

Fysiikan

60 % pk-seudun

lukiolaisista
opiskelee Mafynetillä
yo-kirjoituksiin

70 %

lääketieteen

valintakoeväylän
paikoista mafylaisille
keväällä 2026

Suomen

kattavimmat

malliratkaisut

Opiskelijoiden ja
opettajien käyttöön

Malliratkaisut

SYKSY
2026

Mafy – oppimisen asialla jo vuodesta 2010

**Mafynetti-
oppimissovellus**

**Valmennuskurssit ja
oppimateriaalit**

Valintakoe A

Valintakoe B

Valintakoe C

Valintakoe F

Ylioppilaskirjoitukset

A-englanti	Maantiede
Biologia	Matematiikka
Fysiikka	Psykologia
Historia	Yhteiskuntaoppi
Kemia	Äidinkieli

Käyttöehdot

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafy.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on **kielletty**.

Lukion opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukion kurseillasi.

Nämä mallivastaukset ovat Mafy Oy:n omaisuutta.

Mallivastaukset laatii Mafyn oppimateriaaliitiimi

Tiimi kehittää lukion oppimateriaaleja.

Mallivastausten
tekemiseen
osallistuivat:

Jaakko **Alasuvanto**
Tuukka **Keinonen**
Albina **Kostanica**
Sampsa **Kurvinen**
Sakke **Suomalainen**
Lassi **Vienonen**
Matti **Virolainen**

Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	7
Ratkaisu tehtävään 3	12
Ratkaisu tehtävään 4	17
Ratkaisu tehtävään 5	22
Ratkaisu tehtävään 6	25
Ratkaisu tehtävään 7	31
Ratkaisu tehtävään 8	37
Ratkaisu tehtävään 9	42
Ratkaisu tehtävään 10	50
Ratkaisu tehtävään 11	57

Malliratkaisut päivitetty 23. syyskuuta 2026 klo 12:41.

1. Monivalintatehtäviä fysiikan eri osa-alueilta (20 p.)

Valitse jokaisessa osatehtävässä 1.1–1.10 parhaiten soveltuva vastausvaihtoehto. Oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

1.1 Kun pikajuoksija tulee maaliin 100 metrin juoksussa, hänen liike-energiansa on noin (2 p.)

- ☐ 30 J.
- ☐ 30 MJ.
- ☐ 300 kJ.
- ☐ 3 kJ.

1.2 Pesäpallo heitetään suoraan ylöspäin. Positiivinen suunta on ylös. Pallon radan korkeimmassa kohdassa (2 p.)

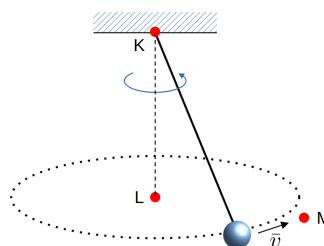
- ☐ pallon kiihtyvyys on noin $-9,8 \text{ m/s}^2$.
- ☐ pallon kiihtyvyys on noin $+9,8 \text{ m/s}^2$.
- ☐ pallon kiihtyvyys on nolla.

1.3 Kaksi kappaletta törmää vaakasuoralla ja kitkattomalla radalla. Mikä seuraavista säilyy törmäyksessä riippumatta kappaleiden massaista ja törmäyksen luonteesta? (2 p.)

- ☐ Kappaleiden liikemäärien summa
- ☐ Kappaleiden liike-energioiden summa
- ☐ Kappaleiden nopeuksien summa

1.4 Oheisessa kuvassa on esitetty kiertoheiluri. Siinä kevyen langan päässä oleva metallipallo kulkee ympyrärataa vaakatasossa. Pallon vauhti pysyy vakiona. Piste K on langan kiinnityspiste, pisteet L ja M ovat pallon radan tasossa. Mikä on pallon kiihtyvyyden suunta? (2 p.)

- ☐ Pallolla ei ole kiihtyvyyttä.
- ☐ Pallosta kohti pistettä M.
- ☐ Pallosta kohti pistettä K.
- ☐ Pallosta kohti pistettä L.



1.5 Äänen nopeus tyynessä ilmassa riippuu (2 p.)

- ☐ ilman lämpötilasta.
- ☐ äänen taajuudesta.
- ☐ äänen etenemissuunnasta.
- ☐ äänen voimakkuudesta.

1.6 Kitaran kielen soivan osan pituus puolitetaan, jolloin kielen värähtelyn perustajuus kaksinkertaistuu. Muutos johtuu siitä, että (2 p.)

- ☐ kielessä etenevän aaltoliikkeen aallonpituus muuttuu.
- ☐ kielessä etenevän aaltoliikkeen nopeus muuttuu.
- ☐ kielen jännitysvoima muuttuu.

1.7 Sulakkeessa on merkinnät 16 A ja 500 V. Tämä tarkoittaa sitä, että (2 p.)

- ☐ sulake katkaisee virtapiirin, kun sulakkeen napajännite kasvaa suuremmaksi kuin 500 V.
- ☐ sulake katkaisee virtapiirin, kun sähkövirta kasvaa suuremmaksi kuin 16 A.
- ☐ sulakkeen resistanssi on noin 31 ohmia.
- ☐ sulake katkaisee virtapiirin, kun sulakkeessa tapahtuva tehohäviö ylittää 8 kW.

1.8 Vesimukiin laitetussa imupillissä näyttää olevan mutka veden pinnan kohdalla. Ilmiö johtuu siitä, että veden ja ilman rajapinnassa valo (2 p.)

- ☐ taipuu.
- ☐ siroaa.
- ☐ taittuu.
- ☐ heijastuu.



1.9 Fotonimallia tarvitaan, kun selitetään (2 p.)

- ☐ valosähköistä ilmiötä.
- ☐ valon taipumista.
- ☐ valon taittumista.
- ☐ valon heijastumista.

1.10 Kaikissa alla mainituissa ilmiöissä syntyy sähkömagneettista säteilyä. Missä ilmiössä säteily voi olla näkyvää valoa? (2 p.)

- ☐ Radiolähettimen antennin vaihtovirta
- ☐ Aineen rakenneosien lämpövarähtely
- ☐ Elektronin ja positronin annihilaatio
- ☐ Atomin ytimen viritystilän purkautuminen

Ratkaisu:

1.1 **Vastaus:** 3 kJ 2 p. (yht. 2 p.)

Pikajuoksijan massa voi olla esimerkiksi 70 kg ja nopeus maalissa $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, jolloin liike-energia on

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 70 \text{ kg} \cdot \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \\ &= 3500 \text{ J} \\ &= 3,5 \text{ kJ.} \end{aligned}$$

Vaihtoehdoista vain 3 kJ on tätä suuruusluokkaa.

1.2 **Vastaus:** Pallon kiihtyvyys on noin $-9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. 2 p. (yht. 2 p.)

