

Matematiikka

LYHYT

60 % pk-seudun

lukiolaisista
opiskelee Mafynetillä
yo-kirjoituksiin



70 %

lääketieteen

valintakoeväylän
paikoista mafylaisille
keväällä 2026

Suomen

**kattavimmat
malliratkaisut**

Opiskelijoiden ja
opettajien käyttöön

Malliratkaisut

SYKSY
2026

Mafy – oppimisen asialla jo vuodesta 2010

**Mafynetti-
oppimissovellus**

**Valmennuskurssit ja
oppimateriaalit**

Valintakokeet A, B, C ja F

Ylioppilaskirjoitukset

A-englanti
Biologia
Fysiikka
Historia
Kemia

Maantiede
Matematiikka
Psykologia
Yhteiskuntaoppi
Äidinkieli

Käyttöehdot

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafy.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on **kielletty**.

Lukion opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukion kursseillasi.

Nämä mallivastaukset ovat Mafy Oy:n omaisuutta.

Mallivastaukset laatii Mafyn oppimateriaaliitiimi

Tiimi kehittää lukion
oppimateriaaleja.

Mallivastausten
tekemiseen
osallistuivat:

Albina **Kostanica**
Tuukka **Keinonen**
Sampsa **Kurvinen**
Saija **Ojala**
Matti **Virolainen**

Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	6
Ratkaisu tehtävään 3	10
Ratkaisu tehtävään 4	16
Ratkaisu tehtävään 5	19
Ratkaisu tehtävään 6	23
Ratkaisu tehtävään 7	26
Ratkaisu tehtävään 8	30
Ratkaisu tehtävään 9	36
Ratkaisu tehtävään 10	43
Ratkaisu tehtävään 11	49

Malliratkaisut päivitetty 29. syyskuuta 2026 klo 13:07.

1. Karhujen huviretki (12 p.)

Karhujen huviretkelle osallistui 30 teddykarhua, 16 jääkarhua, 21 pesukarhua, 6 verokarhua ja 2 tiekarhua. Anna vastaukset seuraaviin kysymyksiin pyöristettynä prosenttiyksikön tai karhun tarkkuuteen.

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Jokaisen osatehtävän vastaus on kokonaisluku.

1.1 Kuinka monta prosenttia osallistujista oli pesukarhuja? (2 p.)

 %

1.2 Retken osallistujista 32 % söi retkellä karhunvatukoita. Kuinka moni söi karhunvatukoita? (2 p.)

 karhua

1.3 Kuinka monta prosenttia enemmän jääkarhuja oli kuin verokarhuja? (2 p.)

 %

1.4 Kuinka monta prosenttia vähemmän verokarhuja oli kuin jääkarhuja? (2 p.)

 %

1.5 Teddykarhuja oli ilmoittautunut alun perin enemmän, mutta 14 % ilmoittautuneista ei saapunut paikalle. Kuinka monta teddykarhua oli ilmoittautunut retkelle? (2 p.)

 teddykarhua

1.6 Karhut ostivat evääksi nallekarkkeja, joiden veroton hinta oli 12 otsoa ja arvonlisäverollinen hinta 15 otsoa. Kuinka suuri on nallekarkkien arvonlisäveroprosentti karhumaaailmassa? (2 p.)

 %**Ratkaisu:**

1.1 28 2 p. (yht. 2 p.)

1.2 24 2 p. (yht. 2 p.)

1.3 167 2 p. (yht. 2 p.)

1.4 63 2 p. (yht. 2 p.)

1.5 35 2 p. (yht. 2 p.)

1.6 25 2 p. (yht. 2 p.)

Näin vastaukset saadaan:

$$n_{\text{teddy}} = 30$$

$$n_{\text{jää}} = 16$$

$$n_{\text{pesu}} = 21$$

$$n_{\text{vero}} = 6$$

$$n_{\text{tie}} = 2$$

$$n = 30 + 16 + 21 + 6 + 2 = 75$$

1.1 Pesukarhujen osuus lasketaan osallistujien kokonaismäärästä.

$$\begin{aligned} p_{\text{pesu}} &= \frac{n_{\text{pesu}}}{n} \cdot 100 \% \\ &= \frac{21}{75} \cdot 100 \% \\ &= 28 \% \end{aligned}$$

Osallistujista 28 % oli pesukarhuja.

1.2 Osuutta 32 % vastaa kerroin 0,32. Lasketaan, kuinka moni söi karhunvatukoita.

$$\begin{aligned} n_{\text{vatukka}} &= 0,32 \cdot n \\ &= 0,32 \cdot 75 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Karhunvatukoita söi 24 karhua.

1.3 Lasketaan, kuinka monta prosenttia enemmän jääkarhuja oli kuin verokarhuja eli vertailukohtana on verokarhujen määrä.

$$\begin{aligned} \frac{n_{\text{jää}} - n_{\text{vero}}}{n_{\text{vero}}} \cdot 100 \% &= \frac{16 - 6}{6} \cdot 100 \% \\ &= 166,66 \dots \% \\ &\approx 167 \% \end{aligned}$$

Jääkarhuja oli 167 % enemmän kuin verokarhuja.

- 1.4 Lasketaan, kuinka monta prosenttia vähemmän verhoakkarhuja oli kuin jääkarhuja eli vertailukohtana on nyt jääkarhujen määrä.

$$\begin{aligned}\frac{n_{\text{jää}} - n_{\text{vero}}}{n_{\text{jää}}} \cdot 100 \% &= \frac{16 - 6}{16} \cdot 100 \% \\ &= 62,5 \% \\ &\approx 63 \%\end{aligned}$$

Verokarhuja oli 63 % vähemmän kuin jääkarhuja.

- 1.5 Paikalle saapuneita teddykarhuja oli 30. Toisaalta paikalle saapuneiden teddykarhujen määrä oli $100 \% - 14 \% = 86 \%$ ilmoittautuneista. Lasketaan ilmoittautuneiden teddykarhujen määrä.

$$\begin{aligned}n_{\text{teddy}} &= (1 - 0,14) \cdot n_{\text{ilm}} \\ n_{\text{teddy}} &= 0,86 \cdot n_{\text{ilm}} \quad || : 0,86 \\ \frac{n_{\text{teddy}}}{0,86} &= n_{\text{ilm}} \\ n_{\text{ilm}} &= \frac{n_{\text{teddy}}}{0,86} \\ &= \frac{30}{0,86} \\ &= 34,88 \dots \\ &\approx 35\end{aligned}$$

Retkelle oli ilmoittautunut 35 teddykarhua.

- 1.6

$$h_{\text{veroton}} = 12$$

$$h_{\text{verollinen}} = 15$$

Arvonlisävero on hintojen erotus, ja veroprosentti lasketaan verottomasta hin-

nasta.

$$\begin{aligned} p_{\text{alv}} &= \frac{h_{\text{verollinen}} - h_{\text{veroton}}}{h_{\text{veroton}}} \cdot 100 \% \\ &= \frac{15 - 12}{12} \cdot 100 \% \\ &= 25 \% \end{aligned}$$

Nallekarkkien arvonlisäveroprosentti on 25 %.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

2. Erilaisia yhtälöitä (12 p.)

2.1 Ratkaise yhtälö $x^2 = 8$. (4 p.)

2.2 Ratkaise yhtälö $x(x + 1) = 2x$. (4 p.)

2.3 Ratkaise yhtälö $(4^x)^2 \cdot 4^{6x} \cdot 4^3 = 4^{12}$. (4 p.)

Ratkaisu:

2.1

$$x^2 = 8$$

$$x = \pm\sqrt{8} \quad \text{4 p. (yht. 4 p.)}$$

Vastaus voitaisiin neliöjuuren laskusääntöjen avulla sieventää muotoon $\pm 2\sqrt{2}$, mutta neliöjuuren laskusäännöt eivät kuulu lyhyen matematiikan opetussuunnitelmaan, eikä niiden käyttöä siten vaadita lyhyen matematiikan kokeessa.

Vastaus: $x = \pm\sqrt{8}$

Vastaus voidaan kirjoittaa myös seuraavassa muodossa:

$$x = \sqrt{8} \text{ tai } x = -\sqrt{8}$$

2.2

Ratkaisuvaihtoehto 1

$$x(x + 1) = 2x$$

$$x \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

$$x^2 + x = 2x \quad || - 2x$$

$$x^2 + x - 2x = 0$$

$$x^2 - x = 0 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

Yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$1x^2 - 1x + 0 = 0.$$

Yhtälö on siis muotoa

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

jossa $a = 1$, $b = -1$ ja $c = 0$.

Ratkaistaan yhtälö toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 0}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{1+1}{2} \text{ tai } x = \frac{1-1}{2}$$

$$x = \frac{2}{2} \text{ tai } x = \frac{0}{2}$$

$$x = 1 \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)} \quad \text{tai } x = 0 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Vastaus: $x = 0$ tai $x = 1$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Tätä ratkaisutapaa ei yleensä opeteta lyhyessä matematiikassa, mutta se on silti

sallittu. Pitkältä matematiikalta lyhyelle vaihtaneet saattavat käyttää sitä.

$$x(x+1) = 2x$$

$$x \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

$$x^2 + x = 2x \quad || - 2x$$

$$x^2 + x - 2x = 0$$

$$x^2 - x = 0 \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)})$$

Otetaan yhtälön vasemmalta puolelta yhteiseksi tekijäksi x .

$$x(x-1) = 0 \quad (1 \text{ p. (yht. 2 p.)})$$

Tulo on nolla täsmälleen silloin, kun jokin sen tekijöistä on nolla.

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 1 = 0 \quad || + 1$$

$$x = 0 \quad (1 \text{ p. (yht. 3 p.)}) \quad \text{tai} \quad x = 1 \quad (1 \text{ p. (yht. 4 p.)})$$

Vastaus: $x = 0$ tai $x = 1$

Ratkaisuvaihtoehto 3

Jos $x = 0$, niin yhtälö

$$x(x+1) = 2x$$

saa muodon

$$0 \cdot (0+1) = 2 \cdot 0 \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)})$$

$$0 = 0,$$

joten yhtälö toteutuu, kun $x = 0$. (1 p. (yht. 2 p.)

Kun $x = 0$, niin voidaan jakaa muuttujalla x ja selvittää toinen ratkaisu:

$$x(x+1) = 2x \quad || : x (\neq 0)$$

$$x+1 = 2 \quad (1 \text{ p. (yht. 3 p.)}) \quad || - 1$$

$$x = 2 - 1$$

$$x = 1$$

Vastaus: $x = 0$ tai $x = 1$ 1 p. (yht. 4 p.)

2.3 Sievennetään yhtälön vasen puoli potenssien laskusäännöillä.

$$\begin{aligned} (4^x)^2 \cdot 4^{6x} \cdot 4^3 &= 4^{12} & \parallel (a^m)^n &= a^{mn} \\ 4^{2x} \cdot 4^{6x} \cdot 4^3 &= 4^{12} & \parallel a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\ 4^{2x+6x+3} &= 4^{12} & \text{2 p. (yht. 2 p.)} \\ 4^{8x+3} &= 4^{12} \end{aligned}$$

Yhtälön molemmilla puolilla on potenssi, jonka kantaluku on 4. Koska potenssit ovat yhtä suuret, on eksponenttien oltava yhtä suuret.

$$\begin{aligned} 8x + 3 &= 12 & \parallel - 3 & \text{1 p. (yht. 3 p.)} \\ 8x &= 12 - 3 \\ 8x &= 9 & \parallel : 8 \\ x &= \frac{9}{8} & \text{1 p. (yht. 4 p.)} \end{aligned}$$

Vastaus: $x = \frac{9}{8}$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

3. Kuntoportaati (12 p.)

Aineisto:

3. A [Kuva: Kuntoportaati](#)

Pietarsaari rakennutti entiselle kaatopaikalle kuntoportaati. Kuvassa [3.A](#) on tarvittavat tiedot portaista.

- Määritä kuntoportaiden kaltevuuskulma asteen tarkkuudella.
- Kuinka suuri on kuntoportaiden keskimääräinen etenemä, eli kahden peräkkäisen askelman etureunojen välinen vaakasuora etäisyys? Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.
- Kuinka suuri korkeusero olisi vaadittu 120 askelman kuntoportaisiin, joissa askelman korkeus olisi sama kuin toteutuneissa portaissa? Anna vastaus 0,1 metrin tarkkuudella.

Ratkaisu:

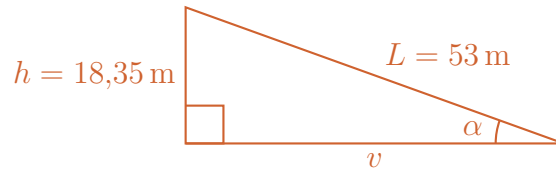
Pisteytyksestä: YTL:n Alustavien hyvän vastauksen piirteiden (luettu 24.9.2026 klo 20.30) mukaan yhden pisteen saa mielekkäästä (lähes) oikeasta (trigonometrisestä) yhtälöstä tai lausekkeesta vaiheeseen a tai b. Tämän vuoksi vaiheesta a voi saada 3-4 pistettä ja vaiheesta b 4-5 pistettä, kuitenkin niin, että vaiheista a ja b saa yhteensä 8 pistettä.

Alla on tehty pisteytys sillä tulkinnalla, että vaiheesta a saa 3 pistettä ja vaiheesta b 5 pistettä. Voidaan myös tulkita, että molemmista kohdista saa 4 pistettä. Ehdotamme, että opettajat tulkitsevat tämän alustavassa arvioinnissa sen mukaan, kumpi on kokelaalle edullisempaa.

