyljen pituus on $\sqrt{32\sqrt{2}\pi} \text{ cm} \approx 12 \text{ cm}$.

Pisteytyksestä: Myös pyöristys 11,9 cm hyväksytään.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

5. Derivoituvuus ja pinta-ala (12 p.)

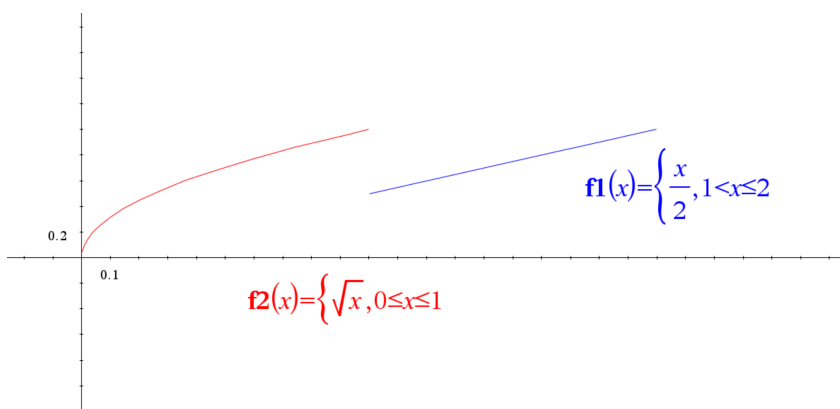
Määritellään funktio $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{x}{2}, & \text{kun } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Onko funktio jatkuva? Onko funktio derivoituva? Määritä funktion kuvaajan ja x -akselin rajoittaman alueen pinta-ala.

Ratkaisu:

Lisäselityskuva:



Huomaa! Jatkuvuus täytyy perustella analyttisesti, kuten alla. Pelkkään CAS-laskimella piirrettyyn kuvaajaan vetoaminen ei riitä, vaikka sen avulla asian voi kätevästi tarkistaa.

Jatkuvuus: Funktiot $\sqrt{x}$ ja $\frac{x}{2}$ ovat jatkuvia määrittelyväleillään, joten funktio f on jatkuva, kun $x \neq 1$. Tutkitaan kohtaa $x = 1$:

$$f(1) = \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

Toispuoleiset raja-arvot eivät ole yhtä suuret, joten raja-arvoa $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ei ole olemassa. Funktio ei siis ole jatkuva. 1 p. (yht. 3 p.)

Derivoituus: Derivoituva funktio on aina jatkuva, joten funktio f ei voi olla derivoituva, koska se ei ole jatkuva. 3 p. (yht. 6 p.)

Pinta-ala: Funktio saa vain ei-negatiivisia arvoja, joten pinta-ala on funktion integraali välillä $[0,2]$. Jaetaan integraali kahteen osaan kohdassa $x = 1$:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \sqrt{x} \, dx + \int_1^2 \frac{x}{2} \, dx \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)} \\ &= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} \, dx + \int_1^2 \frac{1}{2} x \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \int_1^2 \frac{1}{4} x^2 \quad \text{3 p. (yht. 10 p.)} \\ &= \frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 0^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4} \cdot 2^2 - \frac{1}{4} \cdot 1^2 \\ &= \frac{2}{3} + 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{8}{12} + \frac{12}{12} - \frac{3}{12} \\ &= \frac{17}{12} \quad \text{2 p. (yht. 12 p.)} \end{aligned}$$

Vastaus: Funktio ei ole jatkuva eikä derivoituva. Kysytty pinta-ala on $\frac{17}{12}$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

6. Selittämättömiä laskuja (12 p.)

Alisa ja Ben ovat ratkaisseet seuraavan tehtävän:

Korttipakassa on kahdeksan korttia, joista yksi on hertta ja loput pataa. Pakasta nostetaan kerralla kolme korttia. Millä todennäköisyydellä jokin nostetuista korteista on hertta?

Valitettavasti Alisan ja Benin ratkaisut sisältävät pelkän laskun ilman selityksiä.

a. Alisan ratkaisu: $\frac{1}{8} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{8}$

Alisan vastaus on oikein. Ratkaise tehtävä toisella tavalla, joka perustuu johonkin muuhun periaatteeseen ja laskulausekkeeseen. Muista esittää myös ratkaisusi välivaiheet ja selitykset.

b. Benin ratkaisu: $1 - (1 - \frac{1}{8})^3 = \frac{169}{512}$

Tämä ei ole oikea ratkaisu alkuperäiseen tehtävään. Muokkaa korttipakkatehtävä sellaiseksi, että Benin laskutapa antaa sille oikean vastauksen. Perustele myös, miksi Benin laskutapa antaa muokatun tehtävän oikean vastauksen.

Ratkaisu:

6.1

Ratkaisuvaihtoehto 1

Ratkaistaan tehtävä klassisella todennäköisyydellä ja kombinaatioilla.

Kun pakasta nostetaan kerralla kolme korttia, alkeistapauksia ovat kaikki kolmen kortin joukot, jotka voidaan valita kahdeksasta kortista. Nostojärjestyksellä ei ole merkitystä, ja jokainen kolmen kortin joukko on yhtä todennäköinen. Alkeistapauksia on kaikkiaan

$$\begin{aligned}
 n &= \binom{8}{3} \quad (2 \text{ p. (yht. 2 p.)}) \\
 &= \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} \\
 &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\
 &= 56
 \end{aligned}$$

Vastaavasti alkeistapauksia, joissa on pelkkiä patoja, ovat kaikki kolmen kortin joukot, jotka voidaan valita seitsemän padan joukosta:

$$\begin{aligned}n &= \binom{7}{3} \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)} \\&= \frac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} \\&= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\&= 35\end{aligned}$$

Näin ollen todennäköisyys, että yksikään nostetuista korteista ei ole hertta, on

$$\overline{P} = \frac{35}{56}. \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Tämän vastatapahtuma on se, että yksi nostetuista on hertta, joten kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned}P &= 1 - \frac{35}{56} \\&= \frac{56 - 35}{56} \\&= \frac{21}{56} \\&= \frac{3}{8} \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)}\end{aligned}$$

Vastaus: Todennäköisyys, että jokin nostetuista korteista on hertta, on $\frac{3}{8}$.

Alisan lasku perustuu siihen, että hertta nostetaan joko ensimmäisenä, toisena tai kolmantena korttina. Nämä tapaukset ovat toisensa poissulkevia, ja kunkin todennäköisyys saadaan kertolaskusäännöllä peräkkäisistä nostoista.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Ratkaistaan tehtävä vastatapahtuman avulla kertolaskusääntöä käyttämällä. 1 p. (yht. 1 p.)