Heittohetken ja maahan putoamishetken välillä palloon vaikuttaa vain painovoima, joten pallon kiihtyvyys on putoamiskiihtyvyys. Kiihtyvyys osoittaa alaspäin eli negatiiviseen suuntaan. Asiaan ei vaikuta se, että pallon nopeus on korkeimmassa kohdassa nolla.

1.3 **Vastaus:** Törmäyksessä säilyy kappaleiden liikemäärien summa. 2 p. (yht. 2 p.)

Rata on vaakasuora ja kitkaton, joten kappaleiden muodostamaan systeemiin ei vaikuta ulkoista vaakasuoraa voimaa. Siten systeemin kokonaisliikemäärä säilyy.

Liike-energia säilyy vain kimmoisissa törmäyksissä, joten se ei säily riippumatta törmäyksen luonteesta.

Nopeuksien summa säilyy vain siloin, kun kappaleiden massat ovat yhtä suuret.

1.4 **Vastaus:** Kiihtyvyyden suunta on pallosta kohti pistettä L. 2 p. (yht. 2 p.)

Pallo kulkee vakiovauhdilla ympyrärataa, joten sen kiihtyvyys on keskeiskiihtyvyys, joka osoittaa radan keskipistettä kohti. Kuvassa piste L on radan keskipiste.

1.5 **Vastaus:** Äänen nopeus tyynessä ilmassa riippuu ilman lämpötilasta. 2 p. (yht. 2 p.)

Äänen nopeus määräytyy väliaineen ominaisuuksista, ja ilmassa nopeus kasvaa lämpötilan kasvaessa. Taulukkokirjasta voidaan katsoa äänen nopeus tietyissä lämpötiloissa. Äänen taajuus, etenemissuunta ja voimakkuus eivät vaikuta äänen nopeuteen tyynessä ilmassa.

1.6 **Vastaus:** Perustaajuus kaksinkertaistuu, koska kielessä etenevän aaltoliikkeen aallonpituus muuttuu. 2 p. (yht. 2 p.)

Kielen perustaajuudella kieleen muodostuu seisova aalto, jonka aallonpituus on kaksi kertaa soivan osan pituus, joten pituuden puolittaminen puolittaa aallonpituuden.

1.7 **Vastaus:** Sulake katkaisee virtapiiriin, kun sähkövirta kasvaa suuremmaksi kuin 16 A. 2 p. (yht. 2 p.)

Merkintä 16 A on sulakkeen nimellisvirta eli suurin sähkövirta, jonka sulake kestää katkaisematta piiriä.

Merkintä 500 V on suurin jännite, jonka sulake kestää katkaistuaan piiriin, eikä se ole katkaisun ehto.

Merkintöjen osamäärä $\frac{500 \text{ V}}{16 \text{ A}} \approx 31 \Omega$ ei ole sulakkeen resistanssi, sillä ehjän sulakkeen resistanssi on hyvin pieni.

1.8 **Vastaus:** Ilmiö johtuu siitä, että valo taittuu veden ja ilman rajapinnassa. 2 p. (yht. 2 p.)

Valon nopeus on vedessä pienempi kuin ilmassa, joten valonsäteen suunta muuttuu rajapinnassa. Pillin veden alla olevasta osasta tuleva valo taittuu siirtyessään vedestä ilmaan, jolloin tuo osa näyttää olevan sivussa vedenpinnan yläpuolisesta osasta ja pilli näyttää mutkalta.

1.9 **Vastaus:** Fotonimallia tarvitaan valosähköisen ilmiön selittämiseen. 2 p. (yht. 2 p.)

Valosähköisessä ilmiössä irtoavien elektronien liike-energia riippuu valon taajuudesta eikä valon voimakkuudesta, eikä aaltomalli selitä tätä. Ilmiö selittyy, kun valon energia siirtyy kvantteina eli fotoneina. Taipuminen, taittuminen ja heijastuminen selittyvät aaltomallilla.

1.10 **Vastaus:** Näkyvää valoa voi syntyä aineen rakenneosien lämpöväärhtelystä. 2 p. (yht. 2 p.)

Rakenneosien lämpöväärhtely synnyttää lämpösäteilyä. Spektri siirtyy lyhyemmille aallonpituuksille lämpötilan kasvaessa ja ulottuu riittävän kuumassa kapaleessa näkyvän valon alueelle. Antennin vaihtovirta synnyttää radioaaltoja, ja sekä annihilaatiossa että ytimen viritystilän purkautumisessa vapautuva energia on niin suuri, että säteily on gammasäteilyä.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

2. Tennispallot (15 p.)

Aineisto:

- 2. A [Taulukko: Mittaustulokset tennispallojen pudotuskokeista](#)
- 2. B [Kuvaaja: Pallojen ponnahduskorkeudet purkin avaamisesta kuluneen ajan funktiona](#)

Tennispallojen sisällä on kaasua, jonka paine on suurempi kuin normaali ilmanpaine. Ylipaineen suuruus uudessa pallossa on tyypillisesti hieman alle 100 kPa. Ylipaine pienenee vähitellen, vaikka palloilla ei pelattaisi. Tämän takia tennispallot myydään paineistetuissa purkeissa.

Haluttiin selvittää, mitä pallojen ponnahduskorkeudelle tapahtuu, kun niitä säilytetään normaalipaineessa.

Paineistettu neljän pallon purkki avattiin ja pallot numeroitiin. Pallot pudotettiin yksi kerrallaan 2,54 metrin korkeudesta ja niiden ponnahduskorkeudet $h_1 \dots h_4$ mitattiin. Mittaukset toistettiin useita kertoja noin 10 viikon aikana. Mittaustulokset on annettu taulukossa [2.A](#) ja kuvaajassa [2.B](#).

- 2.1 Piirrä kuvaaja, joka esittää pallojen ponnahduskorkeuksien keskiarvon purkin avaamisesta kuluneen ajan funktiona. Esitä kuvaajassa pelkät mittauspisteet. (7 p.)
- 2.2 Kansainvälisen tennisliiton kriteerien mukaan pelikelpoisten pallojen ponnahduskorkeuden tulee olla 2,54 metrin korkeudesta pudotettuna vähintään 1,35 m ja enintään 1,47 m. Kuinka pitkään purkin avaamisesta pallot säilyivät pelikelpoisina, kun asiaa arvioidaan viimeisten neljän mittausviikon aikana havaitun muutoksen perusteella? Piirrä kuvaaja ja perustele vastauksesi sen avulla. (4 p.)
- 2.3 Mitä muita tekijöitä pudotuskorkeuden lisäksi tulee pitää vakioina, jotta eri mittauskertojen tulokset olisivat vertailukelpoisia? Anna vastaukseksi kaksi merkittävää tekijää. (4 p.)

Ratkaisu:

- 2.1 Lasketaan taulukon 2.A jokaiselta mittauskerralta pallojen ponnahduskorkeuksien keskiarvo ja piirretään keskiarvot purkin avaamisesta kuluneen ajan funktiona.