Merkitään kuvan 3.A tietoja seuraavasti: korkeusero $h = 18,35$ m, portaiden pituus (kalteva osa) $L = 53$ m ja askelmien lukumäärä $n = 93$.

Käsitellään portaita suorakulmaisena kolmiona, jonka hypotenuusa on $L = 53$ m. Kolmion kateetit ovat (pystysuora) korkeus $h = 18,35$ m ja portaiden vaakasuora kokonaispituus v .

Kuvan piirtämistä ei vaadita, jos muuttujat on selitetty sanallisesti esimerkiksi kuten yllä. Hyvää ajankäyttöä on hahmotella kuva nopeasti suttupaperille eikä alkaa piirtää sitä millään ohjelmalla.



- a. Ratkaistaan kaltevuuskulma α . Kaltevuuskulma on kateetin v ja hypotenuusan välinen kulma.

$$\sin \alpha = \frac{h}{L} \quad \parallel h = 18,35 \text{ m}, L = 53 \text{ m}$$

$$\sin \alpha = \frac{18,35}{53} \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

$$\alpha = 20,256 \dots^\circ \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

Kaltevuuskulma on $20,256 \dots^\circ \approx 20^\circ$. 1 p. (yht. 3 p.)

Vastaus: 20°

b.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Ratkaistaan portaiden vaakasuora kokonaispituus v Pythagoraan lauseen avulla.

$$v^2 + h^2 = L^2$$

$$v^2 + 18,35^2 = 53^2 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} \quad \parallel - 18,35^2$$

$$v^2 = 53^2 - 18,35^2 \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

$$v = \pm \sqrt{53^2 - 18,35^2}$$

$$v = \pm 49,722 \dots$$

Negatiivinen pituus ei ole mahdollinen, joten vaakasuora pituus on $v = 49,722 \dots \text{ m}$.

1 p. (yht. 6 p.)

Vaakasuoja kokonaispituus jakautuu tasan 93 askelman etenemän kesken, joten keskimääräinen etenemä saadaan jakamalla kokonaispituus askelmien lukumäärällä.

$$\frac{49,7220 \dots \text{ m}}{93} \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)} = 0,53464 \dots \text{ m}$$

$$\approx 0,53 \text{ m} \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

$$= 53 \text{ cm}$$

Keskimääräinen etenemä on $0,5346 \dots \text{ m} \approx 0,53 \text{ m}$.

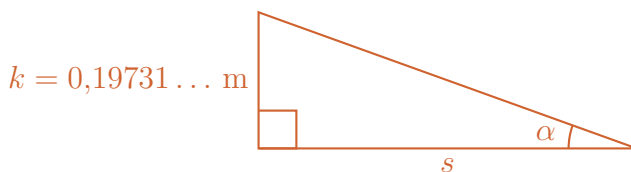
Vastaus: 0,53 m

Ratkaisuvaihtoehto 2

Lasketaan ensin portaiden keskimääräinen askelman korkeus k jakamalla portaiden korkeus askelmien lukumäärällä.

$$k = \frac{18,35 \text{ m}}{93} \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} = 0,19731 \dots \text{ m} \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

Yhden portaan muodostama kolmio on yhdenmuotoinen koko portaikon muodostaman kolmion kanssa, joten kaltevuuskulma on siinä sama kuin koko portaikossa. Merkitään yhden portaan syvyyttä (sivusuuntaista etenemää) kirjaimella s .



Ratkaistaan syvyys s käyttämällä a-kohdassa laskettua kaltevuuskulmaa $\alpha = 20,256 \dots^\circ$.

$$\tan 20,256 \dots^\circ = \frac{0,19731 \dots}{s} \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)} \quad || \cdot s$$

$$s \tan 20,256 \dots^\circ = 0,19731 \dots \quad || : \tan 20,256 \dots^\circ$$

$$s = \frac{0,19731 \dots}{\tan 20,256 \dots^\circ}$$

$$s = 0,5346 \dots \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

Keskimääräinen etenemä on $0,5346 \text{ m} \approx 0,53 \text{ m}$.

1 p. (yht. 8 p.)

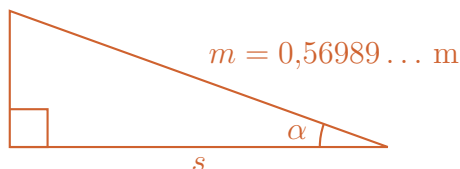
Vastaus: $0,53 \text{ m}$

Ratkaisuvaihtoehto 3

Lasketaan ensin edetty matka porrasta kohti jakamalla kokonaismatka askelmien lukumäärällä.

$$m = \frac{53 \text{ m}}{93} = 0,56989 \dots \text{ m}$$

Yhden portaan muodostama kolmio on yhdenmuotoinen koko portaikon muodostaman kolmion kanssa, joten kaltevuuskulma on siinä sama kuin koko portaikossa. Merkitään yhden portaan syvyyttä (sivusuuntaista etenemää) kirjaimella s .



Ratkaistaan syvyys s käyttämällä a-kohdassa laskettua kaltevuuskulmaa $\alpha = 20,256 \dots^\circ$.

$$\cos 20,256 \dots^\circ = \frac{s}{0,56989 \dots} \quad || \cdot 0,56989 \dots$$

$$0,56989 \dots \cdot \cos 20,256 \dots^\circ = s$$

$$s = 0,56989 \dots \cdot \cos 20,256 \dots^\circ$$

$$s = 0,5346 \dots$$

Keskimääräinen etenemä on $0,5346 \text{ m} \approx 0,53 \text{ m}$.

1 p. (yht. 8 p.)

Vastaus: $0,53 \text{ m}$

Vastaus voidaan antaa myös senttimetreinä muodossa 53 cm . Senttimetreiksi muuttaminen ei ole pakollista, sillä pyydettiin senttimetrin tarkkuutta eikä sitä, että vastaus annettaisiin senttimetreinä.

c.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Lasketaan ensin toteutuneiden portaiden keskimääräinen askelman korkeus k jakamalla portaiden korkeus askelmien lukumäärällä.

$$k = \frac{18,35 \text{ m}}{93} \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)}) = 0,19731 \dots \text{ m} \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)})$$

Jos askelman korkeus k on laskettu jo kohdassa b, tässä kohtaa riittää mainita, että b-kohdassa saatiin askelman korkeudeksi $0,19731 \dots \text{ m}$.

Koska askelman korkeus k pysyy samana, portaiden kokonaiskorkeus saadaan kertomalla k askelmien lukumäärällä. 120 askelman portaissa kokonaiskorkeus on siis

$$120 \cdot 0,19731 \dots \text{ m} \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)}) = 23,6774 \dots \text{ m}$$

Korkeusero olisi $23,6774 \dots \text{ m} \approx 23,7 \text{ m}$. (1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: 23,7 m

Ratkaisuvaihtoehto 2

Kun askelman korkeus on vakio, ovat askelmien määrä ja portaiden kokonaiskorkeus suoraan verrannollisia. (1 p. (yht. 9 p.)

Merkitään 120 askelman portaiden korkeutta kirjaimella x .

Askelmien määrä	Portaiden kokonaiskorkeus
93	18,35
120	x

Suoraan verrannollisten suureiden suhde on vakio. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{93}{18,35} = \frac{120}{x} \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)}) \quad || \cdot 18,35x$$

$$18,35x \cdot \frac{93}{18,35} = 18,35x \cdot \frac{120}{x}$$

$$93x = 120 \cdot 18,35$$

$$93x = 2202 \quad || : 93$$

$$x = 23,677 \dots \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)})$$

Korkeusero olisi $23,6774 \dots \text{ m} \approx 23,7 \text{ m}$. 1 p. (yht. 12 p.)

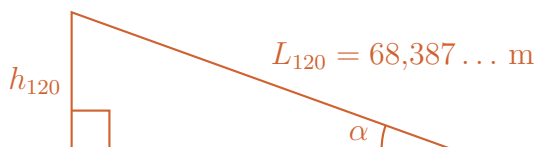
Vastaus: 23,7 m

Ratkaisuvaihtoehto 3

Tässä ratkaisutavassa hyödynnetään vaiheessa a laskettua kaltevuuskulmaa α .

Kun askelmia on 93:n sijasta 120, portaiden pituus tulee $\frac{120}{93}$ -kertaiseksi. 1 p. (yht. 9 p.)
 120 askeleen portaiden pituus on siis

$$\begin{aligned} L_{120} &= L \cdot \frac{120}{93} \\ &= 53 \text{ m} \cdot \frac{120}{93} \\ &= 68,387 \dots \text{ m} \end{aligned} \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$



Ratkaistaan korkeusero h_{120} käyttämällä a-kohdassa laskettua kulmaa $\alpha = 20,256 \dots^\circ$.

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{h_{120}}{L_{120}} \\ \sin \alpha &= \frac{h_{120}}{68,387 \dots} \quad || \cdot 68,387 \dots \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)} \\ h_{120} &= 68,387 \dots \text{ m} \cdot \sin 20,256 \dots^\circ \\ h_{120} &= 23,677 \dots \text{ m} \end{aligned}$$

Korkeusero olisi $23,677 \dots \text{ m} \approx 23,7 \text{ m}$. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: 23,7 m

Laskuissa hyväksytään luku 92 luvun 93 tilalla, kunhan on selitetty esimerkiksi ettei ylätasoa huomioida.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

4. Neljä pientä laskua (12 p.)

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset lukuina ilman välivaiheita ja perusteluja. Tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria. Kukin vastaus on yksi luku.

4.1 Lukujen 8, z ja 6 keskiarvo on 10. Määritä luku z . (3 p.)

$z =$

4.2 Aritmeettisen lukujonon ensimmäinen jäsen on 70 ja kolmas jäsen 55. Mikä on jonon neljäs jäsen? (3 p.)

Neljäs jäsen on

4.3 Joel Dickerin kirjaa "Totuus Harry Quebertin tapauksesta" myydään pokkarina hintaan 8,40 euroa. Mikä on kirjan veroton hinta, kun arvonlisävero on 14 %? Anna vastaus sentin tarkkuudella. (3 p.)

euroa

4.4 Hyllyllä on yhdenmuotoisia suihkugeelipulloja kahta eri kokoa: 100 ml ja 285 ml. Pienemmän pullon pohjan halkaisija on 4,8 cm. Mikä on isomman pullon pohjan halkaisija? Anna vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella. (3 p.)

cm

Ratkaisu:

4.1. Keskiarvo lasketaan summaamalla luvut yhteen ja jakamalla lukujen määrällä.

$$\frac{8 + z + 6}{3} = 10$$

$$\frac{z + 14}{3} = 10 \quad || \cdot 3$$

$$z + 14 = 30 \quad || -14$$

$$z = 16$$

Luku z on siis 16.

Vastaus: 16 3 p. (yht. 3 p.)

4.2.

$$a_1 = 70$$

$$a_3 = 55$$

Aritmeettisessa lukujonossa jonon seuraava jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen jonon erotusluku. Jonon kolmas jäsen saadaan siis lisäämällä erotusluku kaksi kertaa ensimmäiseen jäseneen.

$$70 + 2 \cdot d = 55 \quad || -70$$

$$2 \cdot d = -15 \quad || : 2$$

$$d = -7,5$$

Neljäs jäsen saadaan lisäämällä kolmanteen jäseneen erotusluku yhden kerran.

$$a_4 = 55 + (-7,5)$$

$$= 55 - 7,5$$

$$= 47,5$$

Jonon neljäs jäsen on siis 47,5.

Vastaus: 47,5 3 p. (yht. 3 p.)

- 4.3. Hinta, jolla pakkaria myydään, sisältää arvonlisäveron. Verollinen hinta saadaan siis lisäämällä arvonlisävero verottomaan hintaan. Merkitään verotonta hintaa kirjaimella x .

$$x \cdot 1,14 = 8,40 \quad || : 1,14$$

$$x = \frac{8,40}{1,14}$$

$$= 7,3684 \dots$$

$$\approx 7,37$$

Veroton hinta on siis 7,37 euroa.

Vastaus: 7,37 3 p. (yht. 3 p.)

- 4.4. Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on niiden mittakaava korotettuna kolmanteen potenssiin. Ratkaistaan mittakaava.

$$\begin{aligned}k^3 &= \frac{285}{100} \\k^3 &= 2,85 \quad \parallel \sqrt[3]{} \\k &= \sqrt[3]{2,85} \\&= 1,417799 \dots\end{aligned}$$

Mittakaava kertoo yhdenmuotoisten kappaleiden vastinosien pituuksien suhteen. Näin ollen isomman pullon pohjan halkaisija on:

$$\begin{aligned}d_{\text{isompi}} &= 4,8 \text{ cm} \cdot 1,417799 \dots \\&= 6,805439 \dots \text{ cm} \\&\approx 6,8 \text{ cm}\end{aligned}$$

Vastaus: 6,8

3 p. (yht. 3 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

5. Eksponentiaalisesti kasvava vaikeus (12 p.)

Monissa peleissä tiettyyn tasoon vaadittava kokonaispistemäärä noudattaa jossain määrin eksponentiaalista mallia $A \cdot B^m$, jossa $m \geq 2$ on taso, jolle nouseaan. Aloittaessaan pelin pelaaja on tasolla 1. Eräässä pelissä pääseminen tasolle 25 edellyttää 710 000 kokonaispisteen keräämistä ja pääseminen tasolle 26 vaatii vielä 190 000 pistettä lisää. Arvioi mallin avulla, kuinka monta lisäpistettä tarvitaan nousuun tasolta 42 tasolle 43.