Kolmen kortin nostaminen voidaan ajatella niin, että nostetaan yksi kortti kerrallaan. Pakassa on yhteensä 8 korttia ja 7 pataa, joten todennäköisyys saada ensimmäisellä nostolla pata on

$$P(\text{ensimmäinen pata}) = \frac{7}{8} \quad 2 \text{ p. (yht. 3 p.)}$$

Tämän jälkeen pakassa on 7 korttia, joista 6 on patoja, joten todennäköisyys saada pata toisella nostolla, jos ensimmäinen oli pata, on

$$P(\text{toinen pata}) = \frac{6}{7} \quad 1 \text{ p. (yht. 4 p.)}$$

Vastaavasti todennäköisyys saada pata kolmannella nostolla, jos ensimmäiset kaksi olivat patoja, on

$$P(\text{kolmas pata}) = \frac{5}{6} \quad 1 \text{ p. (yht. 5 p.)}$$

Kertolaskusäännöllä saadaan, että todennäköisyys nostaa kolme pataa peräkkäin on siis

$$P(\text{kolme pataa}) = \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6}$$

Se, että joku kolmesta nostetusta kortista on hertta, on tämän vastatapahtuma, joten

$$\begin{aligned} P(\text{yksi kolmesta hertta}) &= 1 - \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \\ &= \frac{3}{8} \quad 1 \text{ p. (yht. 6 p.)} \end{aligned}$$

Vastaus: Todennäköisyys, että jokin nostetuista korteista on hertta, on $\frac{3}{8}$.

Alisan lasku perustuu siihen, että hertta nostetaan joko ensimmäisenä, toisena tai kolmantena korttina. Nämä tapaukset ovat toisensa poissulkevia, ja kunkin todennäköisyys saadaan kertolaskusäännöllä peräkkäisistä nostoista.

6.2 Muokattu tehtävä:

Korttipakassa on kahdeksan korttia, joista yksi on hertta ja loput pataa. Pakasta nostetaan yksi kortti, se katsotaan ja palautetaan pakkaan, ja pakka sekoitetaan. Nostoja tehdään näin kolme. Millä todennäköisyydellä ainakin yhdellä nostolla saadaan hertta? 3 p. (yht. 9 p.)

Koska kortti palautetaan ja pakka sekoitetaan ennen seuraavaa nostoa, nostot ovat toisistaan riippumattomia. Yhdellä nostolla hertan todennäköisyys on $\frac{1}{8}$, joten todennäköisyys, ettei nosteta herttaa, on

$$P(\text{ei herttaa yhdellä nostolla}) = 1 - \frac{1}{8} \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

Riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön mukaan todennäköisyys, ettei herttaa saada yhdelläkään kolmesta nostosta, on

$$P(\text{ei herttaa millään nostolla}) = \left(1 - \frac{1}{8}\right)^3 \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

Tapahtuma "ainakin yhdellä nostolla saadaan hertta" on tämän tapahtuman vastatapahtuma, joten

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yksi hertta}) &= 1 - \left(1 - \frac{1}{8}\right)^3 \\ &= 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^3 \\ &= 1 - \frac{343}{512} \\ &= \frac{512 - 343}{512} \\ &= \frac{169}{512}, \end{aligned}$$

joten Benin laskutapa antaa muokattuun tehtävään oikean vastauksen.

1 p. (yht. 12 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

7. Paisto (12 p.)

Aineisto:

7. A [Taulukko: Kinkun sisälämpötila](#)

Joulukinkkua paistetaan uunissa, jonka lämpötila on noin 130 astetta. Kinkku valmistetaan ylikypsäksi, ja sen sisälämpötilan pitää nousta 85 asteeseen. Kinkku laitetaan uuniin kello 12.00. Taulukossa [7.A](#) on esitetty kinkun sisälämpötila, kun kinkkua on paistettu t minuuttia.

- Esitä aineisto [7.A](#) graafisesti.
- Muodosta aineistolle [7.A](#) lineaarinen regressiomalli ja laske mallin mukainen kinkun sisälämpötila kello 14.58 ja 20.30.
- Arvioi muodostetun mallin mielekkyyttä.

Ratkaisu:

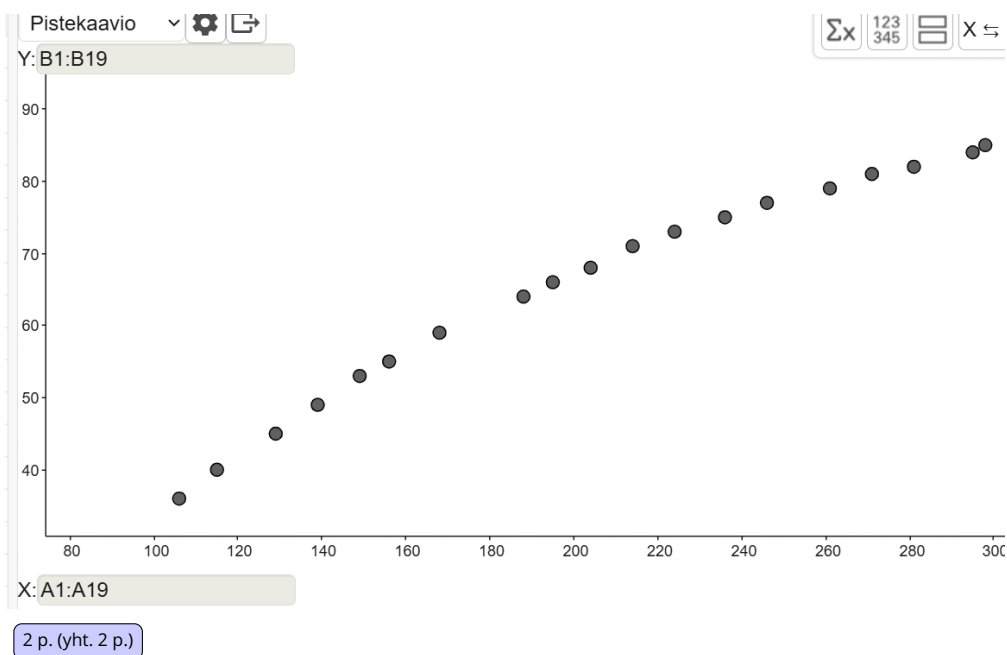
7.1 Esitetään aineisto hajontakuviona GeoGebralla.

Kopioidaan luvut GeoGebran taulukkolaskentaan. Maalataan luvut ja valitaan toiminto Kahden muuttujan regressioanalyysi.