Lisää laskettu sarake

Nimi

Ponnahduskorkeuksien keskiarvo

Yksiköt

m

☒ Mittaroitu

Precision Format

☒ Desimaalien määrä
 ☐ Merkitsevät numerot

Number of Decimal Places

3

☐ Käytä tieteellistä esitysmuotoa

Lauseke

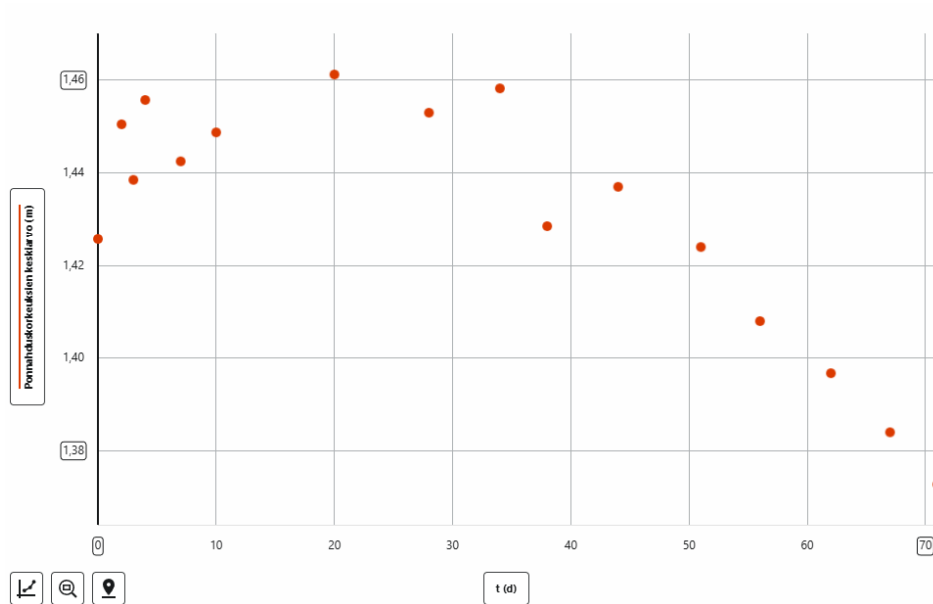
Virhepalkit

PERUUTA

OTA KÄYTTÖÖN

	t (d)	...	h1 (m)	...	h2 (m)	...	h3 (m)	...	h4 (m)	...	Ponnahduskork...	...
1												
2		2		1,448		1,469		1,444		1,441		1,450
3		3		1,443		1,408		1,457		1,446		1,438
4		4		1,473		1,429		1,469		1,452		1,456
5		7		1,457		1,462		1,423		1,428		1,442
6		10		1,454		1,431		1,455		1,455		1,449
7		20		1,461		1,468		1,445		1,471		1,461
8		28		1,449		1,471		1,459		1,433		1,453
9		34		1,464		1,451		1,443		1,475		1,458
10		38		1,422		1,435		1,426		1,431		1,429
11		44		1,411		1,419		1,444		1,474		1,437
12		51		1,385		1,426		1,434		1,451		1,424
13		56		1,394		1,407		1,407		1,424		1,408
14		62		1,398		1,394		1,384		1,411		1,397
15		67		1,381		1,403		1,349		1,403		1,384
16		71		1,391		1,381		1,345		1,374		1,373
17												

2 p. (yht. 2 p.)

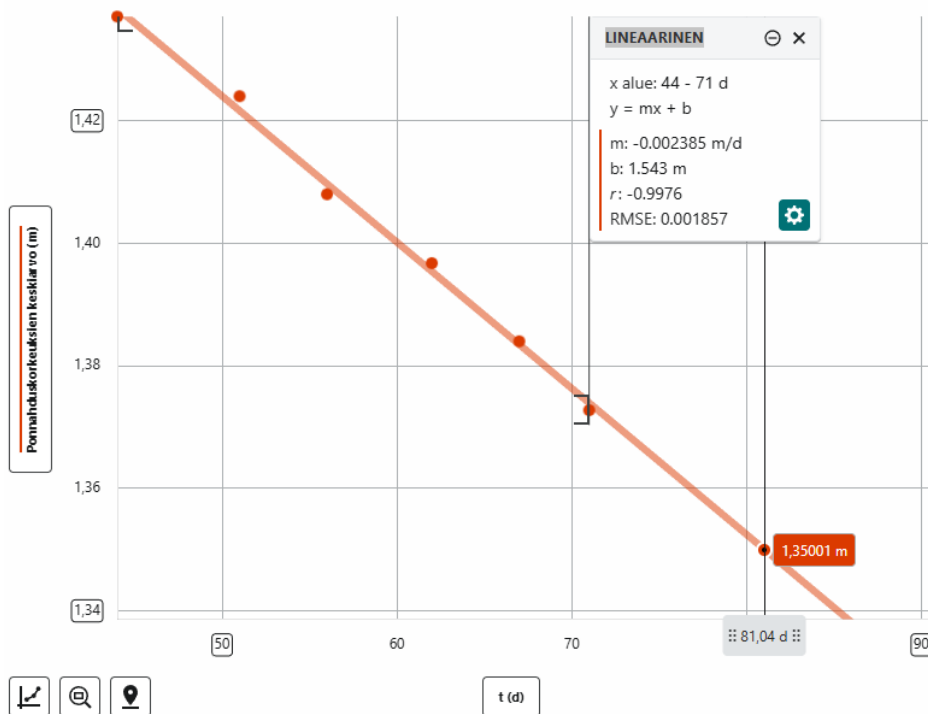


5 p. (yht. 7 p.)

Pisteytyksestä:

- Ponnahduskorkeuden keskiarvojen laskeminen näytetty 2 p
- Oikein piirretty kuvaaja 5 p

2.2 Pelikelpoisen pallon ponnahduskorkeuden alaraja on $h_{\min} = 1,35$ m ja yläraja $h_{\max} = 1,47$ m. Keskiarvo ei ylitä ylärajaa yhdelläkään mittauskerralla, joten pelikelpoisuus päättyy, kun keskiarvo alittaa alarajan. Sovitetaan suora viimeisten neljän mittausviikon keskiarvopisteisiin, eli kuuteen viimeiseen pisteeseen, ja jatketaan suoraa alarajalle asti.



2 p. (yht. 2 p.)

Sovitettu suora leikkaa kohdan $h = 1,35$ m kohdassa $t = 81$ d. 2 p. (yht. 4 p.)

Vastaus: Pallot säilyivät pelikelpoisina noin 81 vuorokauden ajan purkin avaamisesta.

Pisteytyksestä:

- Sovitettu suora viimeisen 4 viikon pisteisiin oikein 2 p
- Luettu aika oikein sovituksen avulla 2 p
- YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 22.9.2026) vastaukseksi oli saatu 83 päivää, joten luultavasti hyväksytään ainakin arvot välillä 81–83 päivää.