Ratkaisu:

Ratkaisuvaihtoehto 1

$$P(m) = A \cdot B^m.$$

Tasolle 25 pääseminen vaatii 710 000 pistettä, joten

$$P(25) = A \cdot B^{25} = 710\,000. \quad (2 \text{ p. (yht. 2 p.)})$$

Tasolle 26 pääseminen vaatii 190 000 pistettä enemmän eli yhteensä $710\,000 + 190\,000 = 900\,000$ pistettä 1 p. (yht. 3 p.), joten

$$P(26) = A \cdot B^{26} = 900\,000. \quad (1 \text{ p. (yht. 4 p.)})$$

Jakamalla yhtälöt puolittain keskenään A supistuu pois, jolloin B saadaan ratkaistua.

$$\frac{A \cdot B^{26}}{A \cdot B^{25}} = \frac{900\,000}{710\,000} \quad (1 \text{ p. (yht. 5 p.)})$$

$$B = \frac{900\,000}{710\,000}$$

$$B = \frac{90}{71} \quad (1 \text{ p. (yht. 6 p.)})$$

$$B = 1,26760 \dots$$

Vakio B kannattaa pitää murtolukumuodossa tai käyttää niin montaa desimaalia kuin laskin antaa, jotta pyöristysvirheet eivät kasaudu laskussa. Eksponentit ovat niin suuria, että pienikin muutos vakion B arvossa voi muuttaa tulosta merkittävästi.

Ratkaistaan A ensimmäisestä yhtälöstä.

$$\begin{aligned}
 A \cdot B^{25} &= 710\,000 & \| : B^{25} \\
 A &= \frac{710\,000}{B^{25}} \quad (1 \text{ p. (yht. 7 p.)}) & \| B = \frac{90}{71} \\
 A &= \frac{710\,000}{\left(\frac{90}{71}\right)^{25}} \quad (1 \text{ p. (yht. 8 p.)}) \\
 A &= 1890,838 \dots
 \end{aligned}$$

Siis tasolle m pääseminen vaatii kokonaispisteitä määrän

$$A \cdot B^m = 1890,838 \dots \cdot \left(\frac{90}{71}\right)^m.$$

Lasketaan tasoille 42 ja 43 vaadittavat pistemäärät.

$$P(42) = 1890,838 \dots \cdot \left(\frac{90}{71}\right)^{42} \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)}) = 39\,993\,469,4 \dots$$

$$P(43) = 1890,838 \dots \cdot \left(\frac{90}{71}\right)^{43} \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)}) = 50\,695\,947,1 \dots$$

Siis tasolle 42 tarvitaan 39 993 469,4 ... pistettä ja tasolle 43 tarvitaan 50 695 947,1 ... pistettä.

Tasolta 42 tasolle 43 nousuun tarvittava lisäpistemäärä on erotus $P(43) - P(42)$.

$$\begin{aligned}
 P(43) - P(42) &= 50\,695\,947,1 \dots - 39\,993\,469,4 \dots \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)}) \\
 &= 10\,702\,477,7 \dots \\
 &\approx 11\,000\,000 \quad (1 \text{ p. (yht. 12 p.)})
 \end{aligned}$$

Vastaus: 11 000 000 lisäpistettä

Ratkaisuvaihtoehto 2

Ratkaistaan B samalla tavalla kuin ratkaisuvaihtoehdossa 1 ilman että ratkaistaan vakiota A , jota ei tarvita vastauksen saamiseen.

$$P(m) = A \cdot B^m.$$

Tasolle 25 pääseminen vaatii 710 000 pistettä, joten

$$P(25) = A \cdot B^{25} = 710\,000. \quad (2 \text{ p. (yht. 2 p.)})$$

Tasolle 26 pääseminen vaatii 190 000 pistettä enemmän eli yhteensä $710\,000 + 190\,000 = 900\,000$ pistettä 1 p. (yht. 3 p.), joten

$$P(26) = A \cdot B^{26} = 900\,000. \quad (1 \text{ p. (yht. 4 p.)})$$

Jakamalla yhtälöt puolittain keskenään A supistuu pois, jolloin B saadaan ratkaistua.

$$\frac{A \cdot B^{26}}{A \cdot B^{25}} = \frac{900\,000}{710\,000} \quad (1 \text{ p. (yht. 5 p.)})$$

$$B = \frac{900\,000}{710\,000}$$

$$B = \frac{90}{71} \quad (1 \text{ p. (yht. 6 p.)})$$

$$B = 1,26760 \dots$$

Kun taso kasvaa yhdellä, vaadittava pistemäärä tulee B -kertaiseksi. 1 p. (yht. 7 p.)

Tasolta 26 tasolle 42 on $42 - 26 = 16$ tasoa, joten tason 42 pistemäärä saadaan tason 26 pistemäärästä $P(26) = 900\,000$ kertomalla luvulla B^{16} . 1 p. (yht. 8 p.)

$$P(42) = P(26) \cdot B^{16} \quad \parallel \quad P(26) = 900\,000, \quad B = \frac{90}{71}$$

$$= 900\,000 \cdot \left(\frac{90}{71}\right)^{16} \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

$$= 39\,993\,469,4 \dots$$

Siis tasolle 42 tarvitaan 39 993 469,4 ... pistettä.

Tasolta 42 tasolle 43 on yksi taso, joten tason 43 pistemäärä saadaan kertomalla tason 42 pistemäärä luvulla B .

$$P(43) = P(42) \cdot B$$

$$P(43) = 39\,993\,469,4 \dots \cdot \frac{90}{71} \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)})$$

$$P(43) = 50\,695\,947,1 \dots$$

Siis tasolle 43 tarvitaan 50 695 947,1 . . . pistettä.

Lasketaan tasolta 42 tasolle 43 nousuun tarvittava lisäpistemäärä.

$$\begin{aligned} P(43) - P(42) &= 50\,695\,947,1 \dots - 39\,993\,469,4 \dots && \text{1 p. (yht. 11 p.)} \\ &= 10\,702\,477,7 \dots \\ &\approx 11\,000\,000 && \text{1 p. (yht. 12 p.)} \end{aligned}$$

Vastaus: 11 000 000 lisäpistettä

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

6. Normaalijakautuneet omenat (12 p.)

Normaalijakaumalla voidaan arvioida hedelmien painoa, vaikka se ei ole täysin normaalijakautunut. Tutkimuksessa erään otoksen omenoiden painojen keskiarvo oli 159,3 grammaa ja keskihajonta 5,3 grammaa. Arvioi normaalijakauman avulla, millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu omena painaa vähintään 170,0 grammaa.

Ratkaisu:

Tehtävässä ei saa käyttää CAS-ohjelmia, joten käytetään Mafy-taulukkoissa olevaa normaalijakauman kertymäfunktion arvojen taulukkoa.

Jotta kertymäfunktion arvojen taulukkoa voidaan käyttää, pitää muuttujan arvo normittaa. Normittamisessa lasketaan, kuinka monen keskihajonnan päässä keskiarvosta muuttujan arvo on.

Normitetaan omenan paino $x = 170$ g:

$$z = \frac{170 - 159,3}{5,3} = 2,01886 \dots$$

2 p. (yht. 2 p.)
2 p. (yht. 4 p.)
2 p. (yht. 6 p.)

170 g painava omena on siis hieman yli kahden keskihajonnan verran keskiarvoa painavampi.

Kysytään, millä todennäköisyydellä omena painaa vähintään 170 g. Tämä on sama todennäköisyys kuin sillä, millä todennäköisyydellä normitettu muuttujan arvo on vähintään 2,01886 ...

Arvoa 2,01886 ... ei ole muuttujan arvona kertymäfunktion arvojen taulukossa, joten pitää valita muuttujan arvo, joka on mahdollisimman lähellä tätä arvoa. Kyseinen arvo on 2,02.

z	0	1	2
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324
0,7	0,7580	0,7611	0,7642
0,8	0,7881	0,7910	0,7939
0,9	0,8159	0,8186	0,8212
1,0	0,8413	0,8438	0,8461
1,1	0,8643	0,8665	0,8686
1,2	0,8849	0,8869	0,8888
1,3	0,9032	0,9049	0,9066
1,4	0,9192	0,9207	0,9222
1,5	0,9332	0,9345	0,9357
1,6	0,9452	0,9463	0,9474
1,7	0,9554	0,9564	0,9573
1,8	0,9641	0,9649	0,9656
1,9	0,9713	0,9719	0,9726
2,0	0,9772	0,9778	0,9783

Kuvakaappausta taulukosta ei vaadita.

Taulukosta nähdään, että kertymäfunktion arvo kohdassa $z = 2,02$ on $\Phi(2,02) \approx$

0,9783. Tämä tarkoittaa, että todennäköisyys sille, että muuttujan arvo on pienempi kuin 2,02, on 0,9783. 3 p. (yht. 9 p.) Siten todennäköisyys, että muuttujan arvo on vähintään 2,02, on

$$1 - 0,9783 \text{ 1 p. (yht. 10 p.) } = 0,0217 \approx 0,022. \text{ 2 p. (yht. 12 p.) }$$

Vastaus: 0,022

Vastaus voidaan antaa myös prosentteina. Myös kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella annettu vastaus hyväksytään.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

7. Kalapasta yhdelle (12 p.)

Pastassa on 69,5 % hiilihydraatteja ja 14,5 % proteiinia. Kalasäilykkeessä on 1,6 % hiilihydraatteja ja 19,5 % proteiinia. Pastasta ja kalasäilykkeestä tehdään annos, johon halutaan 70 grammaa hiilihydraatteja ja 24 grammaa proteiinia. Kuinka monta grammaa pastaa ja kuinka monta grammaa kalaa tarvitaan, jotta tämä toteutuu?

Ratkaisu:

Merkitään annokseen tulevan pastan määrää grammoina kirjaimella p ja kalasäilykkeen määrää grammoina kirjaimella k . 1 p. (yht. 1 p.) Voidaan käyttää myös esimerkiksi kirjaimia x ja y , mutta kun käyttää alkukirjaimia, on helppo muistaa, mitä on laske-massa.

Pastan hiilihydraattipitoisuus on $69,5\% = 0,695$ ja proteiinipitoisuus $14,5\% = 0,145$. Kalasäilykkeen hiilihydraattipitoisuus on $1,6\% = 0,016$ ja proteiinipitoisuus $19,5\% = 0,195$.

Hiilihydraattien määrä on

- pastassa $0,695p$ 1 p. (yht. 2 p.)
- kalasäilykkeessä $0,016k$ 1 p. (yht. 3 p.)
- yhteensä $0,695p + 0,016k$.

Proteiinien määrä on

- pastassa $0,145p$ 1 p. (yht. 4 p.)
- kalasäilykkeessä $0,195k$ 1 p. (yht. 5 p.)
- yhteensä $0,145p + 0,195k$.

Yllä näytetyistä välivaiheista saa pisteitä. Yhtälöparin saa kuitenkin muodostaa myös ilman välivaiheita, jolloin nämä pisteet saa yhtälöparin muodostamisen yhteydessä.

Muodostetaan yhtälöpari annettujen tietojen perusteella. 1 p. (yht. 6 p.)

Hiilihydraatteja pitää olla 70 g, ja toisaalta hiilihydraattien määrä on yhteensä $0,695p + 0,016k$. Tästä saadaan yhtälö

$$0,695p + 0,016k = 70.$$

Proteiinia pitää olla 24 g, ja toisaalta proteiinin määrä on yhteensä $0,145p + 0,195k$. Tästä saadaan yhtälö

$$0,145p + 0,195k = 24.$$

$$\begin{cases} 0,695p + 0,016k = 70 & \text{1 p. (yht. 7 p.)} \\ 0,145p + 0,195k = 24 & \text{1 p. (yht. 8 p.)} \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan CAS-ohjelmalla $k = 49,022 \dots, p = 99,590 \dots$
 2 p. (yht. 10 p.)

Siis annokseen tarvitaan $99,590 \dots \text{ g} \approx 100 \text{ g}$ pastaa 1 p. (yht. 11 p.) ja $49,022 \dots \text{ g} \approx 49 \text{ g}$ kalasäilykettä. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Annokseen tarvitaan 100 g pastaa ja 49 g kalasäilykettä.