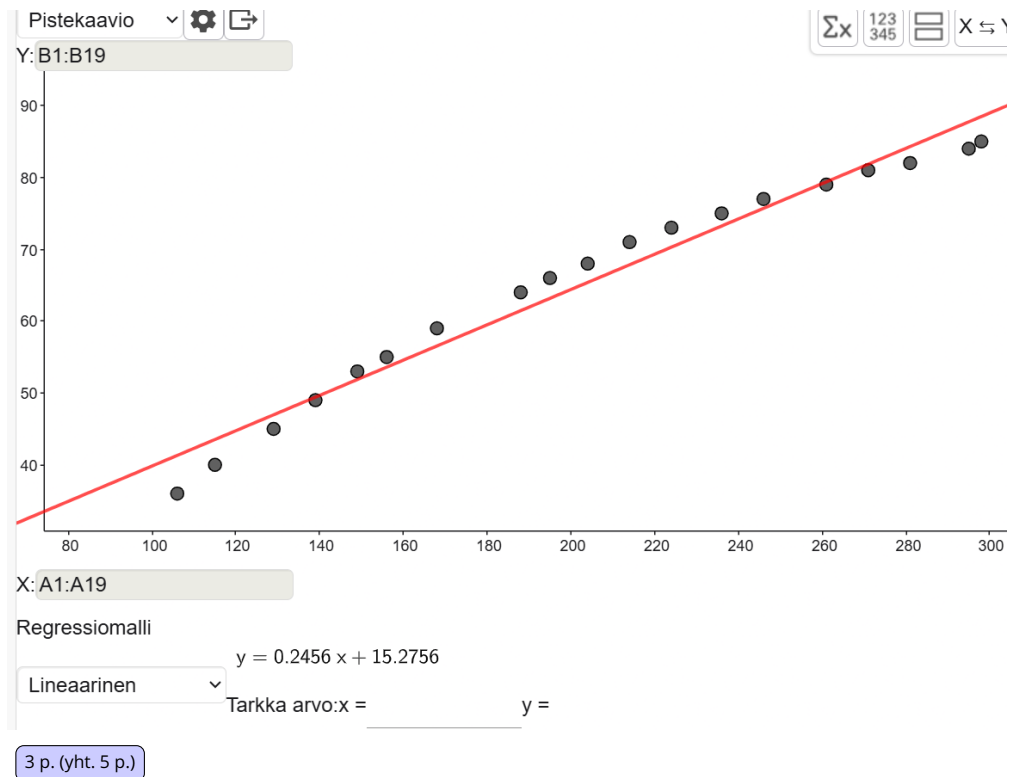
GeoGebra Classic

Yhden muuttujan analyysi
Kahden muuttujan regressioanalyysi
Usean muuttujan analyysi

1			
2			
3			
4			
5	149	53	
6	156	55	
7	168	59	
8	188	64	
9	195	66	
10	204	68	
11	214	71	
12	224	73	
13	236	75	
14	246	77	
15	261	79	
16	271	81	
17	281	82	
18	295	84	
19	298	85	



7.2 Sovitetaan aineistoon regressiosuora.



Regressiosuoran yhtälö on

$$y = 0,2456x + 15,2756.$$

Kello 14.58 ja 20.30 vastaavat paistoaikoja

$$t_1 = 2 \text{ h } 58 \text{ min} = 178 \text{ min}$$

ja

$$t_2 = 8 \text{ h } 30 \text{ min} = 510 \text{ min.}$$

Lasketaan mallin mukaiset sisälämpötilat Geogebbran valmiilla toiminnolla.

$$y = 0.2456x + 15.2756$$

Tarkka arvo:x = 178 y = 58.9953

$$y = 0.2456x + 15.2756$$

Tarkka arvo: $x = 510$

$y = 140.54$

Kello 14.58 kinkun lämpötila on mallin mukaan $58,9953\text{ °C} \approx 59\text{ °C}$. 1 p. (yht. 7 p.)

Kello 20.30 kinkun lämpötila on mallin mukaan $140,54\text{ °C} \approx 141\text{ °C}$. 1 p. (yht. 8 p.)

Vastaus: Regressiomalli on $T(t) \approx 0,2456t + 15,2756$, jossa t on paistoaika (min). Mallin mukaan kinkun sisälämpötila on kello 14.58 noin 59 °C ja kello 20.30 noin 141 °C .

7.3 Hetki $t_1 = 178\text{ min}$ on aineiston aikavälillä $106\text{ min} - 298\text{ min}$, ja pisteet ovat tällä välillä lähellä regressiosuoraa. Ennuste kello 14.58:lle on siksi mielekäs. 1 p. (yht. 9 p.)

Mallin antama 141 °C on suurempi kuin uunin lämpötila 130 °C . Kinkku ei voi lämmitä uunia kuumemmaksi, joten ennuste kello 20.30 on mahdoton. 2 p. (yht. 11 p.)

Hajontakuviosta nähdään, että lämpeneminen hidastuu paiston edetessä. Lineaarinen malli olettaa kuitenkin kinkun lämpötilan muutosnopeuden vakioksi. Kun ennustetaan kauas aineiston ulkopuolelle kuten hetkeen $t_2 = 510\text{ min}$, malli alkaa antaa liian korkeita ennusteita lämpötilalle. 1 p. (yht. 12 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

8. Sähköauton hankinta (12 p.)

8.1 Selitä lyhyesti, mitä tarkoitetaan sillä, että tulevaisuuden rahamäärä diskontataan sen nykyarvoon. (3 p.)

8.2 Anne tilaa autoliikkeestä uuden sähköauton, vaikka sen toimitusajaksi ilmoitetaan yksi vuosi. Auton hinta on 26 000 euroa. Anne sopii autoliikkeen kanssa, että auton toimitus tapahtuu täsmälleen yhden vuoden kuluttua ja että kaupassa sovelletaan seuraavia maksuehtoja: sopimushetkellä Anne maksaa 2 000 euron käsirahan, puolen vuoden jälkeen 2 000 euroa ja toimituksen yhteydessä vuoden kuluttua 22 000 euroa.

Auton maksua varten Anne avaa määräaikaistilin, jolla on 2,4 %:n vuotuinen nettokorkokanta ja kuuden kuukauden korkojakso. Kuinka suuri summa Annen täytyy vähintään tallettaa sopimushetkellä tilille, jotta hän voisi maksaa tililtä ensimmäisen maksuerän puolen vuoden kuluttua ja loppusumman vuoden kuluttua? Anne suorittaa maksut tililtä koronmaksun jälkeen. (9 p.)

Ratkaisu:

8.1 Rahan arvo riippuu ajankohdasta, koska nykyhetkellä käytettävissä oleva raha voidaan tallettaa niin, että siitä saadaan korkoa, tai se voidaan sijoittaa niin, että sijoituksen arvo kasvaa. (1 p. (yht. 1 p.)) Diskonttaaminen tarkoittaa, että tulevaisuuden rahamäärästä lasketaan se nykyhetken rahamäärä, joka arvonnousun myötä kasvaisi tulevan rahamäärän suuruiseksi tarkasteltavaan tulevaisuuden hetkeen mennessä. (2 p. (yht. 3 p.))