2.3

1) Alusta, jolle pallo pudotetaan, on pidettävä samana. Pehmeä alusta ottaa vastaan osan pallon energiasta, jolloin pallo ponnahtaa matalammalle kuin kovalta alustalta.

2) Pallon lämpötila on pidettävä samana. Lämpötilan noustessa pallon sisällä olevan kaasun paine kasvaa ja kumin kimmoisuus muuttuu, jolloin pallo ponnahtaa korkeammalle.

3) Ilmanpaineen tulisi olla sama. Mitä korkeampi ilmanpaine on, sitä tiheämpää ilma on, eli sitä suurempi ilmanvastus palloon kohdistuu. Tämä vaikuttaa ponnahtuskorkeuteen.

4) Ilmankosteus on pidettävä samana. Korkeampi ilmankosteus tekee pallosta hieman raskaamman ja pehmeämmän, jolloin se ponnahtaa matalammalle.

4 p. (yht. 4 p.)

Pisteytyksestä:

- Kaksi hyväksyttävää vakioitavaa tekijää 2 p + 2 p
- Yllä on lueteltu neljä, joista mitkä vain kaksi riittävät pisteiden saamiseen.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

3. Lämpökäsitteitä (15 p.)

Aineisto:

3. A [Kuva: Kiertoprosessi](#)

Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvosettavaksi, poista vastauksesi valitsemalla kustakin pudotusvalikosta tyhjä rivi. Oikea vastaus 1 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

3.1 Ovatko seuraavat tilanmuuttujia? Vastaa kuhunkin osatehtävään kyllä tai ei. (5 p.)

3.1.1 Lämpömäärä (1 p.)

3.1.2 Lämpötila (1 p.)

3.1.3 Paine (1 p.)

3.1.4 Sisäenergia (1 p.)

3.1.5 Työ (1 p.)

Vaihtoehdot: kyllä / ei

3.2 Ideaalikaasulla toimiva lämpövoimakone käyttää kuvan [3.A](#) mukaista suljettua kiertoprosessia ABCA. Täydennä osatehtävissä 3.2.1–3.2.6 virke niin, että se kuvaa parhaiten prosessin vaihetta AB. (6 p.)

3.2.1 Täydennä virke. (1 p.)

Tilavuus .

Vaihtoehdot: pienenee / kasvaa / pysyy vakiona

3.2.2 Täydennä virke. (1 p.)

Paine .

Vaihtoehdot: pienenee / pysyy vakiona / kasvaa

3.2.3 Täydennä virke. (1 p.)

Lämpötila .

Vaihtoehdot: pysyy vakiona / nousee / laskee

3.2.4 Täydennä virke. (1 p.)

Kaasun tekemä työ on .

Vaihtoehdot: nolla / negatiivinen / positiivinen

3.2.5 Täydennä virke. (1 p.)

Kaasuun siirtynyt lämpömäärä on .

Vaihtoehdot: positiivinen / negatiivinen / nolla

3.2.6 Täydennä virke. (1 p.)

Sisäenergia .

Vaihtoehdot: kasvaa / laskee / pysyy vakiona

3.3 Ideaalikaasulla toimiva lämpövoimakone käyttää kuvan 3.A mukaista suljettua kiertoprosessia ABCA. Prosessin vaihe BC on isoterminen. Täydennä osatehtävissä 3.3.1–3.3.4 virke niin, että se kuvaa parhaiten prosessin vaihetta BC. (4 p.)

3.3.1 Täydennä virke. (1 p.)

Lämpötila .

Vaihtoehdot: laskee / pysyy vakiona / nousee

3.3.2 Täydennä virke. (1 p.)

Kaasun tekemä työ on .

Vaihtoehdot: positiivinen / negatiivinen / nolla

3.3.3 Täydennä virke. (1 p.)

Kaasuun siirtynyt lämpömäärä on .

Vaihtoehdot: positiivinen / negatiivinen / nolla

3.3.4 Täydennä virke. (1 p.)

Sisäenergia .

Vaihtoehdot: pysyy vakiona / kasvaa / pienenee

Ratkaisu:

3.1 Tilanmuuttuja on suure, joka kuvaa jotakin systeemiin liittyvää ominaisuutta.

3.1.1 **Vastaus:** Lämpömäärä ei ole tilanmuuttuja. 1 p. (yht. 1 p.)

Lämpömäärä ei kuvaa systeemiä vaan sitä, kuinka paljon lämpöä siirtyy systeemin ja ympäristön välillä tilanmuutoksen aikana.

3.1.2 **Vastaus:** Lämpötila on tilanmuuttuja. 1 p. (yht. 1 p.)

Systeemin lämpötilalla on tietty arvo kussakin yksittäisessä systeemin tilassa.

3.1.3 **Vastaus:** Paine on tilanmuuttuja. 1 p. (yht. 1 p.)

Paineella on tietty arvo kussakin yksittäisessä systeemin tilassa.

3.1.4 **Vastaus:** Sisäenergia on tilanmuuttuja. 1 p. (yht. 1 p.)

Sisäenergia on systeemin rakenneosasten liike- ja potentiaalienergioiden summa. Sillä on kussakin yksittäisessä systeemin tilassa tietty arvo, joten se on tilanmuuttuja.

3.1.5 Vastaus: Työ ei ole tilanmuuttuja. 1 p. (yht. 1 p.)

Työ ei kuvaa systeemiä vaan sitä, kuinka paljon energiaa siirtyy systeemin ja ympäristön välillä tilanmuutoksen aikana. Systeemin työllä ei ole arvoa yksittäisessä tilassa.

3.2

3.2.1 Vastaus: Tilavuus pysyy vakiona. 1 p. (yht. 1 p.)

Kuvassa 3.A vaiheessa $A \rightarrow B$ tilavuus pysyy vakiona (koska jana on pysty-suora).

3.2.2 Vastaus: Paine kasvaa. 1 p. (yht. 1 p.)

Kuvassa 3.A vaiheessa $A \rightarrow B$ paine kasvaa (koska mennään ylöspäin).

3.2.3 Vastaus: Lämpötila nousee. 1 p. (yht. 1 p.)

Ideaalikaasun tilanyhtälön mukaan

$$pV = nRT$$

$$p = \frac{nR}{V} \cdot T$$

Siten vakiotilavuudessa paine ja lämpötila ovat suoraan verrannollisia. Edellisessä kohdassa todettiin, että paine kasvaa, joten myös lämpötila kasvaa.

3.2.4 Vastaus: Kaasun tekemä työ on nolla. 1 p. (yht. 1 p.)

Kaasun tekemä työ on $W = p\Delta V$. Vaiheessa $A \rightarrow B$ tilavuus ei muutu, joten kaasun tekemä työ on nolla.