Yhtälöparin ratkaisu ilman CAS-ohjelmaa, ratkaisuvaihtoehto 1:

Ratkaistaan yhtälöpari kertomalla yhtälöt sopivilla luvuilla niin, että muuttujan k kertoimet tulevat toistensa vastaluvuiksi.

$$\begin{cases} 0,695p + 0,016k = 70 & \parallel \cdot 0,195 \\ 0,145p + 0,195k = 24 & \parallel \cdot (-0,016) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,135525p + 0,00312k = 13,65 \\ -0,00232p - 0,00312k = -0,384 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen.

$$0,135525p - 0,00232p + 0,00312k - 0,00312k = 13,65 - 0,384$$

$$0,133205p = 13,266 \quad \parallel : 0,133205$$

$$p = 99,590 \dots$$

Sijoitetaan saatu p :n arvo yhtälöön $0,145p + 0,195k = 24$.

$$0,145p + 0,195k = 24 \quad \parallel p = 99,590 \dots$$

$$0,145 \cdot 99,590 \dots + 0,195k = 24$$

$$14,440 \dots + 0,195k = 24 \quad \parallel - 14,440 \dots$$

$$0,195k = 9,559 \dots \quad \parallel : 0,195$$

$$k = 49,022 \dots$$

Yhtälöparin ratkaisu ilman CAS-ohjelmaa, ratkaisuvaihtoehto 2:

Ratkaistaan jommastakummasta yhtälöstä jompikumpi muuttuja ja sijoitetaan tulos toiseen yhtälöön. Ratkaistaan vaikkapa yhtälöstä

$$0,695p + 0,016k = 70$$

muuttuja k .

$$0,695p + 0,016k = 70 \quad || - 0,695p$$

$$0,016k = 70 - 0,695p \quad || : 0,016$$

$$k = \frac{70}{0,016} - \frac{0,695}{0,016}p$$

$$k = 4375 - 43,4375p \quad (1)$$

Sijoitetaan tulos yhtälöparin toiseen yhtälöön.

$$0,145p + 0,195k = 24 \quad || k = 4375 - 43,4375p$$

$$0,145p + 0,195(4375 - 43,4375p) = 24$$

$$0,145p + 853,125 - 8,4703125p = 24$$

$$-8,3253125p + 853,125 = 24 \quad || - 853,125$$

$$-8,3253125p = 24 - 853,125$$

$$-8,3253125p = -829,125 \quad || : (-8,3253125)$$

$$p = 99,590 \dots$$

Lasketaan k sijoittamalla tulos aiemmin saatuun yhtälöön (1).

$$k = 4375 - 43,4375p \quad || p = 99,590 \dots$$

$$k = 4375 - 43,4375 \cdot 99,590 \dots$$

$$k = 49,022 \dots$$

Pisteytyksestä:

- Pastan määrää ja kalasäilykkeen määrää merkitty muuttujilla 1 p.
- Idea siitä, että tehtävä ratkeaa yhtälöparin avulla 1 p.

- Yhtälöt 3 p./kpl, osapisteitä voi saada kuten yllä on näytetty
- Yhtälöpari ratkaistu oikein 1 p./muuttuja
- Vastaus järkevästi pyöristettynä 1 p./muuttuja

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

8. Talletusennätys (12 p.)

Aineisto:

8. A [Teksti: Suomen talletusennätys](#)

Tekstissä [8.A](#) on tietoa siitä, miten suomalaisten ennätysosuudet talletukset vuoden 2025 kesäkuun lopussa olivat jakautuneet kolmeen eri talletustyyppiin: yön yli -talletukset (esimerkiksi käyttötilit), määräaikaistalletukset ja sijoitustalletukset.

- Piirrä ympyräkaavio, josta näkyy, miten talletukset olivat jakautuneet prosentuaalisesti yllä mainittuihin kolmeen eri talletustyyppiin kesäkuun 2025 lopussa.
- Arvioi kaikkien määräaikaistalletusten arvoa kuukautta aikaisemmin eli vuoden 2025 toukokuun lopussa käyttämällä tekstissä [8.A](#) annettuja tietoja.
- Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että kaikilla määräaikaistalletuksilla oli sama kahden kalenterivuoden määräaika ja määräaikaistalletusten kokonaismäärä oli ensimmäisen vuoden alussa 13,6 miljardia euroa. Ensimmäisenä vuonna määräaikaistalletusten vuosikorkokanta oli 3,17 % ja toisena vuonna 2,30 %. Kuinka paljon näistä talletuksista saatiin nettokorkoa yhteensä näiden kahden vuoden aikana, kun lähdevero on 30 %? Anna vastaus miljoonan euron tarkkuudella.

Ratkaisu:

- Lasketaan eri talletustyyppien osuudet prosentteina kokonaistalletuskannasta (114,7 miljardia euroa) kesäkuun 2025 lopussa:

Yön yli -talletukset (69,9 miljardia euroa):

$$\frac{69,9 \text{ mrd. €}}{114,7 \text{ mrd. €}} = 0,60941 \dots \approx 60,9 \%$$

Määräaikaistalletukset (15,4 miljardia euroa):

$$\frac{15,4 \text{ mrd. €}}{114,7 \text{ mrd. €}} = 0,13426 \dots \approx 13,4 \%$$

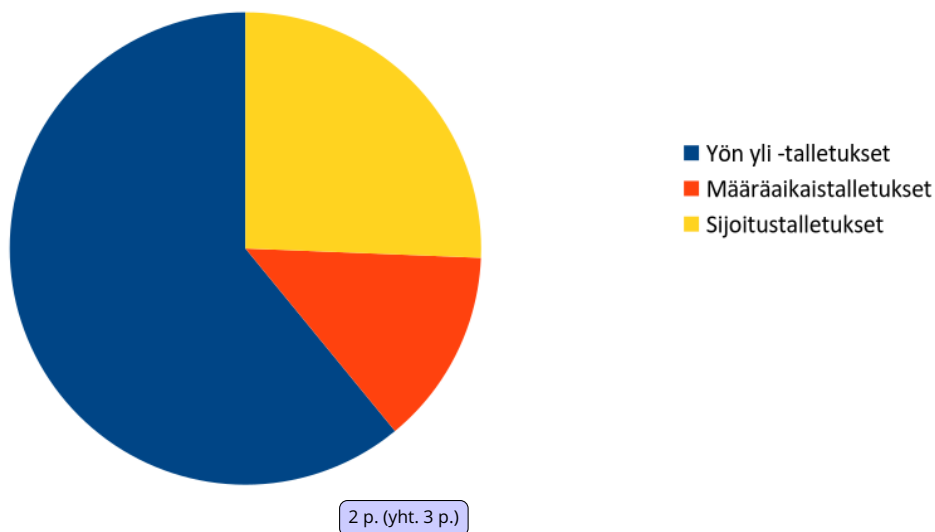
Sijoitustalletukset (29,4 miljardia euroa):

$$\frac{29,4 \text{ mrd. €}}{114,7 \text{ mrd. €}} = 0,25632 \dots \approx 25,6 \%$$

1 p. (yht. 3 p.)

Piirretään ympyräkaavio. **Alla oleva kaavio on piirretty Collabora Calc -ohjelmalla.**

Eri talletustyyppien osuus kotitalouksien kokonaistalletuskannasta
kesäkuun 2025 lopussa



- b) Tekstissä 8.A ilmoitetaan määräaikaistalletusten vuosikasvuvauhdiksi 10,1 % kesäkuussa 2025. Kesäkuun 2025 lopussa määräaikaistalletusten arvo oli 15,4 miljardia euroa.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Oletetaan, että vuotuinen kasvu jakautui tasaisesti jokaiselle kuukaudelle siten, että joka kuukausi kasvuprosentti oli yhtä suuri. Lasketaan yhden korkokauden (kuukauden) korkoprosentti p :

$$p = \frac{\text{vuotuinen korkoprosentti}}{m} = \frac{10,1 \%}{12} = 0,84166 \dots \% \quad 1 \text{ p. (yht. 4 p.)}$$

Muodostetaan kuukausittainen korkotekijä q :

$$\begin{aligned} q &= 1 + \frac{p}{100} \\ &= 1 + \frac{0,84166 \dots}{100} \\ &= 1,0084166 \dots \end{aligned}$$

Lasketaan toukokuun alkupääoma K :

$$K_1 = K \cdot q$$

$$15,4 \text{ mrd. €} = K \cdot 1,0084166 \dots$$

$$K = \frac{15,4 \text{ mrd. €}}{1,0084167 \dots} \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

$$= 15,2714 \dots \text{ mrd. €}$$

$$\approx 15,3 \text{ mrd. €} \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

Vastaus: Toukokuun arvo oli 15,3 miljardia euroa.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Lasketaan toukokuun 2025 lopun arvo käyttämällä yksinkertaisen koron kaavaa $r = kit$, kun korkoaika on $t = \frac{1}{12}$ vuotta (yksi kuukausi).

Lasketaan vuotuinen korkokanta i :

$$i = \frac{p}{100} = \frac{10,1}{100} = 0,101$$

Merkitään toukokuun 2025 lopun kantaa alkupääomalla k . Kesäkuun 2025 lopun kanta (15,4 mrd. €) saadaan lisäämällä alkupääomaan k yhden kuukauden korko:

$$15,4 = k + r \quad || r = kit$$

$$15,4 = k + k \cdot i \cdot t$$

Sijoitetaan yllä olevaan yhtälöön korkokanta $i = 0,101$ ja korkoaika $t = \frac{1}{12}$:

$$15,4 = k + k \cdot 0,101 \cdot \frac{1}{12} \quad \text{2 p. (yht. 5 p.)}$$

$$15,4 \text{ mrd. €} = k \left(1 + 0,101 \cdot \frac{1}{12} \right)$$

$$k = \frac{15,4 \text{ mrd. €}}{1 + 0,101 \cdot \frac{1}{12}}$$

Ratkaistaan yhtälö laskinohjelmalla, jolloin toukokuun lopun talletukseksi k saadaan:

$$k = 15,2714 \dots \text{ mrd. €} \approx 15,3 \text{ mrd. €} \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

Vastaus: Toukokuun arvo oli 15,3 mrd. €.

Ratkaisuvaihtoehto 3

Oletetaan, että talletuskanta kasvaa jokaisena kuukautena samalla suhteellisella kertoimella q . Tällöin 12 kuukauden kuluttua eli vuoden päästä talletuskanta on q^{12} -kertaistunut. Toisaalta tekstin 8.A mukaan vuotuinen kasvuvauhti on 10,1 % eli talletuskanta on vuoden aikana $1 + 0,101 = 1,101$ -kertaistunut. Ratkaistaan tästä yhden korkokuukauden korkokerroin:

$$\begin{aligned} q^{12} &= 1,101 \\ q &= \sqrt[12]{1,101} \\ &= 1,00805 \dots \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} \end{aligned}$$

Merkitään kesäkuun 2025 kantaa kasvaneella pääomalla $K_1 = 15,4$ mrd. €. Lasketaan toukokuun alkupääoma K :

$$\begin{aligned} K_1 &= K \cdot q \\ 15,4 \text{ mrd. €} &= K \cdot 1,00805 \dots \\ K &= \frac{15,4 \text{ mrd. €}}{1,00805 \dots} \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)} \\ &= 15,2770 \dots \text{ mrd. €} \\ &\approx 15,3 \text{ mrd. €} \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)} \end{aligned}$$

Vastaus: Toukokuun arvo oli 15,3 miljardia euroa.

c) Lähtöarvot:

- Alkupääoma $P = 13,6$ mrd. € = 13 600 milj. €

- 1. vuoden bruttokorkokanta 3,17 %
- 2. vuoden bruttokorkokanta 2,30 %
- Lähdevero 30 %

Koska lähdevero on 30 %, tallettajalle jäävä nettokorko on $100 \% - 30 \% = 70 \%$ bruttokorosta. Lasketaan nettokorkokannat kummallekin vuodelle:

$$1. \text{ vuoden nettokorkokanta } r_{1,\text{netto}} = 0,70 \cdot 3,17 \% = 2,219 \% \quad (1 \text{ p. (yht. 7 p.)})$$

$$2. \text{ vuoden nettokorkokanta } r_{2,\text{netto}} = 0,70 \cdot 2,30 \% = 1,610 \% \quad (1 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

Pisteytyksestä: Jos lähdevero on jätetty huomioimatta, nettokorkokantojen pisteitä (2 p.) ei myönnetä ja tehtävän loppuosasta (4 p.) voi ansaita enintään 3 pistettä.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Lasketaan ensimmäisen vuoden nettokorko:

$$N_1 = 13\,600 \text{ milj. €} \cdot 0,02219 = 301,784 \text{ milj. €} \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

Toisen vuoden alussa pääoma on $13\,600 + 301,784 = 13\,901,784 \text{ milj. €}$. (1 p. (yht. 10 p.)

Lasketaan toisen vuoden aikana kertynyt nettokorko:

$$N_2 = 13\,901,784 \text{ milj. €} \cdot 0,01610 = 223,8187224 \text{ milj. €} \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)})$$

Lasketaan saatu nettokorko yhteensä:

$$\begin{aligned} N_{\text{yht}} &= N_1 + N_2 \\ &= 301,784 \text{ milj. €} + 223,8187224 \text{ milj. €} \\ &= 525,6027224 \text{ milj. €} \\ &\approx 526 \text{ milj. €} \quad (1 \text{ p. (yht. 12 p.)}) \end{aligned}$$

Vastaus: Saatu nettokorko on 526 miljoonaa euroa

Ratkaisuvaihtoehto 2

Ensimmäisen vuoden aikana talletuksen arvo $1 + \frac{2,219}{100} = 1,02219$ -kertaistuu.

1 p. (yht. 9 p.)

Toisen vuoden aikana talletuksen arvo $1 + \frac{1,610}{100} = 1,01610$ -kertaistuu.

1 p. (yht. 10 p.)

Lasketaan määräaikaistalletuksen arvo kahden vuoden kuluttua:

$$13,600 \text{ mrd. €} \cdot 1,02219 \cdot 1,01610 = 14,1256 \dots \text{ mrd. €}$$

1 p. (yht. 11 p.)

Lasketaan saatu nettokorko kahden vuoden jälkeisen arvon ja alkupääoman erotuksena:

$$14,1256 \dots \text{ mrd. €} - 13,6 \text{ mrd. €} = 0,525602 \dots \text{ mrd. €}$$

$$\approx 526 \text{ milj. €}$$

1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Saatu nettokorko on 526 miljoonaa euroa.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

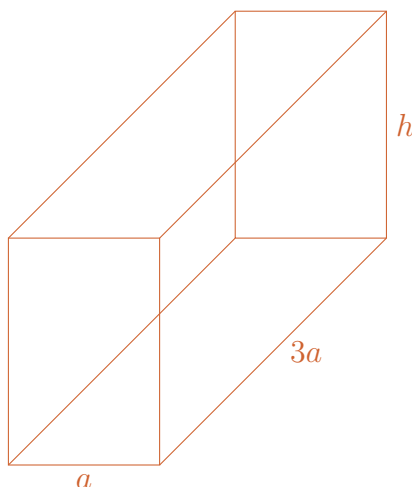
9. Tukirakenne (12 p.)