8.2 Käsiraha maksetaan sopimushetkellä, joten se ei sisälly tilille talletettavaan summaan. Tililtä maksetaan

$$a_1 = 2000 \text{ €} \quad \text{puolen vuoden kuluttua}$$

$$a_2 = 22000 \text{ €} \quad \text{vuoden kuluttua.}$$

Korkojakso on puoli vuotta, joten jaksokorko ja korkotekijä ovat

$$i = \frac{2,4\%}{2} = 1,2\% \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)}) = 0,012$$

$$q = 1 + i = 1,012.$$

Olkoon talletettava summa K . 1 p. (yht. 2 p.) Tilin saldo kehittyy seuraavasti:

puolen vuoden kuluttua koronmaksun jälkeen: Kq 1 p. (yht. 3 p.)

ensimmäisen erän maksun jälkeen: $Kq - a_1$ 1 p. (yht. 4 p.)

vuoden kuluttua koronmaksun jälkeen: $(Kq - a_1)q$ 2 p. (yht. 6 p.)

Saldon on riitettävä toiseen maksuerään:

$$(Kq - a_1)q = a_2 \quad \text{2 p. (yht. 8 p.)}$$

$$Kq^2 - a_1q = a_2 \quad \| + a_1q$$

$$Kq^2 = a_1q + a_2 \quad \| : q^2$$

$$K = \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2}$$

$$= \frac{2000 \text{ €}}{1,012} + \frac{22000 \text{ €}}{1,012^2}$$

$$= 23457,638 \dots \text{ €}$$

$$\approx 23457,64 \text{ €} \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

Vastaus: Annen täytyy tallettaa tilille sopimushetkellä vähintään 23457,64 euroa (ja maksaa lisäksi käsiraha 2000 euroa).

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

9. Erimielisyyttä tangentista (12 p.)

Derivoituvan funktion f kuvaajan *tangentti*, joka kulkee pisteen $(x_0, f(x_0))$ kautta, on määritelmän mukaan suora, jonka yhtälö on

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Kaksi opiskelijaa ratkaisi seuraavaa tehtävää:

Tutki, onko suora $y = -1$ funktion $f(x) = 2x^3 - 1$ kuvaajan tangentti.

Opiskelija A vastasi: Koska suoralla ja funktion f kuvaajalla on vain yksi yhteinen piste, niin suora on kuvaajan tangentti.

Opiskelija B vastasi: Suora ei ole kuvaajan tangentti. Jos kuvaajat piirretään samaan koordinaatistoon, niillä on yksi yhteinen piste, mutta tässä pisteessä suora leikkaa kuvaajan.

- Selitä esimerkin ja tangentin määritelmän avulla, miksi opiskelijan A päättely ei ole pätevä.
- Onko opiskelija B oikeassa? Perustele vastauksesi käyttämällä tangentin määritelmää.

Ratkaisu:

Ratkaisuvaihtoehto 1

9.1 Esimerkiksi suoralla $y = -x - 1$ ja funktion $f(x) = 2x^3 - 1$ kuvaajalla on vain yksi yhteinen piste:

$$2x^3 - 1 = -x - 1 \quad || + x + 1$$

$$2x^3 + x = 0$$

$$x(2x^2 + 1) = 0$$

$$x = 0 \quad , \text{ sillä } 2x^2 + 1 > 0$$

$$y = f(0) = 2 \cdot 0^3 - 1 = -1$$

Ainoa yhteinen piste on $(0, f(0)) = (0, -1)$. Opiskelijan A päättelyn mukaan suoran $y = -x - 1$ tulisi siis olla tällä perusteella funktion $f(x) = 2x^3 - 1$ kuvaajan tangentti pisteessä $(0, 1)$. 2 p. (yht. 2 p.)

Funktion $f(x) = 2x^3 - 1$ derivaatta on $f'(x) = 6x^2$. Tangentin määritelmän mukaan tangentin kulmakerroin on yhtä suuri kuin funktion derivaatta tangentin ja funktion kuvaajan yhteisessä pisteessä. Suoran $y = -x - 1$ kulmakerroin on -1 . Funktion derivaatta kohdassa $x = 0$ on

$$f'(0) = 6 \cdot 0^2 = 0.$$

Näin ollen suora $y = -x - 1$ ei ole funktion $f(x) = 2x^3 - 1$ kuvaajan tangentti. Opiskelijan A perustelu ei siis ollut pätevä. 2 p. (yht. 4 p.)

Pisteytyksestä:

- Esimerkki suorasta joka ei ole tangentti ja jolla on vain yksi yhteinen piste kuvaajan kanssa 2 p
- Tangentin määritelmän avulla perusteleminen 2 p

9.2 Suoran $y = -1$ ja funktion $f(x) = 2x^3 - 1$ kuvaajan yhteiset pisteet saadaan yhtälöstä

$$2x^3 - 1 = -1 \quad || + 1$$

$$2x^3 = 0$$

$$x = 0$$

$$y = -1$$

Ainoa yhteinen piste on siis $(0, -1)$. 2 p. (yht. 6 p.) Tangentin määritelmän nojalla funktion $f(x) = 2x^3 - 1$ kuvaajan tangentti tässä pisteessä on

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - (-1) = 6 \cdot 0^2 \cdot (x - 0)$$

$$y + 1 = 0$$

$$y = -1,$$

joten suora $y = -1$ on funktion $f(x) = 2x^3 - 1$ tangentti. 4 p. (yht. 10 p.) Opiskelija B on siis väärässä. 2 p. (yht. 12 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 2

9.1 Esimerkiksi suoralla $y = -x - 1$ ja funktion $f(x) = 2x^3 - 1$ kuvaajalla on vain yksi yhteinen piste:

$$2x^3 - 1 = -x - 1 \quad || + x + 1$$

$$2x^3 + x = 0$$

$$x(2x^2 + 1) = 0$$

$$x = 0, \text{ sillä } 2x^2 + 1 > 0$$

$$y = f(0) = 2 \cdot 0^3 - 1 = -1$$

Ainoa yhteinen piste on $(0, f(0)) = (0, -1)$. 2 p. (yht. 2 p.) Opiskelijan A päättelyn mukaan suoran $y = -x - 1$ tulisi siis olla tällä perusteella funktion $f(x) = 2x^3 - 1$ kuvaajan tangentti pisteessä $(0, 1)$.