3.2.5 Vastaus: Kaasuun siirtynyt lämpömäärä on positiivinen. 1 p. (yht. 1 p.)

Aiemmin todettiin, että kaasun tekemä työ on nolla ja että lämpötila nousee. Koska tilavuus ei muutu eikä työtä tehdä, lämpötila voi nousta vain siksi että kaasuun siirtyy lämpöä ympäristöstä. Näin ollen kaasuun siirtynyt lämpömäärä on positiivinen.

3.2.6 Vastaus: Sisäenergia kasvaa. 1 p. (yht. 1 p.)

Lämpöopin 1. pääsäännön mukaan sisäenergian muutos on

$$\Delta U = Q + W,$$

jossa Q on systeemin ja ympäristön välillä siirtyvä lämpömäärä ja W on systeemin ja ympäristön välillä tehty työ.

Lämpömäärä Q on positiivinen, jos lämpöä siirtyy ympäristöstä systeemiin. Edellä todettiin, että juuri näin käy, joten $Q > 0$.

Edellä todettiin, että vaiheessa $A \rightarrow B$ on $W = 0$. Siten sisäenergian muutos on

$$\Delta U = Q + W = Q > 0.$$

3.3

3.3.1 **Vastaus:** Lämpötila pysyy vakiona. 1 p. (yht. 1 p.)

Kuvassa 3.A vaihe $B \rightarrow C$ on isoterminen, joten lämpötila ei muutu.

3.3.2 **Vastaus:** Kaasun tekemä työ on positiivinen. 1 p. (yht. 1 p.)

Kaasu laajenee vaiheessa $B \rightarrow C$, joten se tekee työtä ympäristöönsä. Toisin sanoen kaasun tekemä työ on positiivinen.

3.3.3 **Vastaus:** Kaasuun siirtynyt lämpömäärä on positiivinen. 1 p. (yht. 1 p.)

Lämpöopin 1. pääsäännön mukaan sisäenergian muutos on

$$\Delta U = Q + W.$$

Isotermisessä vaiheessa sisäenergia ei muutu, eli $\Delta U = 0$. Siis

$$0 = Q + W$$

$$Q = -W$$

Työ W on positiivinen, jos ympäristö tekee työtä systeemiin, ja negatiivinen, jos systeemi tekee työtä ympäristöön.

Kuten edellä todettiin, kaasun tekemä työ on positiivinen, eli systeemi tekee työtä ympäristöön, eli $W < 0$. Siten on $Q > 0$, eli kaasuun siirtynyt lämpömäärä on positiivinen.

3.3.4 **Vastaus:** Sisäenergia pysyy vakiona. 1 p. (yht. 1 p.)

Kuvassa 3.A vaiheessa $B \rightarrow C$ tilavuus kasvaa ja paine pienenee. Vaihe on isoterminen, joten lämpötila ei muutu. Ideaalikaasun sisäenergia riippuu vain lämpötilasta, joten sisäenergia pysyy vaiheessa $B \rightarrow C$ vakiona.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

4. Lankku ja punnus (15 p.)

Aineisto:

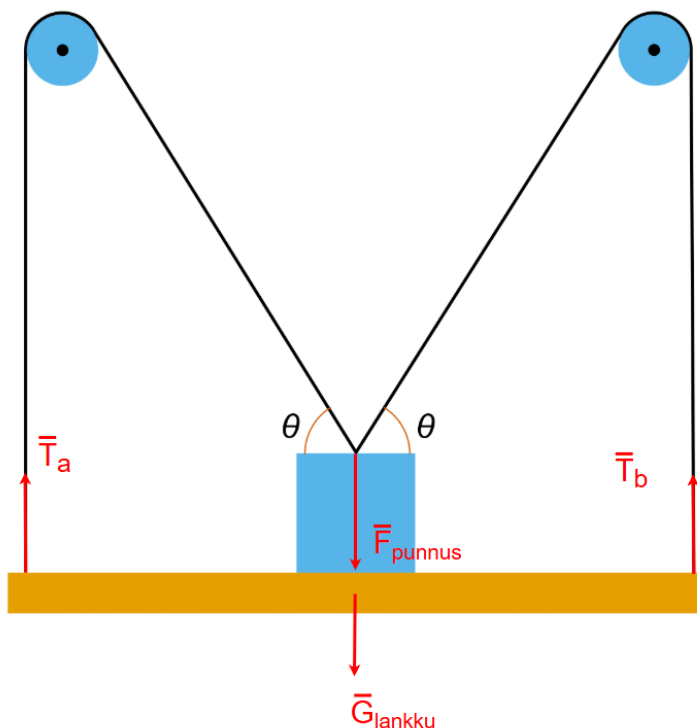
4. A [Kuva: Lankku ja narut](#)

Lankku riippuu narujen varassa kuvan [4.A](#) mukaisesti. Kumpikin naru kulkee kattoon kiinnitetyn väkipyörän yli punnukseen, joka on lankun päällä. Punnukselta lähtevät narut ovat kulmassa $\theta = 55^\circ$ vaakatasoon nähden. Lankun massa on $3,40 \text{ kg}$.

- 4.1 Piirrä lankun voimakuvio. Ole tarkka voimien vaikutuspisteiden ja voimanuolien pituuksien kanssa. (4 p.)
- 4.2 Piirrä punnuksen voimakuvio. (4 p.)
- 4.3 Systeemi on tasapainossa siten, että punnus koskettaa lankkua. Kuinka suuri punnuksen massan täytyy vähintään olla? (7 p.)

Ratkaisu:

4.1



3 p. (yht. 3 p.)

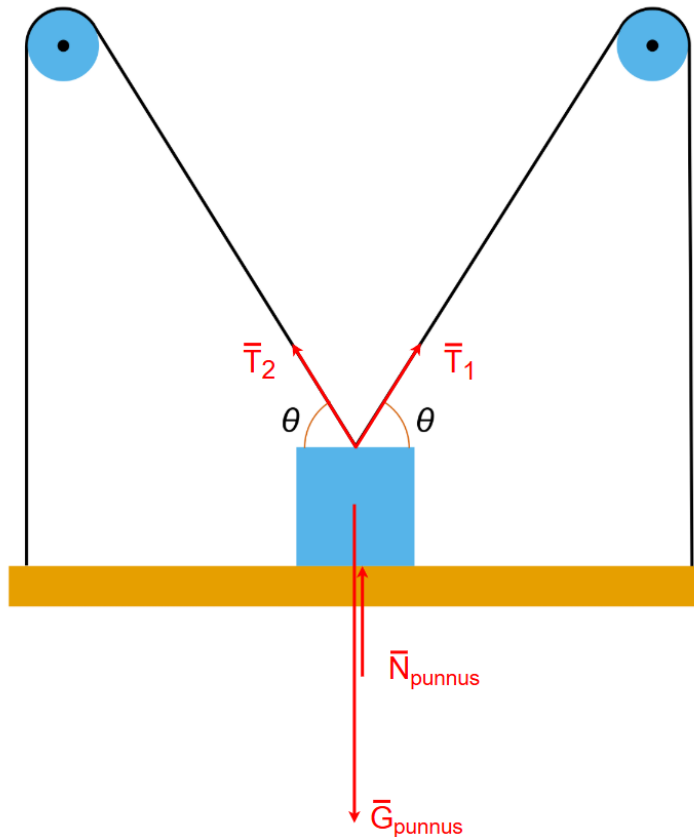
$\overline{T}_a$ ja $\overline{T}_b$ ovat lankkuun kohdistuvat langan jännitysvoimat, $\overline{F}_{\text{punnus}}$ punnuksen lankkuun kohdistama tukivoima ja $\overline{G}_{\text{lankku}}$ lankun paino. 1 p. (yht. 4 p.)