Rautalangasta rakennetaan tukirakenne suorakulmaisen särmiön muotoiseen kanakaiseen laatikkoon siten, että kaikki 12 särmää vahvistetaan rautalangalla. Rautalankaa on käytettävissä 2,0 metriä ja laatikon pohjan pidemmän sivun pituus on kolminkertainen pohjan lyhyemmän sivun pituuteen verrattuna. Mikä on laatikon suurin mahdollinen tilavuus?

Ratkaisu:

Ratkaisuvaihtoehto 1

Merkitään laatikon pohjan lyhyemmän sivun pituutta kirjaimella a . Koska pohjan pidemmän sivun pituus on kolminkertainen lyhyempään sivuun nähden, sen pituus on $3a$. 1 p. (yht. 1 p.) Merkitään laatikon korkeutta kirjaimella h .



Suorakulmaisen särmiön tilavuus voidaan laskea kertomalla pohjan pinta-ala särmiön korkeudella. Laatikon tilavuus on siis $V = a \cdot 3a \cdot h = 3a^2h$. Jokaista eri pituista särmää on särmiössä 4 kappaletta, ja rautalankaa on käytössä 2 metriä, joten voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$4 \cdot a + 4 \cdot 3a + 4 \cdot h = 2$$

$$4a + 12a + 4h = 2$$

$$16a + 4h = 2 \quad \parallel -16a$$

$$4h = 2 - 16a \quad \parallel : 4$$

$$h = \frac{1}{2} - 4a$$

1 p. (yht. 2 p.)

Sijoitetaan tämä laatikon tilavuuden lausekkeeseen:

$$\begin{aligned} V &= 3a^2h & \parallel h &= \frac{1}{2} - 4a \\ &= 3a^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - 4a\right) & \text{1 p. (yht. 3 p.)} \\ &= \frac{3}{2}a^2 - 12a^3 & \text{1 p. (yht. 4 p.)} \end{aligned}$$

Nyt tilavuuden lausekkeessa on vain yksi muuttuja, eli pohjan lyhyemmän sivun pituus a . Tilavuuden ääriarvo löydetään tilavuuden lausekkeen derivaatan nollakohdasta. Derivoidaan tilavuuden lauseke.

$$\begin{aligned} V'(a) &= \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot a - 3 \cdot 12a^2 \\ &= 3a - 36a^2 & \text{2 p. (yht. 6 p.)} \end{aligned}$$

Ratkaistaan sitten derivaatan nollakohdat CAS-ohjelmalla:

$$\begin{aligned} 3a - 36a^2 &= 0 \\ a = 0 & \quad \text{tai} \quad a = \frac{1}{12} & \text{2 p. (yht. 8 p.)} \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdat voidaan selvittää CAS-ohjelmalla myös ilman, että derivaatafunktion lauseke näkyy missään vaiheessa, mikäli ohjelma osaa ratkaista suoraan yhtälön $V'(a) = 0$, kun funktio $V(a)$ on ensin määritelty ohjelmaan.

Derivaatan nollakohtien ratkaiseminen ilman CAS-ohjelmaa onnistuu toisen asteen

yhtälön ratkaisukaavalla:

$$3a - 36a^2 = 0$$

$$-36a^2 + 3a + 0 = 0$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-36) \cdot 0}}{2 \cdot (-36)}$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 0}}{-72}$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{9}}{-72}$$

$$a = \frac{-3 \pm 3}{-72}$$

$$a = \frac{-3 + 3}{-72} \text{ tai } a = \frac{-3 - 3}{-72}$$

$$a = \frac{0}{-72} \text{ tai } a = \frac{-6}{-72}$$

$$a = 0 \text{ tai } a = \frac{1}{12}$$

Ainoa positiivinen derivaatan nollakohta on $a = \frac{1}{12}$. 1 p. (yht. 9 p.) Tarkistetaan vielä, että tästä löytyy nimenomaan tilavuuden maksimikohta. Lasketaan derivaattafunktion arvo nollakohtaa pienemmällä ja suuremmalla arvolla; valitaan esimerkiksi $a = \frac{1}{60}$ ja $a = 1$:

$$V'\left(\frac{1}{60}\right) = \frac{3}{60} - \frac{36}{3600}$$

$$= \frac{1}{25} > 0$$

$$V'(1) = 3 - 36$$

$$= -33 < 0$$

Derivaatan etumerkit voidaan selvittää CAS-ohjelmalla myös ilman, että derivaattafunktion lauseketta saadaan missään vaiheessa selville, mikäli ohjelma osaa ratkaista suoraan epäyhtälön $V'(a) > 0$, kun funktio V on ensin määritelty ohjelmaan.

Tilavuusfunktio on siis aidosti kasvava välillä $0 \leq a \leq \frac{1}{12}$ ja aidosti vähenevä, kun $a \geq \frac{1}{12}$.

Näin ollen suurin mahdollinen tilavuus saadaan arvolla $a = \frac{1}{12}$. 1 p. (yht. 10 p.) Sijoitetaan tämä tilavuuden lausekkeeseen.

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{3}{2}a^2 - 12a^3 \quad \parallel \text{ sijoitetaan } a = \frac{1}{12} \\
 V_{\max} &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 - 12 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^3 \\
 &= \frac{1}{288} \\
 &= 0,003472222 \dots \\
 &\approx 0,0035 \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}
 \end{aligned}$$

Pituuden yksikkönä käytettiin metriä, joten tilavuuden yksikkö on kuutiometri. Suurin tilavuus on siis

$$0,0035 \text{ m}^3 = 3,5 \text{ dm}^3 = 3,5 \text{ l.} \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: Laatikon suurin mahdollinen tilavuus on 3,5 litraa.

Alustavien Hyvän vastauksen piirteiden (luettu 24.9.2026 kello 21.18) mukaan tehtävässä ei vaadita sen tarkastelua, millä välillä a :n on oltava, jotta rautalanka ylipäättään riittää laatikon rakentamiseen. Alla on näytetty, miten tarkastelu voitaisiin tehdä:

Mitä suurempi on a , sitä vähemmän lankaa jää käytettäväksi korkeudelle h . Rajatapauksessa laatikon korkeus on nolla:

$$h = 0$$

$$\frac{1}{2} - 4a = 0 \quad \parallel + 4a$$

$$\frac{1}{2} = 4a$$

$$4a = \frac{1}{2} \quad \parallel : 4$$

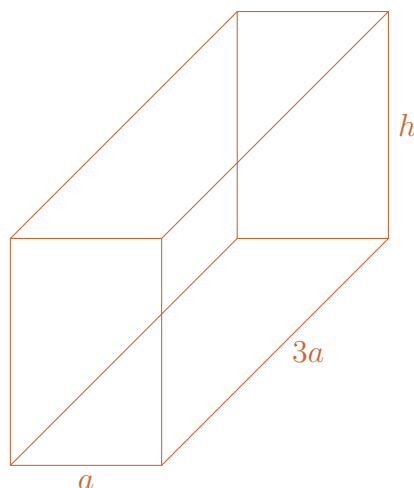
$$a = \frac{1}{8}$$

$$a = 0,125$$

Tehtävässä ratkaistu a :n arvo on tätä pienempi, joten laatikko saadaan rakennettua. Saadun vastauksen järkevyys nähdään myös ilman tätä tarkastelua, sillä tilavuus on positiivinen kohdassa $a = \frac{1}{12}$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Merkitään laatikon pohjan lyhyemmän sivun pituutta kirjaimella a . Koska pohjan pidemmän sivun pituus on kolminkertainen lyhyempään sivuun nähden, sen pituus on $3a$. 1 p. (yht. 1 p.) Merkitään laatikon korkeutta kirjaimella h .



Suorakulmaisen särmiön tilavuus voidaan laskea kertomalla pohjan pinta-ala särmiön korkeudella. Laatikon tilavuus on siis

$$V = a \cdot 3a \cdot h$$

$$V = 3a^2h. \quad (1)$$

Jokaista eri pituista särmää on särmiössä 4 kappaletta, ja rautalankaa on käytössä 2 metriä, joten voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$4 \cdot a + 4 \cdot 3a + 4 \cdot h = 2$$

$$4a + 12a + 4h = 2$$

$$16a + 4h = 2 \quad \parallel -16a$$

$$4h = 2 - 16a \quad \parallel : 4$$

$$h = \frac{1}{2} - 4a \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)} \quad (2)$$

Koska pituus ei voi olla negatiivinen, niin $a \geq 0$ ja

$$\begin{aligned} h &\geq 0 \\ \frac{1}{2} - 4a &\geq 0 && \parallel -\frac{1}{2} \\ -4a &\geq -\frac{1}{2} && \parallel : (-4) (< 0, \text{ suunta vaihtuu}) \\ a &\leq \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Siis $0 \leq a \leq \frac{1}{8}$.

Sijoitetaan korkeuden lauseke (2) laatikon tilavuuden lausekkeeseen (1):

$$\begin{aligned} V &= 3a^2h && \parallel h = \frac{1}{2} - 4a \\ &= 3a^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - 4a\right) && \text{1 p. (yht. 3 p.)} \\ &= \frac{3}{2}a^2 - 12a^3 && \text{1 p. (yht. 4 p.)} \end{aligned}$$

Funktio V on määritelty välillä $0 \leq a \leq \frac{1}{8}$. Suljetulla välillä polynomifunktio saa suurimman arvonsa joko välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Derivoidaan tilavuuden lauseke.

$$\begin{aligned} V'(a) &= \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot a - 3 \cdot 12a^2 \\ &= 3a - 36a^2 && \text{2 p. (yht. 6 p.)} \end{aligned}$$

CAS-ohjelmalla saadaan yhtälön $V'(a) = 0$ ratkaisuksi

$$a = 0 \quad \text{tai} \quad a = \frac{1}{12}. \quad \text{2 p. (yht. 8 p.)}$$

Siten funktio V saa välillä $0 \leq \frac{1}{8}$ suurimman arvonsa joko välin päätepisteessä $a = 0$, derivaatan nollakohdassa $a = \frac{1}{12}$ tai välin päätepisteessä $a = \frac{1}{8}$. 1 p. (yht. 9 p.) Lasketaan funktion V arvo näissä kohdissa. Jos arvo lasketaan CAS-ohjelmalla, johon on talletettu funktio V , säästytään kirjoittamasta lausekkeita, jotka alla on merkitty

kommenttivärillä.

$$V(0) = \frac{3}{2} \cdot 0^2 - 12 \cdot 0^3 = 0$$

$$V\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 - 12 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^3 = 0,003472 \dots$$
 1 p. (yht. 10 p.)

$$V\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 - 12 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 = 0$$

Tilavuus on siis suurin, kun $a = \frac{1}{12}$.

1 p. (yht. 11 p.)

Pituuden yksikkönä käytettiin metriä, joten tilavuuden yksikkö on kuutiometri. Suurin tilavuus on siis

$$0,003472 \dots \text{ m}^3 \approx 0,0035 \text{ m}^3 = 3,5 \text{ dm}^3 = 3,5 \ell.$$
 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Laatikon suurin mahdollinen tilavuus on 3,5 litraa.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

10. Koivuvanerin valmistaminen (18 p.)

Aineisto:

10. A [Video: Viilun valmistus](#)10. B [Kuva: Viilun sorvaus](#)

Vanerin valmistukseen tarvittavaa ohutta viilua sorvataan koivutukista videon [10.A](#) ja kuvan [10.B](#) esittämällä tavalla. Alkukäsittelyn jälkeen tukki on tasapaksu ja sen pituus on 1,2 metriä ja halkaisija 25 cm. Viilun paksuus on 1,4 mm.

- 10.1 Viilun sorvaus täytyy lopettaa, kun tukin halkaisija on 5,0 cm, jotta tukki ei mene poikki. Kuinka monta prosenttia alkukäsittelyn koivutukin tilavuudesta jää käyttämättä viilun valmistukseen? Laske myös tilavuuksia tarkastelemalla, mikä on tukista sorvatun viilun pituus. (12 p.)

Puutavarakauppa Venlan vanerissa myydään 9,0 mm paksuja vanerilevyjä, joiden koko on $1,2\text{ m} \times 1,2\text{ m}$. Ne valmistetaan liimaamalla viisi 1,4 millimetrin paksuista viilua päällekkäin. Päällekkäisten viilujen välissä on ohut liimakerros.

Kirjoita osatehtävien 10.2–10.3 vastauskenttiin pelkät vastaukset ilman välivaiheita ja perusteluja. Näissä osatehtävissä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria. Kukin vastaus on yksi luku.

- 10.2 Mikä on yhden liimakerroksen keskimääräinen paksuus tällaisessa vanerilevyssä? (3 p.)

 mm

- 10.3 Kuinka moneen kokonaiseen vanerilevyyn riittää 25 metriä pitkä ja 1,2 metriä leveä viilu? (3 p.)

 vanerilevyyn**Ratkaisu:**

10.1.

$$h = 1,2\text{ m}$$

$$r_1 = \frac{25\text{ cm}}{2} = 12,5\text{ cm} = 0,125\text{ m}$$

$$r_2 = \frac{5,0\text{ cm}}{2} = 2,5\text{ cm} = 0,025\text{ m}$$

$$d = 1,4\text{ mm} = 0,0014\text{ m}$$

Ratkaisuvaihtoehto 1

Tukki on lieriö, jonka tilavuus on $V = \pi r^2 h$. Laskussa on käytettävä yhtenäisiä yksiköitä, joten tässä kaikki pituudet muutetaan metreiksi.