Funktion $f(x) = 2x^3 - 1$ derivaatta on $f'(x) = 6x^2$. Tangentin määritelmän mukaan funktion $f(x)$ kuvaajan tangentti pisteessä $(0, -1)$ on

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - (-1) = 6 \cdot 0^2 \cdot (x - 0)$$

$$y + 1 = 0$$

$$y = -1,$$

eli eri suora kuin $y = -x - 1$, joten suora $y = -x - 1$ ei ole funktion $f(x) = 2x^3 - 1$ kuvaajan tangentti. Opiskelija A oli siis sattumalta oikeassa siinä, että $y = -1$ on funktion $f(x) = 2x^3 - 1$ kuvaajan tangentti, mutta hänen perustelunsa ei ollut pätevä. 2 p. (yht. 4 p.)

Pisteytyksestä:

- Esimerkki suorasta joka ei ole tangentti ja jolla on vain yksi yhteinen piste kuvaajan kanssa 2 p
- Tangentin määritelmän avulla perusteleminen 2 p

9.2 Kohdassa 9.1 osoitettiin tangentin määritelmän nojalla, että suora $y = -1$ on funktion $f(x) = 3x^2 - 1$ tangentti, 6 p. (yht. 10 p.) joten opiskelija B on väärässä.

2 p. (yht. 12 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

10. Palloja avaruudessa (12 p.)

Kolmiulotteisen avaruuden R -säteinen pallo on niiden pisteiden (x,y,z) joukko, jotka ovat täsmälleen etäisyydellä R pallon keskipisteestä (x_0,y_0,z_0) . Tällaisen pallon yhtälö on muotoa

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Määritä yhtälö jokaiselle kolmiulotteisen avaruuden pallolle, joka kulkee kaikkien pisteiden $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ja $(0,0,1)$ kautta. Mikä on tällaisen pallon pienin mahdollinen säde?

Ratkaisu:

Olkoon pallon keskipiste (x_0,y_0,z_0) ja säde $R > 0$. Pallo kulkee pisteiden $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ja $(0,0,1)$ kautta täsmälleen silloin, kun

$$(1 - x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2 \quad (1)$$

$$x_0^2 + (1 - y_0)^2 + z_0^2 = R^2 \quad (2)$$

$$x_0^2 + y_0^2 + (1 - z_0)^2 = R^2. \quad (3)$$

2 p. (yht. 2 p.)

Vähennetään yhtälöt (1) ja (2) toisistaan:

$$(1 - x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2 - (x_0^2 + (1 - y_0)^2 + z_0^2) = R^2 - R^2$$

$$(1 - x_0)^2 - x_0^2 + y_0^2 - (1 - y_0)^2 + z_0^2 - z_0^2 = 0$$

$$(1 - x_0)^2 - x_0^2 = (1 - y_0)^2 - y_0^2$$

$$(1 - 2x_0 + x_0^2) - x_0^2 = (1 - 2y_0 + y_0^2) - y_0^2$$

$$1 - 2x_0 = 1 - 2y_0$$

$$x_0 = y_0. \quad \text{2 p. (yht. 4 p.)}$$

Vastaavasti yhtälöistä (2) ja (3) saadaan $y_0 = z_0$. 1 p. (yht. 5 p.) Keskipiste on siis muotoa (t,t,t) , missä $t \in \mathbb{R}$ ja pallon yhtälö on muotoa

$$(x - t)^2 + (y - t)^2 + (z - t)^2 = R^2, \quad t \in \mathbb{R}. \quad \text{2 p. (yht. 7 p.)}$$

Sijoittamalla tämä (esimerkiksi yhtälöön (1)) saadaan säteen neliölle yhtälö:

$$R^2 = (1 - t)^2 + t^2 + t^2$$

$$R^2 = 3t^2 - 2t + 1. \quad \text{2 p. (yht. 9 p.)} \quad (4)$$

Huomaa, että yhtälöiden (1), (2) ja (3) muodostaman yhtälöryhmän saa ratkaistua ja yhtälön (4) muodostettua todella nopeasti CAS-laskimella:

$$\text{solve} \left(\begin{cases} (1-x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2 = a \\ x_0^2 + (1-y_0)^2 + z_0^2 = a \\ x_0^2 + y_0^2 + (1-z_0)^2 = a \end{cases}, \{a, y_0, z_0\} \right) \rightarrow a = 3 \cdot x_0^2 - 2 \cdot x_0 + 1 \text{ and } y_0 = x_0 \text{ and } z_0 = x_0$$

Tutkitaan seuraavaksi pallon säteen neliötä kuvaavaa funktiota

$$f(t) = 3t^2 - 2t + 1$$

$$f'(t) = 6t - 2.$$

Derivaatan nollakohta:

$$6t - 2 = 0$$

$$t = \frac{1}{3} \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

Funktion $f(t)$ lauseke kuvaa ylöspäin aukeavaa paraabelia, sillä se on toisen asteen polynomilauseke ja toisen asteen kerroin on positiivinen. Funktio $f(t)$ saa siis pienimmän arvonsa derivaatan nollakohdassa, eli kun $t = \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1 \\ &= \frac{2}{3} \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)} \end{aligned}$$

Paraabelin $3t^2 - 2t + 1$ pienin arvo on positiivinen ja se aukeaa ylöspäin. Näin ollen yhtälöllä (4) on ratkaisu jokaisella $t \in \mathbb{R}$. Pienin säde saadaan laskemalla neliöjuuri funktion $f(t)$ pienimmästä arvosta.

$$R^2 = \frac{2}{3}$$

$$R = (\pm) \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: Pisteiden $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ja $(0,0,1)$ kautta kulkevat täsmälleen pallot

$$(x - t)^2 + (y - t)^2 + (z - t)^2 = 3t^2 - 2t + 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ja pienin mahdollinen säde on $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

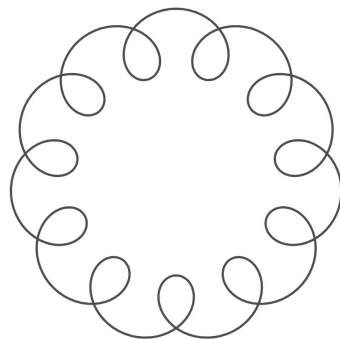
11. Hassu kello (12 p.)

Aineisto:

11. A [Video: Hassu kello](#)

Kelloseppä tekee hassun kellon, jonka tuntiviisari kiertää kellotaulun keskipistettä kuten tavallisesti, mutta minuuttiviisari kiertää kiinnityskohtaansa tuntiviisarin kärjessä, kuten nopeutetussa videossa [11.A](#). Minuuttiviisarin kiinnityskohdan etäisyys kellon keskipisteestä on 4 ja etäisyys kiinnityskohdasta minuuttiviisarin kärkeen on 1. Kellotaulun keskipiste on sijoitettu koordinaatiston origoon niin, että minuuttiviisarin kärki on pisteessä $(0,5)$, kun kello on tasan 12. Viisarit pyörivät myötäpäivään kuten tavallisessa kellossa.