Pisteytyksestä:

- Piirretty oikeat voimavektorit oikeisiin kohtiin 2 p.
- Voimavektoreiden pituudet oikein 1 p.
 - Jännitysvoimat keskenään yhtä suuret
 - Voimien summa silmämääräisesti nolla
 - Lankun painon ja punnuksen tukivoiman keskinäisillä suuruuksilla ei merkitystä
- Voimat nimetty oikein 1 p.

Hyvän vastauksen piirteissä (luettu 22.9.2026) punnuksen tukivoima oli piirretty lankun painoa lyhyemmäksi. Tulkintamme mukaan näiden kahden voimavektorin keskinäisellä pituusjärjestyksellä ei ole merkitystä, sillä tukivoiman suuruus on riippuvainen punnuksen painosta, jota ei tunneta.

4.2



3 p. (yht. 3 p.)

$\vec{T}_1$ ja $\vec{T}_2$ ovat punnukseen vaikuttavat langan jännitysvoimat, $\vec{N}_{\text{punnus}}$ langun punnukseen kohdistama tukivoima ja $\vec{G}_{\text{punnus}}$ punnuksen paino.

1 p. (yht. 4 p.)

Pisteytyksestä:

- Piirretty oikeat voimavektorit oikeisiin kohtiin 2 p.
- Voimavektoreiden pituudet oikein 1 p.
 - Jännitysvoimat keskenään yhtä suuret ja lankojen suuntaiset
 - Voimien summa silmämääräisesti nolla
 - Punnuksen paino suurempi kuin tukivoima
- Voimat nimetty oikein 1 p.

4.3

$$m_{\text{lankku}} = 3,40 \text{ kg}$$

$$\theta = 55^\circ$$

Newtonin kolmannen lain nojalla lankkuun vaikuttava kosketusvoima $\vec{F}_{\text{punnus}}$ ja punnukseen vaikuttava tukivoima $\vec{N}_{\text{punnus}}$ ovat yhtä suuret. 1 p. (yht. 1 p.) Merkitään niiden suuruutta $F_{\text{punnus}} = N_{\text{punnus}} = N$.

Lankku on levossa, joten Newtonin toisen lain nojalla sen liikeyhtälö on:

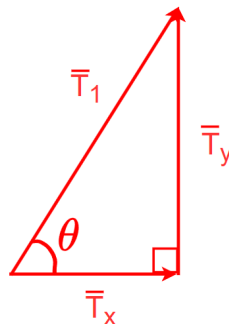
$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{T}_a + \vec{T}_b + \vec{F}_{\text{punnus}} + \vec{G}_{\text{lankku}} = \vec{0}$$

$$2T - F_{\text{punnus}} - G_{\text{lankku}} = 0$$

$$2T - N - m_{\text{lankku}}g = 0 \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)} \quad (1)$$

Kitkattoman väkipyörän yli kulkevassa narussa jännitysvoima on yhtä suuri narun kaikissa kohdissa, joten kumpikin naru vetää sekä lankkua että punnusta yhtä suurella voimalla T . 1 p. (yht. 3 p.) Jaetaan punnukseen vaikuttava tukivoima $\vec{T}_1$ kulman θ avulla komponentteihin:



Kuvasta saadaan:

$$T_y = T \sin \theta$$

Punnus on levossa, joten Newtonin toisen lain nojalla sen pystysuuntainen liikeyhtälö on:

$$\begin{aligned}\Sigma \overline{F}_y &= \overline{0} \\ 2\overline{T}_y + \overline{N}_{\text{punnus}} + \overline{G}_{\text{punnus}} &= \overline{0} \\ 2T \sin \theta + N - m_{\text{punnus}}g &= 0 \quad (1 \text{ p. (yht. 4 p.)})\end{aligned}\tag{2}$$

Ratkaistaan jännitysvoima yhtälöstä (1) ja sijoitetaan se yhtälöön (2).

$$\begin{aligned}T &= \frac{m_{\text{lankku}}g + N}{2} \\ (m_{\text{lankku}}g + N) \sin \theta + N &= m_{\text{punnus}}g \quad || : g \\ m_{\text{punnus}} &= m_{\text{lankku}} \sin \theta + \frac{N(1 + \sin \theta)}{g}\end{aligned}$$

Punnuksen massa on sitä pienempi, mitä pienempi on tukivoima N . Tukivoima on pienimmillään nolla, jolloin punnus juuri ja juuri koskettaa lankkua. (1 p. (yht. 5 p.))

$$\begin{aligned}m_{\min} &= m_{\text{lankku}} \sin \theta \quad (1 \text{ p. (yht. 6 p.)}) \\ &= 3,40 \text{ kg} \cdot \sin 55^\circ \\ &= 2,785 \dots \text{ kg} \\ &\approx 2,8 \text{ kg} \quad (1 \text{ p. (yht. 7 p.)})\end{aligned}$$

Vastaus: Punnuksen massan on oltava vähintään 2,8 kg.

Pisteytyksestä:

- Newtonin 3. lain nojalla punnuksen tukivoima ja punnuksen lankkuun kohdistama voima ovat yhtä suuret 1 p.
- Lankun lopullinen liikeyhtälö 1 p.
- Langan jännitysvoimat lankulle ja punnukselle yhtä suuret 1 p.
- Punnuksen lopullinen liikeyhtälö 1 p.
- Punnuksen massa on pienin mahdollinen rajatapauksessa N on nolla 1 p.
- Ratkaistu pienimmän massan lauseke 1 p.
- Oikea vastaus hyväksyttävällä pyöristystarkkuudella 1 p.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

5. Interferenssi ja diffraktio (15 p.)

Aineisto:

5. A [Kuva: Aaltojen kuluttama hiekkaranta](#)
5. B [Kuva: Merenpinta aallonmurtajan ja laiturin välissä](#)

- 5.1 Selitä lyhyesti, mitä tarkoitetaan mekaanisten aaltojen interferenssillä. (3 p.)
- 5.2 Selitä lyhyesti, mitä tarkoitetaan mekaanisten aaltojen diffraktiolla. (3 p.)
- 5.3 Kuvassa [5.A](#) on esitetty tilanne, jossa hiekkaranta on aaltojen vaikutuksesta kulunut suunnilleen puolimpyrän muotoiseksi. Selitä, miksi ranta on kulunut juuri puolimpyrän muotoiseksi kuvaan katkoviivalla merkityissä kohdissa. (3 p.)
- 5.4 Kuvassa [5.B](#) esitetään meren pinnan aaltoilu aallonmurtajan ja laiturin välissä. Selitä, miksi aallot tuottavat kuvassa havaittavan kuvion aallonmurtajan ja laiturin väliselle alueelle. Alue on rajattu kuvaan katkoviivalla. (6 p.)