Alkuperäisen tukin tilavuus alkukäsittelyn jälkeen on

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \cdot r_1^2 \cdot h \\ &= \pi \cdot (0,125 \text{ m})^2 \cdot 1,2 \text{ m} \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)}) \\ &= 0,058904 \dots \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Sorvauksen jälkeen jäljelle jää lieriö, jonka pituus on sama, mutta säde r_2 on pienempi.

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \cdot r_2^2 \cdot h \\ &= \pi \cdot (0,025 \text{ m})^2 \cdot 1,2 \text{ m} \quad (1 \text{ p. (yht. 2 p.)}) \\ &= 0,0023561 \dots \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Käyttämättä jäävä osuus saadaan jakamalla jäljelle jäävä tilavuus alkuperäisellä tilavuudella.

$$\begin{aligned} V_{\text{käyttämättä}} &= \frac{V_2}{V_1} \quad (1 \text{ p. (yht. 3 p.)}) \\ &= \frac{0,0023561 \dots \text{ m}^3}{0,058904 \dots \text{ m}^3} \\ &= 0,04 \\ &= 4 \% \quad (1 \text{ p. (yht. 4 p.)}) \end{aligned}$$

Viiluksi sorvatun puun tilavuus on se osa, joka ei jää käyttämättä eli

$$100 \% - 4 \% = 96 \%$$

tilavuudesta : 1 p. (yht. 5 p.)

$$\begin{aligned} V_{\text{viilu}} &= 0,96 V_1 \quad (1 \text{ p. (yht. 6 p.)}) \\ &= 0,96 \cdot 0,058904 \dots \text{ m}^3 \\ &= 0,056548 \dots \text{ m}^3 \quad (2 \text{ p. (yht. 8 p.)}) \end{aligned}$$

Auki rullattu viilu on ohut suorakulmainen levy, jonka leveys on tukin pituus h , paksuus d ja pituus L .

$$V_{\text{viilu}} = L \cdot h \cdot d \quad || : hd \quad (2 \text{ p. (yht. 10 p.)})$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{V_{\text{viilu}}}{hd} \\ &= \frac{0,056548 \dots \text{ m}^3}{1,2 \text{ m} \cdot 0,0014 \text{ m}} \\ &= 33,659 \dots \text{ m} \\ &\approx 34 \text{ m} \quad (2 \text{ p. (yht. 12 p.)}) \end{aligned}$$

Vastaus: Tukin tilavuudesta jää käyttämättä 4 %, ja viilun pituus on noin 34 m.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Alkuperäisen tukin poikkipinta-ala alkukäsittelyn jälkeen on

$$A_1 = \pi \cdot r_1^2 = \pi \cdot (0,125 \text{ m})^2 = 0,0490873 \dots \text{ m}^2 \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)})$$

Sorvauksen jälkeen jäljelle jää lieriö, jonka pituus on sama, mutta säde r_2 on pienempi. Tämän lieriön poikkipinta-ala on

$$A_2 = \pi \cdot r_2^2 = \pi \cdot (0,025 \text{ m})^2 = 0,0019634 \dots \text{ m}^2 \quad (1 \text{ p. (yht. 2 p.)})$$

Koska alkuperäisen ja sorvatusen tukin pituudet ovat samat, saadaan käyttämättä jäänyt osuus pinta-alojen suhteena:

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{A_1} &= \frac{0,0019634 \dots \text{ m}^2}{0,0490873 \dots \text{ m}^2} \quad (1 \text{ p. (yht. 3 p.)}) \\ &= 0,04 \\ &= 4 \% \quad (1 \text{ p. (yht. 4 p.)}) \end{aligned}$$

Viilun pituuden saisi selville pinta-alojen avulla myös laskematta tilavuuksia, mutta viilun pituus käskettiin laskea nimenomaan tilavuuksia käyttäen. Lasketaan siis tilavuudet.

Alkuperäisen tukin tilavuus alkukäsittelyn jälkeen on

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \cdot r_1^2 \cdot h \\ &= \pi \cdot (0,125 \text{ m})^2 \cdot 1,2 \text{ m} \\ &= 0,058904 \dots \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Sorvauksen jälkeen jäljelle jää lieriö, jonka pituus on sama, mutta säde r_2 on pienempi.

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \cdot r_2^2 \cdot h \\ &= \pi \cdot (0,025 \text{ m})^2 \cdot 1,2 \text{ m} \\ &= 0,0023561 \dots \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Viiluksi sorvatus puun tilavuus on alkuperäisen ja jäljelle jääneen tukin tilavuuksien erotus.

$$\begin{aligned} V_{\text{viilu}} &= V_1 - V_2 \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)} \\ &= 0,058904 \dots \text{ m}^3 - 0,0023561 \dots \text{ m}^3 \\ &= 0,056548 \dots \text{ m}^3 \quad \text{2 p. (yht. 8 p.)} \end{aligned}$$

Auki rullattu viilu on ohut suorakulmainen levy, jonka leveys on tukin pituus h , paksuus d ja pituus L .

$$\begin{aligned} V_{\text{viilu}} &= L \cdot h \cdot d \quad || : hd \quad \text{2 p. (yht. 10 p.)} \\ L &= \frac{V_{\text{viilu}}}{hd} \\ &= \frac{0,056548 \dots \text{ m}^3}{1,2 \text{ m} \cdot 0,0014 \text{ m}} \\ &= 33,659 \dots \text{ m} \\ &\approx 34 \text{ m} \quad \text{2 p. (yht. 12 p.)} \end{aligned}$$

Vastaus: Tukin tilavuudesta jää käyttämättä 4 %, ja viilun pituus on noin 34 m.

Pisteytyksestä:

- Ytimen ja tukin läpileikkausten pinta-alat tai tilavuudet 2 p.
- Hukkaan menevä osuus pinta-aloja tai tilavuuksia vertaamalla 2 p.
- Hyötykäyttöön saatavan puun tilavuuden lauseke 2 p.
- Hyötykäyttöön saatavan puun tilavuus 2 p.
- Viilun tilavuuden lauseke 2 p.
- Viilun pituus hyväksyttävällä tarkkuudella 2 p.

10.2.

$$D = 9,0 \text{ mm}$$

$$d = 1,4 \text{ mm}$$

$$n = 5$$

Levyn paksuus koostuu viiluista ja niiden välisistä liimakerroksista. Liimakerrosten yhteispaksuus on levyn paksuuden ja viilujen yhteispaksuuden erotus.

$$\begin{aligned} D - n \cdot d &= 9,0 \text{ mm} - 5 \cdot 1,4 \text{ mm} \\ &= 9,0 \text{ mm} - 7,0 \text{ mm} \\ &= 2,0 \text{ mm} \end{aligned}$$

Liimaa on vain päällekkäisten viilujen välissä, joten liimakerroksia on yksi vähemmän kuin viiluja.

$$n - 1 = 5 - 1 = 4$$

Yhden liimakerroksen keskimääräinen paksuus on näin:

$$\begin{aligned} \text{liimakerroksen paksuus} &= \frac{2,0 \text{ mm}}{4} \\ &= 0,5 \text{ mm} \end{aligned}$$

Vastaus: 0,5 3 p. (yht. 3 p.).

10.3.

$$L = 25 \text{ m}$$

$$h = 1,2 \text{ m}$$

Vanerilevyn palat ovat kooltaan $1,2 \text{ m} \times 1,2 \text{ m}$. Koska viilu on yhtä leveä kuin pala, jokainen pala vie viilua $1,2 \text{ m}$ pituussuunnassa. Kokonaisten palojen määrä saadaan siis jakamalla viilun pituus palan sivun pituudella:

$$\begin{aligned}\frac{L}{h} &= \frac{25 \text{ m}}{1,2 \text{ m}} \\ &= 20,833 \dots\end{aligned}$$

eli kokonaisia paloja saadaan 20.

Ylijäävä noin 1 m pitkä pätkä ei riitä kokonaiseksi palaksi.

Yhteen vanerilevyyn tarvitaan $n = 5$ palaa.

$$\frac{20}{5} = 4$$

Viilu riittää neljään vanerilevyyn. Vastauskenttään kirjoitetaan pelkkä luku 4.

Vastaus: 4 3 p. (yht. 3 p.).

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

11. Jääkiekkotilastoja (18 p.)

Aineisto:

11. A [Taulukko: Jääkiekkotilastoja](#)

Taulukossa [11.A](#) on esitetty jääkiekon SM-liigassa kaudella 2024–2025 pelatun 95 ensimmäisen ottelun maalimäärät ja jäähyminuutit. Vastaa osatehtäviin 11.1–11.5 taulukon [11.A](#) perusteella.

Kirjoita osatehtävien 11.1–11.5 vastauskenttiin pelkät vastaukset ilman välivaiheita ja perusteluja. Näissä osatehtävissä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria. Kukin vastaus on yksi luku.

11.1 Määritä maalimäärän moodi. (1 p.)

11.2 Määritä maalimäärän mediaani. (1 p.)

11.3 Määritä maalimäärän keskiarvo. (1 p.)

11.4 Määritä maalimäärän vaihteluvälin pituus. (1 p.)

11.5 Määritä jäähyminuuttien x ja maalimäärän y välistä yhteyttä kuvaavan regressiosuoran yhtälön $y = ax + b$ kertoimet a ja b . (2 p.) $a =$ 1 p. $b =$ 1 p.11.6 Piirrä kuva, jossa on aineistosta [11.A](#) muodostettu hajontakuviio ja osatehtävässä 11.5 saatu regressiosuora. Määritä ottelussa tehtyjen maalien ja ottelun jäähyminuuttien välinen korrelaatiokerroin. Arvioi tehtyjen maalien ja jäähyminuuttien välistä riippuvuutta ja selitä, miten tämä näkyy piirretyssä kuvassa. (6 p.)

11.7 Laadi pylväsdiagrammi, jossa näkyy kunkin maalimäärän suhteellinen frekvenssi. (6 p.)

Ratkaisu:

11.1

Käsitellään aineistoa Collabora Calcilla.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Järjestetään aineisto nousevasti maalimäärien mukaan.

	A	B
1	Jäähyminuutit	Maalimäärä
2	18	2
3	16	2
4	12	2
5	14	3
6	12	3
7	16	3
8	16	3
9	6	3
10	14	3
11	16	3
12	8	3
13	16	3
14	16	3
15	72	3
16	28	3
17	10	4
18	14	4
19	12	4
20	20	4
21	12	4
22	14	4
23	16	5
24	18	5

Lasketaan, kuinka monta mitäkin maalimäärää on.

	A	B	C
1	Jäähyminuutit	Maalimäärä	Laskuri
2	18	2	1
3	16	2	2
4	12	2	3
5	14	3	1
6	12	3	2
7	16	3	3
8	16	3	4
9	6	3	5
10	14	3	6
11	16	3	7
12	8	3	8
13	16	3	9
14	16	3	10
15	72	3	11
16	28	3	12
17	10	4	1
18	14	4	2
19	12	4	3
20	20	4	4
21	12	4	5
22	14	4	6
23	16	5	1
24	18	5	2
25	14	5	3

Nähdään, että yleisin maalimäärä on 5, joka tuli 31:ssä ottelussa.

Laskurin sijaan voidaan käyttää myös COUNTIF-toimintoa tai vastaavaa. Alla on esitetty, miten Collabora Calc -ohjelmalla käytetään LASKE.JOS-toimintoa.

	A	B	E	F	G	H
1	Jäähyminuutit	Maalimäärä	Maalimäärä	Frekvenssi		
2	18	2	2	=LASKE.JOS(\$B\$2:\$B\$96;E2)		
3	16	2	3	12		
4	12	2	4	6		
5	14	3	5	31		
6	12	3	6	8		
7	16	3	7	20		
8	16	3	8	3		
9	6	3	9	5		
10	14	3	10	3		
11	16	3	11	2		
12	8	3	12	1		
13	16	3	13	1		
14	16	2				

Solussa F2 oleva kaava laskee, kuinka monta kertaa solun E2 arvo (lukumäärä 2) esiintyy sarakkeessa B. Sulkujen sisään valitaan ensin tarkasteltava alue (tä-

sä sarakkeen B maalimäärät \$B\$2:\$B\$96) ja puolipisteen ; jälkeen ehto (tässä viittaus soluun E2). Tämän jälkeen kaava on kopioitu alemmille riveille.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Käytetään ohjelman valmista mooditoimintoa.

```
=MOODI(B2:B95)
```

Moodiksi saadaan 5.

Vastaus: 5 1 p. (yht. 1 p.)

11.2

Ratkaisuvaihtoehto 1

Edellisessä kohdassa tehdystä taulukosta nähdään, että otteluita oli yhteensä 95. (Otsikkorivillä eli rivillä 1 ei ole ottelua vaan tekstiä.) Maalimäärien mediaani on suuruusjärjestykseen järjestetyistä maalien määristä keskimmäinen.

$$\frac{95}{2} = 47,5,$$

joten keskimmäinen maalien määrä on 48:s maalien määrä. Kyseinen maalien määrä luetaan riviltä 49, ja se on 5 maalia.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Käytetään ohjelman valmista mediaanitoimintoa.

```
=MEDIAANI(B2:B95)
```

Mediaaniksi saadaan 5.

Vastaus: 5 1 p. (yht. 1 p.)