- Kellosepän lapsi Kaiho lähtee kouluun aamulla kello 8.00–9.00, kun minuuttiviisarin kärki on mahdollisimman kaukana origosta. Mihin aikaan Kaiho lähtee kouluun?
- Kaihon pikkusisar Kuura liimaa väriliidun minuuttiviisarin kärkeen. Tällöin 12 tunnin jälkeen kellotauluun on muodostunut käyrä, joka on esitetty oheisessa kuvassa. Mihin kelloaikoihin käyrä leikkaa y -akselin?



Anna likimääräiset vastaukset minuutin tarkkuudella.

Ratkaisu:

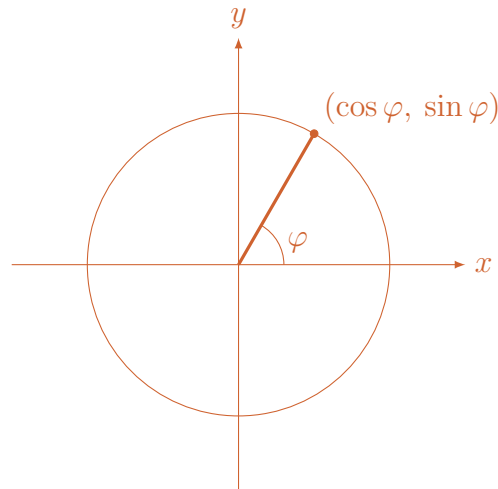
- Käsitellään tuntiviisarin kärjen paikkaa origoon nähden vektorina ajan t funktiona $\vec{h}(t)$ ja minuuttiviisarin paikkaa tuntiviisarin kärkeen nähden vektorina ajan t funktiona $\vec{m}(t)$, missä t on aika tunteina ajanhetkestä 12:00 eteenpäin. Tällöin:

$$\vec{h}(t) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi \cdot t}{12}\right) \vec{i} + 4 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi \cdot t}{12}\right) \vec{j} \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)}$$

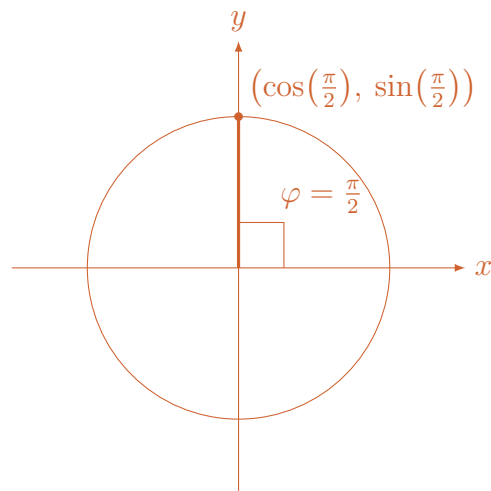
$$\vec{m}(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi \cdot t\right) \vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi \cdot t\right) \vec{j} \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Funktiot muodostettiin seuraavalla periaatteella:

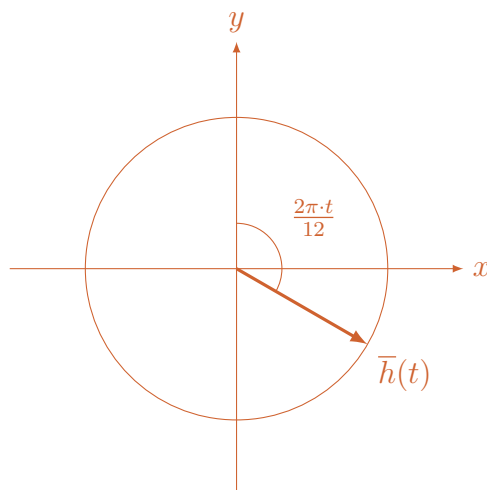
Yksikköympyrässä kehän pisteen vaakakordinaatti määräytyy vastapäivään kasvavan kulman kosinin mukaan ja pystykoordinaatti vastapäivään kasvavan kulman sinin mukaan:



Kellon viisareiden vaakakoordinaatin halutaan olevan nolla ja pystykoordinaatin suurimmillaan ajanhetkellä 12.00, joten alkuvaihekulma on $\frac{\pi}{2}$:



Tuntiviisari liikkuu myötäpäivään ja kiertää kulman 2π kahdentoista tunnin aikana, joten alkuvaihekulmasta $\frac{\pi}{2}$ täytyy vähentää kulma $\frac{2\pi \cdot t}{12}$. Näin tuntiviisarin kärjen paikan sinin ja kosinin suuntakulmiksi tulee $\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi \cdot t}{12}$.



Minuuttiviisari pyörii vastaavasti, mutta kokonaisen kierroksen tunnin aikana, joten sen sinin ja kosinin suuntakulmiksi tulee $\frac{\pi}{2} - 2\pi \cdot t$.

Kun minuuttiviisari on kauimmillaan origosta, sen on oltava samassa asennossa kuin tuntiviisari. 1 p. (yht. 4 p.) Tällöin minuuttiviisarin suuntakulman on oltava yhtä suuri kuin tuntiviisarin suuntakulma plus mahdollisesti jokin määrä täysiä kierroksia. Saamme yhtälön, jonka ratkaisuna saamme Kaihon kouluunlähdön ajankohdan t :

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi \cdot t}{12} = \frac{\pi}{2} - 2\pi \cdot t + n \cdot 2\pi \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)}$$

Ratkaisemalla yhtälö CAS-laskimella saadaan $t = \frac{12 \cdot n}{11}$. Ratkaisu käsin:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi \cdot t}{12} &= \frac{\pi}{2} - 2\pi \cdot t + n \cdot 2\pi & \parallel -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{2\pi \cdot t}{12} &= -2\pi \cdot t + n \cdot 2\pi & \parallel : -2\pi \\ \frac{t}{12} &= t - n & \parallel \cdot 12 \\ t &= 12t - 12n & \parallel -t + 12n \\ 11t &= 12n & \parallel : 11 \\ t &= \frac{12n}{11} \end{aligned}$$

Tiedetään, että ajan t on oltava välillä $[8, 9]$. Katsotaan muuttujan t arvot muuttujan n arvoilla 7, 8 ja 9:

$$\frac{12 \cdot 7}{11} = 7,6363 \dots$$

$$\frac{12 \cdot 8}{11} = 8,7272 \dots$$

$$\frac{12 \cdot 9}{11} = 9,8181 \dots$$

Arvolla $n = 8$ muuttuja t on halutulla välillä. Lasketaan minuutit klo 8.00 jälkeen arvon $8,7272 \dots$ desimaaliosasta:

$$0,7272 \dots \cdot 60 = 43,636 \dots$$

$$\approx 44 \quad (1 \text{ p. (yht. 7 p.)})$$

Vastaus: Kaiho lähtee kouluun klo 8.44.