Ratkaisu:

- 5.1 Mekaanisten aaltojen interferenssi tarkoittaa sitä, kun mekaaniset aallot muodostavat yhdessä summa-aallon 1 p. (yht. 1 p.) niin, että kussakin kohdassa poikkeama tasapainoasemasta on aaltojen yhteisvaikutuksen aiheuttama. 1 p. (yht. 2 p.) Poikkeama on likimain yhtä suuri kuin niiden poikkeamien summa, jotka aallot olisivat aiheuttaneet yksinään kyseisessä kohdassa. 1 p. (yht. 3 p.)
- 5.2 Mekaanisten aaltojen diffraktio eli taipuminen tarkoittaa aallon muodon muuttumista sen kohdatessa esteen. 1 p. (yht. 1 p.) Kun etenevä aalto kohtaa esteen reunan tai kulkee aukon läpi, aaltorintaman reuna toimii uuden aallon lähteenä, 1 p. (yht. 2 p.) jolloin aalto kaartuu reunan taakse eikä etene enää pelkästään alkuperäiseen suuntaan. 1 p. (yht. 3 p.)

Pisteytyksestä: YTL:n hyvän vastauksen piirteiden (luettu 22.9.2026) mukaan kohdassa 5.2 riitti vastaukseksi "Mekaanisten aaltojen diffraktiolla tarkoitetaan esteen aiheuttamaa aaltoliikkeen suunnan muuttumista."

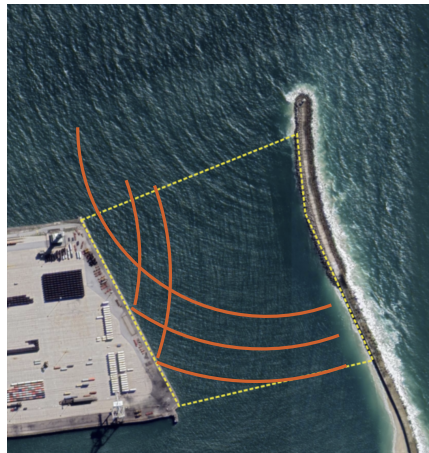
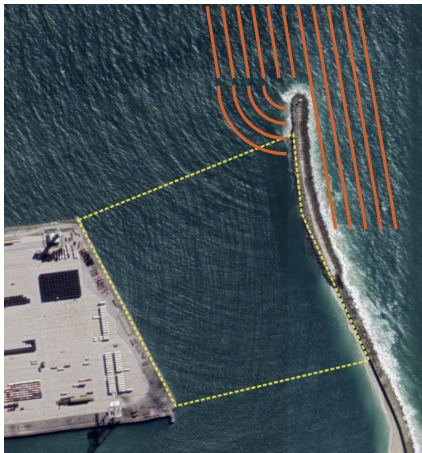
- 5.3 Kuvassa 5.A aallonmurtajat estävät aaltojen etenemisen suoraan rantaan, ja aallot pääsevät murtajien taakse vain niiden välisistä kapeista aukoista. Aukon läpi kulkiessaan aalloille tapahtuu diffraktio, eli aallot taipuvat aukon reunojen kohdalta reunan ohi. 1 p. (yht. 1 p.) Koska aukot ovat varsin kapeita aaltojen aallonpituuteen nähden, aukosta rantaan päin tuleva aalto on likimain puoliympyrän muotoinen. 1 p. (yht. 2 p.) Puoliympyrän muotoiset aallot kuluttavat rantaa yhtä paljon kaikissa suunnissa, joten ranta kuluu puoliympyrän muotoiseksi. 1 p. (yht. 3 p.)

Lisäselityskuva, jota ei vaadita ratkaisussa:



- 5.4 Avomereltä saapuvat aallot eivät pääse aallonmurtajan läpi, vaan ne taipuvat kuvassa 5.B näkyvän aallonmurtajan pään ohi ja leviävät sen takana ympyräaaltoina laiturin ja aallonmurtajan väliselle alueelle. 2 p. (yht. 2 p.) Ympyräaallot saapuvat laiturin pystysuoralle seinämälle ja heijastuvat siitä takaisin alueelle. 2 p. (yht. 4 p.) Heijastunut aalto ja aallonmurtajan reunasta taipunut aalto interferoivat alueella, minkä seurauksena alueelle syntyy kohtia, joissa aallot vahvistavat toisiaan, ja niiden väliin kohtia, joissa aallot kumoavat toisensa. Tämän seurauksena syntyy havaittu kuvio. 2 p. (yht. 6 p.)

Lisäselityskuvat, jota ei vaadita ratkaisussa:



6. Ionisuihkumoottori (15 p.)

Ionisuihkumoottoreita voidaan käyttää avaruusalusten kiihdyttämiseen ja ohjaamiseen avaruudessa. Sähkökenttä kiihdyttää ionisoituja atomeja. Tämä saa aikaan työntövoiman alukseen.

NASAn kehittämässä NSTAR-ionisuihkumoottorissa ksenon-ionit Xe^+ kiihdytetään levosta 1300 V:n jännitteellä. Ksenonin atomimassa on 131,293 u.

6.1 Kuinka suurella nopeudella ionit poistuvat NSTAR-moottorista? (5 p.)

6.2 NSTAR-moottori pystyy tuottamaan 92 mN:n työntövoiman. Kuinka suuri on yhdessä sekunnissa moottorista poistuvien ksenon-ionien yhteenlaskettu massa? Kuinka suuri on moottorin ionivirran sähköteho? (10 p.)

Ratkaisu:

6.1.

$$U = 1300 \text{ V}$$

$$m_{\text{ioni}} = 131,293 \text{ u}$$

$$= 131,293 \cdot 1,660\,539\,066\,60 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$= 2,180\,171 \dots \cdot 10^{-25} \text{ kg}$$

$$e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Ionin massa on todellisuudessa yhden elektronin massan verran pienempi kuin neutraalin ksenon-atomin massa, mutta koska elektronin massa on häviävän pieni verrattuna atomin massaan, tässä laskussa voidaan käyttää suoraan atomin massaa ionin massana.