11.3 Lasketaan maalimäärän keskiarvo ohjelman valmiilla keskiarvotoiminnolla.

B97		f_x	Σ	=	=KESKIARVO(B2:B96)
	A	B	C	D	
92	33	10	3		
93	18	11	1		
94	20	11	2		
95	22	12	1		
96	12	13	1		
97	Keskiarvo	5,842105263			

Maalimäärän keskiarvo on $5,842 \dots \approx 5,84$.

Vastaus: 5,84 1 p. (yht. 1 p.)

11.4 Pienin maalimäärä on 2 ja suurin 13, joten maalimäärän vaihteluvälin pituus on $13 - 2 = 11$.

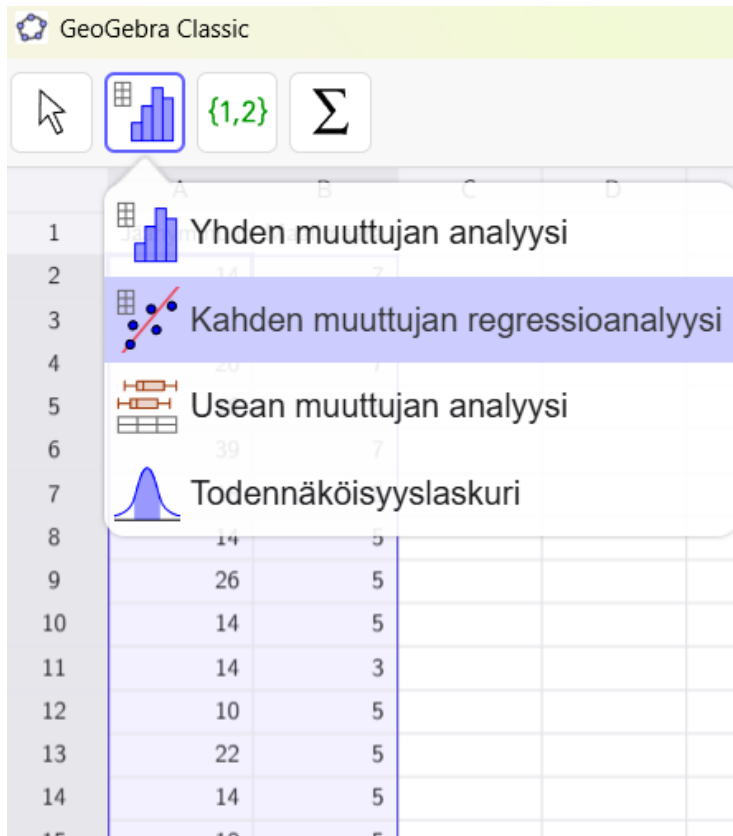
Vastaus: 11 1 p. (yht. 1 p.)

11.5

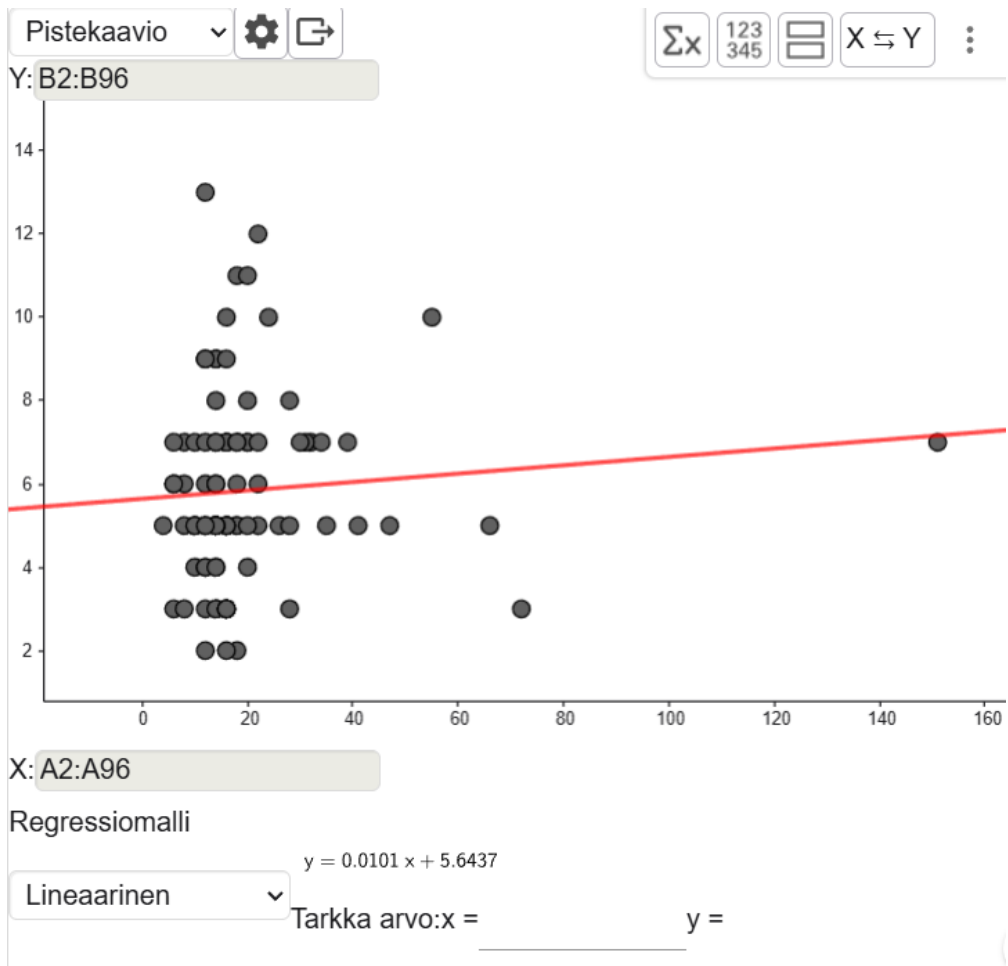
Ratkaisuvaihtoehto 1

Tehdään tämä alakohta GeoGebralla.

Maalataan luvut ja käytetään toimintoa Kahden muuttujan regressioanalyysi.



Valitaan malliksi Lineaarinen.



Yllä olevasta kuvasta nähdään jäähyminuuttien määrän x ja maalimäärän y yhteyttä kuvaavan suoran yhtälön olevan

$$y = 0,0101x + 5,6437.$$

Siis

$$a = 0,0101$$

ja

$$b = 5,6437.$$

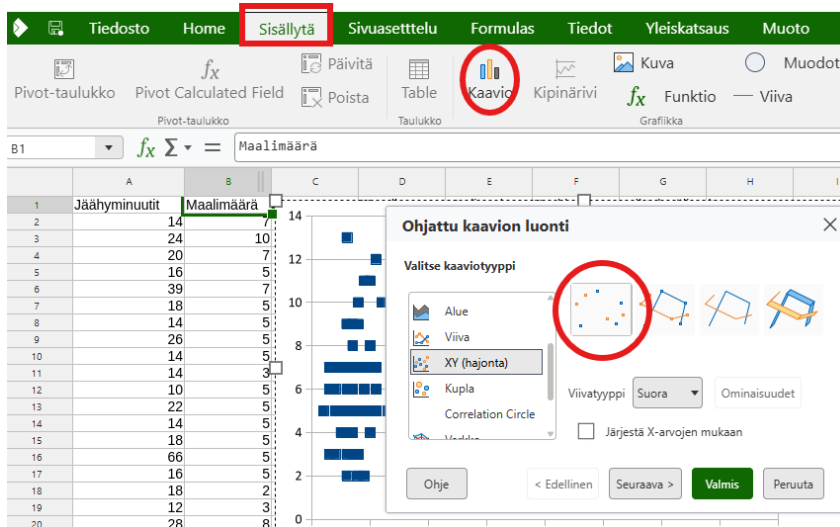
Vastaus: $a = 0,0101$ 1 p. (yht. 1 p.) ja $b = 5,6437$ 1 p. (yht. 2 p.)

Olettavasti mihin tahansa järkevään tarkkuuteen pyöristetty vastaus hyväksytään.

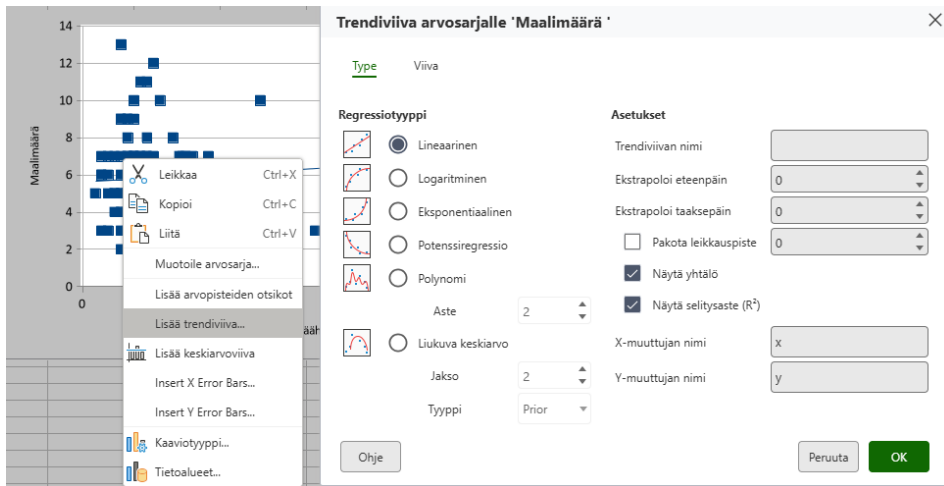
Ratkaisuvaihtoehto 2

Ratkaistaan tämä Collabora Calc -ohjelmalla.

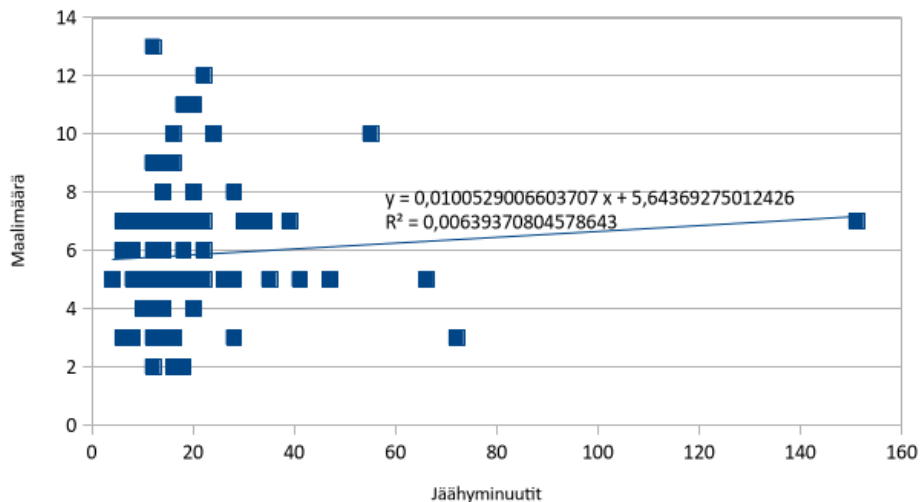
Maalataan luvut ja piirretään hajontakaavio valitsemalla Sisällytä-välilehdeltä kohta Kaavio ja kaaviotyyppi XY (hajonta).



Nimetään akselit. Lisätään kaavioon trendiviiva klikkaamalla jotain datapistettä hiiren oikealla painikkeella ja valitsemalla Lisää trendiviiva. Valitaan regressiotyyppi Lineaarinen sekä asetuksista kohdat Näytä yhtälö ja Näytä selitysaste. Y-muuttujan nimeksi voidaan vaihtaa kirjain y.



Kuvaaja näyttää nyt tältä.