- b. Summaamalla kohdassa a. määriteltyjen funktioiden $\bar{h}(t)$ ja $\bar{m}(t)$ x -komponenttien kertoimet voimme muodostaa lausekkeen minuuttiviisarin kärjen paikan x -koordinaatille ajan funktiona:

$$x(t) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi \cdot t}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi \cdot t\right) \quad (2 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

Tarkastellaan tämän funktion kuvaajan nollakohtia:

$$\text{vaakatunti}(t) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} t\right)$$

$$\text{vaakaminuutti}(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \cdot 12 t\right)$$

$$\text{vaaka}(t) = \text{vaakatunti}(t) + \text{vaakaminuutti}(t)$$

$$= 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \cdot 12 t\right)$$

$$a = \text{vaaka}(6)$$

$$= 0$$

$$A = \text{Leikkauspiste}(\text{vaaka}, x\text{Akseli}, (5.6365671666, 0))$$

$$= (5.6365671666, 0)$$

$$B = \text{Leikkauspiste}(\text{vaaka}, x\text{Akseli}, (6.3634328335, 0))$$

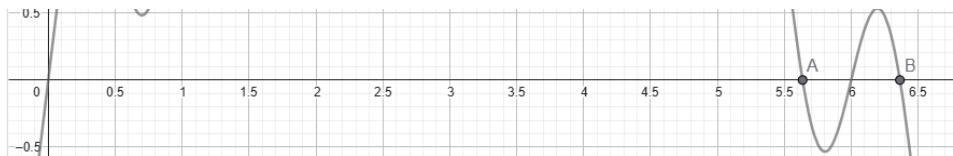
$$= (6.3634328335, 0)$$

$$b = (x(A) - 5) \cdot 60$$

$$= 38.1940299934$$

$$c = (x(B) - 6) \cdot 60$$

$$= 21.80597001$$



Nollakohdat ovat siis

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = 5,53656\dots$$

$$t_3 = 6$$

$$t_4 = 6,36343\dots$$

Muunnetaan tuntien desimaaliosat minuuteiksi:

$$0,53656 \dots \cdot 60 = 38,1940 \dots$$

$$\approx 38$$

$$0,36343 \dots \cdot 60 = 21,8059 \dots$$

$$\approx 22$$

Vastaus: Käyrä leikkaa y -akselin kello 12.00, 5.38, 6.00 ja 6.22.

2 p. (yht. 12 p.)

Pisteytyksestä: Pisteytys b-kohdassa:

- Ajat $t = 0$ ja $t = 6$ 1 p
- Muut kaksi aikaa oikein 2 p
- Yhtälö tai funktio, jonka avulla ajat ratkaistiin 2 p

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

12. Jaollisuus (12 p.)

Millä positiivisilla kokonaisluvuilla n luku $2^{10^n} + 1$ on jaollinen luvulla 17?

Ratkaisu:

Ratkaisuvaihtoehto 1

Huomataan, että

$$2^4 = 16 \equiv -1 \pmod{17}$$

Täten positiivisille kokonaisluvuille m pätee:

$$(2^4)^m \equiv (-1)^m \pmod{17} \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)}$$

Parittomille positiivisille kokonaisluvuille m pätee siis

$$(2^4)^m \equiv -1 \pmod{17} \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)} \quad (1)$$

ja parillisille positiivisille kokonaisluvuille m pätee

$$(2^4)^m \equiv 1 \pmod{17} \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} \quad (2)$$

Toisaalta luku $2^{10^n} + 1$ on jaollinen luvulla 17 täsmälleen silloin, kun

$$2^{10^n} + 1 \equiv 0 \pmod{17}$$

$$2^{10^n} \equiv -1 \pmod{17}$$

$$(2^4)^{\frac{10^n}{4}} \equiv -1 \pmod{17} \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)}$$

Tuloksen (1) nojalla tämä on tosi, jos $\frac{10^n}{4}$ on pariton positiivinen kokonaisluku, ja tuloksen (2) nojalla tämä ei ole tosi, jos $\frac{10^n}{4}$ on parillinen positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan lukua $\frac{10^n}{4}$.

$$\frac{10^n}{4} = \frac{(2 \cdot 5)^n}{2^2} = \frac{2^n \cdot 5^n}{2^2} = 2^{n-2} \cdot 5^n.$$

Tästä nähdään, että kun $n > 2$, luku $\frac{10^n}{4}$ on parillinen, sillä sen tekijöissä on luku 2 ainakin kerran. 2 p. (yht. 8 p.) Tehtävänannon mukaan n on positiivinen kokonaisluku, joten mahdollisia ratkaisuja ovat siis vain $n = 1$ ja $n = 2$. Tutkitaan ne erikseen:

Tapaus $n = 1$:

$$2^{10^1} + 1 = 1025 = 60 \cdot 17 + 5,$$

joten luku $2^{10^n} + 1$ ei ole jaollinen luvulla 17, kun $n = 1$. 1 p. (yht. 9 p.)

Tapaus $n = 2$:

$$\frac{10^2}{4} = 25,$$

joka on pariton positiivinen kokonaisluku, joten tuloksen (1) nojalla $2^{10^n} + 1$ on jaollinen luvulla 17, kun $n = 2$. 3 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Ainoa positiivinen kokonaisluku n , jolla luku $2^{10^n} + 1$ on jaollinen luvulla 17, on $n = 2$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Luvun 2 potensseille pätee

$$2^4 = 16 \equiv -1 \pmod{17} \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)}$$

$$2^8 = (2^4)^2 \equiv (-1)^2 = 1 \pmod{17} \quad \text{2 p. (yht. 4 p.)}$$

Olkoon $m = 8k + r$, missä k ja r ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja. Tällöin

$$\begin{aligned} 2^m &= 2^{8k+r} \\ &= (2^8)^k \cdot 2^r \\ &\equiv 1^k \cdot 2^r \pmod{17} \\ &= 2^r \end{aligned} \tag{1}$$

Tutkitaan positiivisia kokonaislukuja n .

Tapaus $n = 1$. Nyt $10 = 8 \cdot 1 + 2$, joten tuloksen (1) nojalla

$$\begin{aligned} 2^{10} + 1 &\equiv 2^2 + 1 \\ &= 5 \pmod{17} \end{aligned}$$

Luku $2^{10} + 1$ ei ole jaollinen luvulla 17. 1 p. (yht. 5 p.)