Yllä olevasta kuvasta nähdään jäähyminuuttien määrän x ja maalimäärän y yhteyttä kuvaavan suoran yhtälön olevan

$$y = 0,010052 \dots x + 5,64369 \dots$$

Siis

$$a \approx 0,0101$$

ja

$$b \approx 5,6437.$$

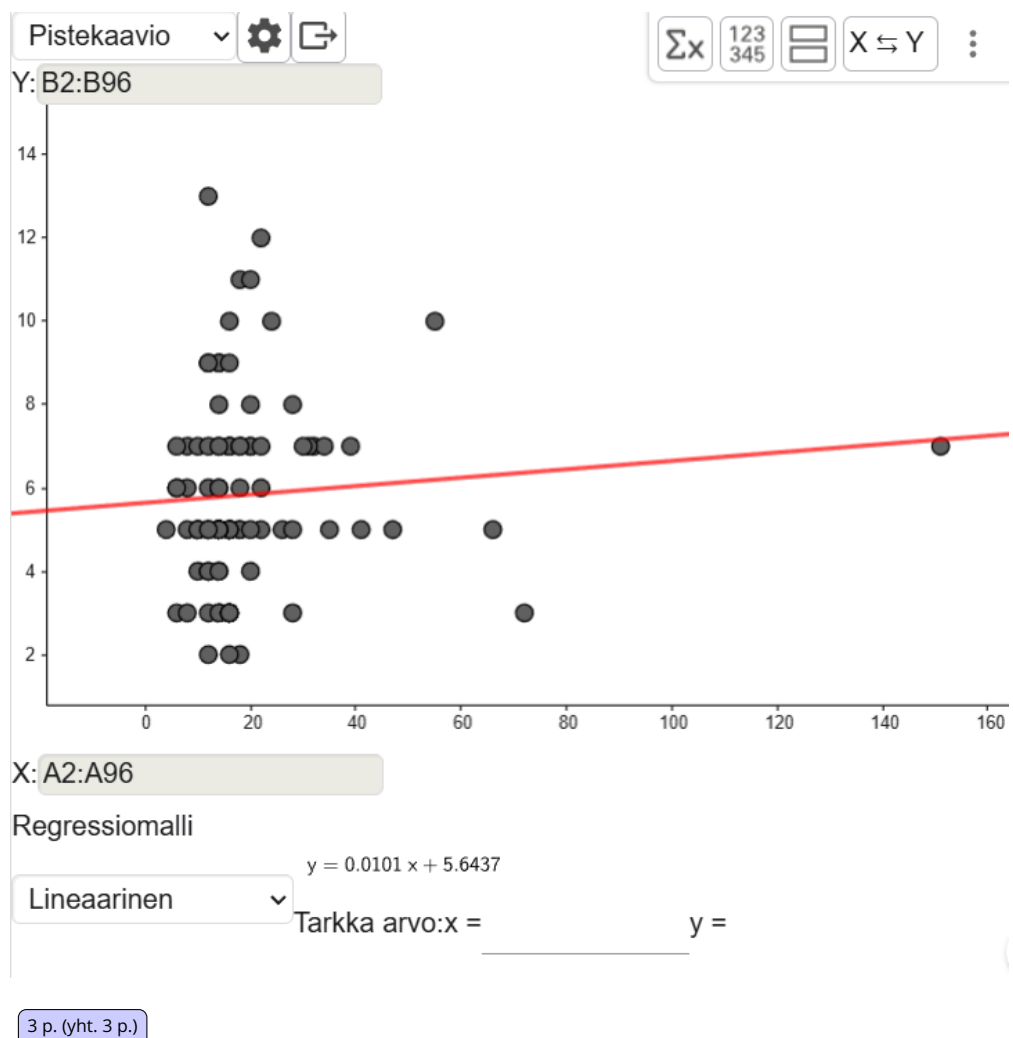
Vastaus: $a = 0,0101$ 1 p. (yht. 1 p.) ja $b = 5,6437$ 1 p. (yht. 2 p.)

Olettavasti mihin tahansa järkevään tarkkuuteen pyöristetty vastaus hyväksytään.

11.6

Ratkaisuvaihtoehto 1

Kuva tehtiin GeoGebralla jo edellisessä kohdassa:



Ohjelma antaa tilastot, joista voidaan katsoa korrelaatiokerroin.

Tilastot pääsee näkemään napauttamalla alla olevassa kuvassa näkyvää kohtaa Σx ja valitsemalla Näytä tilastot.



Tilastot ▾	
KeskiarvoX	19.7368
KeskiarvoY	5.8421
Sx	17.7598
Sy	2.2328
r	0.08
ρ	0.1666
Sxx	29648.4211
VarianssiY	468.6316
Sxy	298.0526
R ²	0.0064
SSE	465.6353

Tilastoista nähdään korrelaatiokertoimen olevan $r = 0,08$. 1 p. (yht. 4 p.)

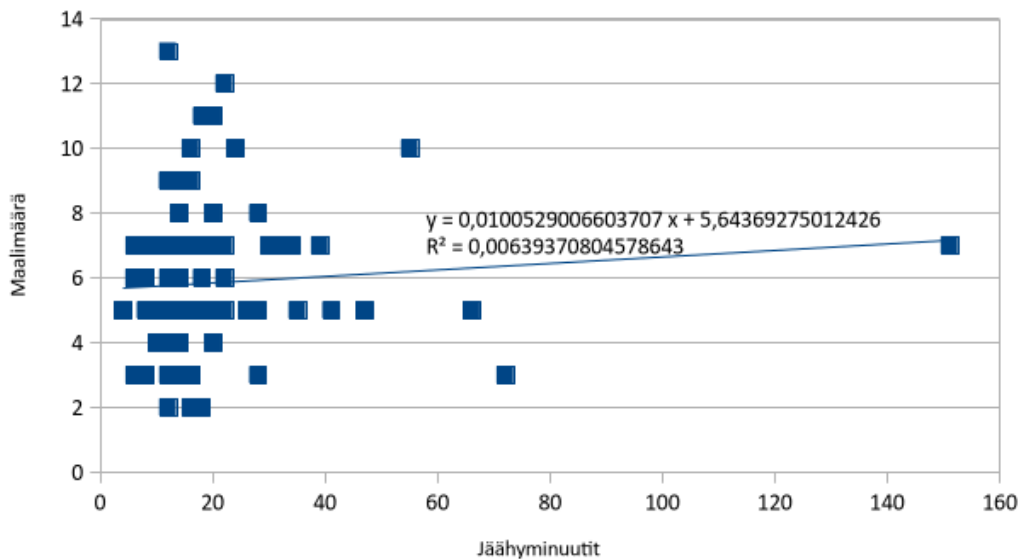
Korrelaatiokerroin on hyvin lähellä nollaa, joten maalimäärän ja jäähyminuuttien välillä ei käytännössä ole lainkaan lineaarista riippuvuutta. 1 p. (yht. 5 p.) Kuvassa tämä näkyy niin, että pisteet ovat enimmäkseen kaukana niihin sovitetusta suorasta, sekä niin, että regressiosuoran kulmakerroin on lähes nolla.

1 p. (yht. 6 p.)

Vastaus: Korrelaatiokerroin on 0,08. Maalimäärän ja jäähyminuuttien välillä ei käytännössä ole lainkaan lineaarista riippuvuutta. Kuvassa tämä näkyy niin, että pisteet ovat enimmäkseen kaukana niihin sovitetusta suorasta.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Kuva tehtiin Collabora Calcilla jo edellisessä kohdassa:



3 p. (yht. 3 p.)

Selitysaste on $R^2 = 0,00639370 \dots$. Selitysaste on korrelaatiokertoimen neliö. Lasketaan korrelaatiokerroin.

$$R^2 = 0,00639370 \dots$$

$$R = \pm \sqrt{0,00639370 \dots}$$

$$= \pm 0,079960 \dots$$

$$\approx \pm 0,08$$

Korrelaatiokerroin ei voi olla negatiivinen, joten $r = 0,08$.

1 p. (yht. 4 p.)

Korrelaatiokerroin on hyvin lähellä nollaa, joten maalimäärän ja jäähyminuuttien välillä ei käytännössä ole lainkaan lineaarista riippuvuutta. Kuvassa tämä näkyy niin, että pisteet ovat enimmäkseen kaukana niihin sovitetusta suorasta, sekä niin, että regressiosuoran kulmakerroin on lähes nolla.

1 p. (yht. 5 p.)

1 p. (yht. 6 p.)

Vastaus: Korrelaatiokerroin on 0,08. Maalimäärän ja jäähyminuuttien välillä ei käytännössä ole lainkaan lineaarista riippuvuutta. Kuvassa tämä näkyy niin, että pisteet ovat enimmäkseen kaukana niihin sovitetusta suorasta.

11.7 Kootaan LibreOffice Calcissa taulukko, jossa näkyy maalimäärien frekvenssit ja suhteelliset frekvenssit.

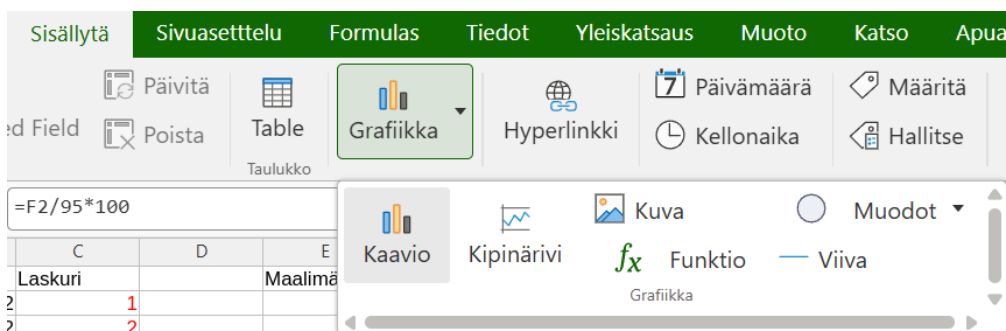
E	F	G	H
Maalimäärä	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi (%)	
2	3	=F2/95*100	
3	12	12,63157895	
4	6	6,315789474	
5	31	32,63157895	
6	8	8,421052632	
7	20	21,05263158	
8	3	3,157894737	
9	5	5,263157895	
10	3	3,157894737	
11	2	2,105263158	
12	1	1,052631579	
13	1	1,052631579	

2 p. (yht. 2 p.)

Solussa G2 oleva kaava $=F2/95*100$ laskee, kuinka monta prosenttia solussa F2 oleva frekvenssi on kaikkien otteluiden määrästä eli luvusta 95. Kaava kopioidaan alemmille riveille napauttamalla solu G2 aktiiviseksi ja vetämällä solun oikeasta alanurkasta.

Maalataan yllä oleva taulukko ja piirretään pylväskaavio.

Kaavioita pääsee piirtämään valitsemalla Sisällytä -> Grafiikka -> Kaavio.



Valitaan kaaviotyyppi pylväskaavio.

Koska ensimmäinen rivi on otsikkorivi ja ensimmäinen sarake otsikkosarake, pitää täpät laittaa seuraavasti:

Ohjattu kaavion luonti ✕

Valitse tietoaalue

Tietoaalue: 

☐ Arvosarjat riveillä

☒ Arvosarjat sarakkeissa

☒ Ensimmäinen rivi sisältää otsikoita

☒ Ensimmäinen sarake sisältää otsikoita

Ohje

< Edellinen

Seuraava >

Valmis

Peruuta

Arvosarja Frekvenssi on ylimääräinen. Poistetaan se.

Ohjattu kaavion luonti



Arvosarjat:

Frekvenssi

Suhteellinen frekvenssi (%)

Lisää

Poista



Tietoalueet:

Reunan väri

Täyttöväri

Nimi \$Taulukko1.\$F\$1

Y-arvot \$Taulukko1.\$F\$2:\$F\$13

Alue arvoille Reunan väri

Luokat

\$Taulukko1.\$E\$2:\$E\$13

Mukauta yksittäisten arvosarjojen tietoalueita

Ohje

< Edellinen

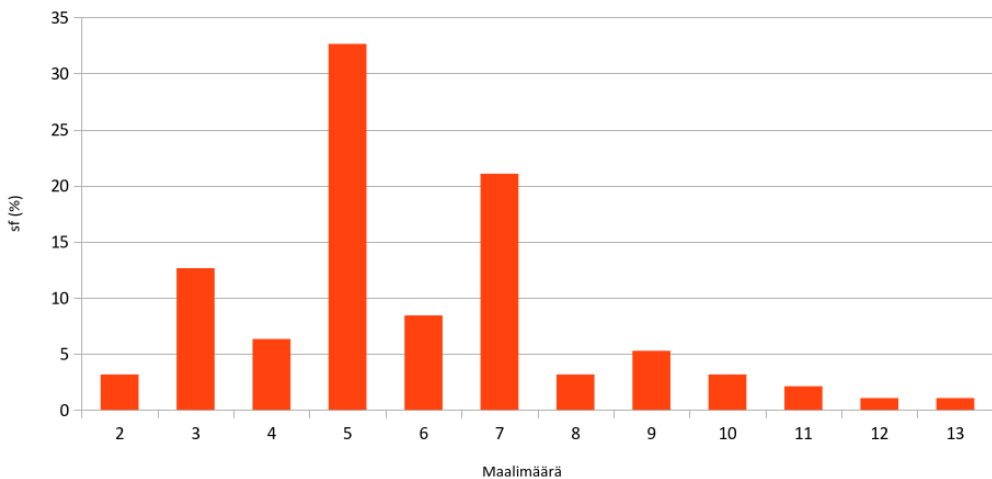
Seuraava >

Valmis

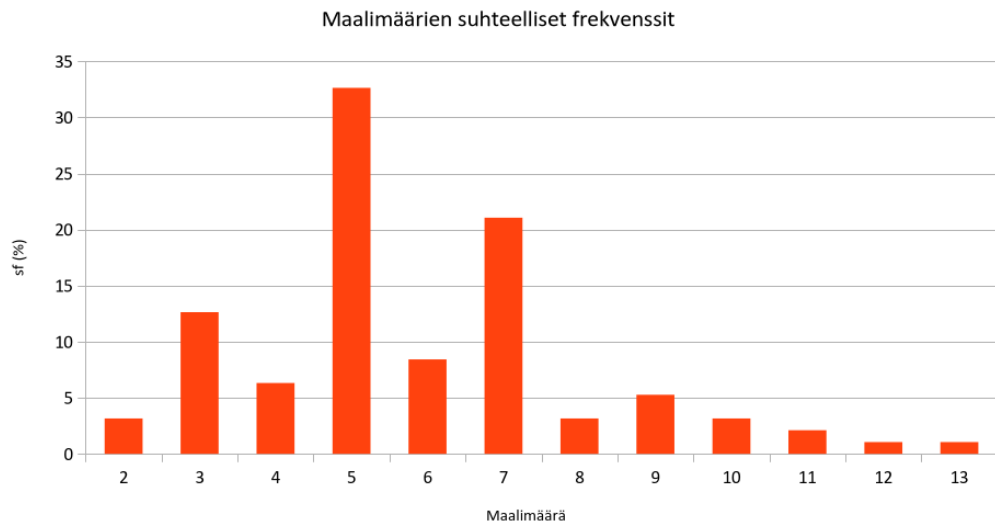
Peruuta

Kaavio näyttää tältä:

Maalimäärien suhteelliset frekvenssit



4 p. (yht. 6 p.)

Vastaus:

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.