Tapaus $n = 2$. Nyt $10^2 = 100 = 8 \cdot 12 + 4$, joten tuloksen (1) nojalla

$$\begin{aligned} 2^{100} + 1 &\equiv 2^4 + 1 \\ &= 17 \\ &\equiv 0 \pmod{17} \end{aligned}$$

Luku $2^{100} + 1$ on jaollinen luvulla 17. 3 p. (yht. 8 p.)

Tapaus $n \geq 3$. Nyt

$$\begin{aligned} 10^n &= 10^3 \cdot 10^{n-3} \\ &= 8 \cdot 125 \cdot 10^{n-3} + 0, \end{aligned} \quad \text{2 p. (yht. 10 p.)}$$

joten joten tuloksen (1) nojalla, kun $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} 2^{10^n} + 1 &\equiv 2^0 + 1 \\ &= 2 \pmod{17} \end{aligned}$$

Luku $2^{10^n} + 1$ ei ole jaollinen luvulla 17, kun $n \geq 3$. 2 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Ainoa positiivinen kokonaisluku n , jolla luku $2^{10^n} + 1$ on jaollinen luvulla 17, on $n = 2$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

13. Pellin ja Fermat'n yhtälö (12 p.)

Kokonaisluvut x ja y muodostavat Pellin ja Fermat'n yhtälön ratkaisun vakiolla 3, jos

$$x^2 - 3y^2 = 1. \quad (\star)$$

Esimerkiksi luvut $x = 1$ ja $y = 0$ toteuttavat yhtälön, mutta tehtävässä on löydettävä ratkaisuja, joissa sekä x että y ovat positiivisia.

a. Anna esimerkki positiivisista kokonaisluvuista x ja y , jotka toteuttavat yhtälön $(\star)$.

b. Todista Brahmaguptan yhtälö

$$(x^2 - 3y^2)(z^2 - 3w^2) = (xz + 3yw)^2 - 3(xw + yz)^2.$$

c. Etsi aiemmin löytämäsi ratkaisun ja Brahmaguptan yhtälön avulla yhtälölle $(\star)$ toinen ratkaisu.

d. Osoita, että yhtälöllä $(\star)$ on äärettömän monta kokonaislukuratkaisua.

Ratkaisu:

a. Jonkin ratkaisun voi etsiä esimerkiksi näin:

$$x^2 - 3y^2 = 1$$

$$x^2 = 1 + 3y^2$$

Valitsemalla $y = 1$ oikeasta puolesta tulee $1 + 3 \cdot 1^2 = 4$.

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

$$2^2 - 3 \cdot 1^2 = 4 - 3 = 1$$

Täten eräs yhtälön $(\star)$ ratkaisu on $x = 2, y = 1$. 1 p. (yht. 1 p.)

b. Todistetaan Brahmaguptan yhtälö

$$(x^2 - 3y^2)(z^2 - 3w^2) = (xz + 3yw)^2 - 3(xw + yz)^2.$$

Avataan sulut Brahmaguptan yhtälön vasemmalta puolelta:

$$(x^2 - 3y^2)(z^2 - 3w^2) = x^2z^2 - 3w^2x^2 - 3y^2z^2 + 9y^2w^2$$

Avataan seuraavaksi sulut Brahmaguptan yhtälön oikealta puolelta:

$$\begin{aligned}(xz + 3yw)^2 - 3(xw + yz)^2 &= x^2z^2 + 6xzyw + 9y^2w^2 - 3(x^2w^2 + 2xzyw + y^2z^2) \\ &= x^2z^2 + \cancel{6xzyw} + 9y^2w^2 - 3x^2w^2 - \cancel{6xzyw} - 3y^2z^2 \\ &= x^2z^2 - 3w^2x^2 - 3y^2z^2 + 9y^2w^2\end{aligned}$$

Nähdään, että avaamalla sulut molemmista Brahmaguptan yhtälön puolista saadaan lopulta sama lauseke. 2 p. (yht. 3 p.) Yhtälö on siis tosi.

c. Kohdassa a. todettiin, että yhtälön $(\star)$ eräs ratkaisu on $x = 2, y = 1$. Tarkastellaan Brahmaguptan yhtälöä, kun valitaan $x = z = 2$ ja $y = w = 1$:

$$(2^2 - 3 \cdot 1^2)(2^2 - 3 \cdot 1^2) = (2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1)^2 - 3(2 \cdot 1 + 1 \cdot 2)^2 \quad \text{2 p. (yht. 5 p.)}$$

$$1 \cdot 1 = 7^2 - 3 \cdot 4^2$$

$$7^2 - 3 \cdot 4^2 = 1 \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

Nähdään, että myös luvut $x = 7$ ja $y = 4$ toteuttavat yhtälön $(\star)$. 2 p. (yht. 8 p.)

d. Kohdan a. nojalla tiedetään, että yhtälöllä $(\star)$ on ainakin yksi ratkaisu $x = 2, y = 1$.

Olkoon yhtälön $(\star)$ eräs ratkaisu $x = a, y = b$. Tällöin pätee:

$$a^2 - 3b^2 = 1$$

$$a \in \mathbb{Z}_+$$

$$b \in \mathbb{Z}_+$$

Brahmaguptan yhtälön nojalla pätee

$$(a^2 - 3b^2)(a^2 - 3b^2) = (a \cdot a + 3 \cdot b \cdot b)^2 - 3(ab + ba)^2$$

Ylläolevan yhtälön vasen puoli on alkuoletuksen nojalla $1 \cdot 1 = 1$. Merkitään $a' = a \cdot a + 3 \cdot b \cdot b$ ja $b' = ab + ba$. Ylläolevan yhtälön nojalla myös luvut $x = a'$ ja $y = b'$ toteuttavat yhtälön $(\star)$. 2 p. (yht. 10 p.) Lisäksi:

$$\begin{aligned}a' &= a \cdot a + 3 \cdot b \cdot b \\ &= a^2 + 3b^2\end{aligned}$$

Luvut a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja, joten $a' > a$.

$$\begin{aligned}b' &= ab + ba \\ &= 2ab\end{aligned}$$

Luvut a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja, joten $b' > b$. 1 p. (yht. 11 p.)

Täten minkä hyvänsä yhtälön $(\star)$ ratkaisun $x = a, y = b$ avulla voidaan tuottaa uusi ratkaisu $x = a', y = b'$ siten, että $a' > a$ ja $b' > b$. Yhtälöllä $(\star)$ on siten äärettömän monta positiivista kokonaislukuratkaisua. 1 p. (yht. 12 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.