Ionien kiihdytyksessä sähkökenttä tekee työn W , joka muuttaa sähköisen potentiaalienergian ionin liike-energiaksi. 2 p. (yht. 2 p.)

$$W = E_k$$

$$eU = \frac{1}{2} m_{\text{ioni}} v^2 \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)} \quad \parallel \cdot \frac{2}{m_{\text{ioni}}}$$

$$v^2 = \frac{2eU}{m_{\text{ioni}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_{\text{ioni}}}} \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1300 \text{ V}}{2,180\,171 \dots \cdot 10^{-25} \text{ kg}}}$$

$$= 4,3711 \dots \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\approx 4,4 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

Vastaus: Ionit poistuvat moottorista nopeudella $4,4 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Pisteytyksestä:

- Sähkökentän tekemä työ muuttaa ionin sähköisen potentiaalienergian liike-energiaksi 2 p.
- Työn ja liike-energian yhteyden lauseke 1 p.
- Yhtälö ratkaistu nopeuden suhteen 1 p.
- Oikea vastaus hyväksyttävällä pyöristystarkkuudella 1 p.

6.2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

$$F = 92 \text{ mN} = 92 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$\Delta t = 1,0 \text{ s}$$

$$m_{\text{ioni}} = 2,180\,171 \dots \cdot 10^{-25} \text{ kg}$$

$$v = 4,3711 \dots \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Koska työntövoima F on vakio ja vaikuttaa ajan Δt , sen aiheuttama impulssi $I = F \cdot \Delta t$ on yhtä suuri kuin poistuvien ionien yhteinen liikemäärän muutos Δp , kun jokainen ioni kiihdytetään levosta. 2 p. (yht. 2 p.)

$$F \cdot \Delta t = \Delta p$$

$$F \cdot \Delta t = m \cdot v - m \cdot v_0$$

$$F \cdot \Delta t = m \cdot v \quad \parallel \cdot \frac{\Delta t}{v}$$

$$m = \frac{F \Delta t}{v} \quad \text{2 p. (yht. 4 p.)}$$

$$= \frac{92 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot 1,0 \text{ s}}{4,3711 \dots \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$= 2,1046 \dots \cdot 10^{-6} \text{ kg}$$

$$\approx 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

Ajassa Δt moottorista poistuu N ionia, joiden yhteismassa on m ja kunkin ionin massa m_{ioni} .

$$N = \frac{m}{m_{\text{ioni}}} \quad \text{2 p. (yht. 7 p.)}$$

Sähkökenttä tekee kullekin ionille työn eU , joten ionivirran sähköteho on

$$P = \frac{NeU}{\Delta t} \quad \text{2 p. (yht. 9 p.)}$$

$$= \frac{m eU}{m_{\text{ioni}} \Delta t}$$

$$= \frac{2,1046 \dots \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot 1,60217 \dots \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1300 \text{ V}}{2,180171 \dots \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot 1,0 \text{ s}}$$

$$= 2010,732 \dots \text{ W}$$

$$\approx 2,0 \cdot 10^3 \text{ W} \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

Vastaus: Moottorista poistuu sekunnissa ksenon-ioneja yhteensä $2,1 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$, ja ionivirran sähköteho on $2,0 \text{ kW}$.

Pisteytyksestä:

- Työntövoiman aiheuttama impulssi on yhtä suuri kuin poistuvien ionien liikemäärän muutos 2 p.
- Liikemäärän muutoksen yhtälö ratkaistu massan suhteen 2 p.
- Oikea kokonaismassan arvo hyväksyttävällä pyöristystarkkuudella 1 p.
- Ionien lukumäärän lauseke 2 p.
- Sähkötehon lauseke ionien lukumäärän, varauksen ja jännitteen avulla 2 p.
- Oikea sähkötehon arvo hyväksyttävällä pyöristystarkkuudella 1 p.

Ratkaisuvaihtoehto 2

$$F = 92 \text{ mN} = 92 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$\Delta t = 1,0 \text{ s}$$

$$m_{\text{ioni}} = 2,180\,171 \dots \cdot 10^{-25} \text{ kg}$$

$$v = 4,3711 \dots \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$U = 1300 \text{ V}$$

$$e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Koska työntövoima F on vakio ja vaikuttaa ajan Δt , sen aiheuttama impulssi $F \cdot \Delta t$ on yhtä suuri kuin poistuvien ionien yhteinen liikemäärän muutos Δp , kun jokainen ioni kiihdytetään levosta. 2 p. (yht. 2 p.)

$$F \cdot \Delta t = \Delta p$$

$$F \cdot \Delta t = m \cdot v - m \cdot v_0$$

$$F \cdot \Delta t = m \cdot v \quad \parallel \cdot \frac{\Delta t}{v}$$

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{F \Delta t}{v} \quad (2 \text{ p. (yht. 4 p.)}) \\
 &= \frac{92 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot 1,0 \text{ s}}{4,3711 \dots \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \\
 &= 2,1046 \dots \cdot 10^{-6} \text{ kg} \\
 &\approx 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \quad (1 \text{ p. (yht. 5 p.)})
 \end{aligned}$$

Ajassa Δt moottorista poistuvien ionien määrä on

$$N = \frac{m}{m_{\text{ioni}}} \quad (2 \text{ p. (yht. 7 p.)})$$

Jokaisella näistä ioneista on sähkövaraus e . Näiden ionien kuljettama sähkövaraus on

$$Q = Ne.$$

Lasketaan sähkövirta:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{Q}{\Delta t} & \parallel Q &= Ne \\
 &= \frac{Ne}{\Delta t} & \parallel N &= \frac{m}{m_{\text{ioni}}} \\
 &= \frac{\frac{m}{m_{\text{ioni}}} \cdot e}{\Delta t} \quad (1 \text{ p. (yht. 8 p.)}) \\
 &= \frac{me}{m_{\text{ioni}} \Delta t} \\
 &= \frac{2,1046 \dots \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot 1,60217 \dots \cdot 10^{-19} \text{ C}}{2,180\,171 \dots \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot 1,0 \text{ s}} \\
 &= 1,5467 \dots \text{ A}
 \end{aligned}$$

Lasketaan ionivirran sähköteho:

$$\begin{aligned}
 P &= UI \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)}) \\
 &= 1300 \text{ V} \cdot 1,5467 \dots \text{ A} \\
 &= 2010,7 \dots \text{ W} \\
 &\approx 2,0 \cdot 10^3 \text{ W} \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)})
 \end{aligned}$$

Vastaus: Moottorista poistuu sekunnissa ksenon-ioneja yhteensä $2,1 \cdot 10^{-6}$ kg, ja ionivirran sähköteho on 2,0 kW.

Pisteytyksestä:

- Työntövoiman aiheuttama impulssi on yhtä suuri kuin poistuvien ionien liikemäärän muutos 1 p.
- Liikemäärän muutoksen yhtälö ratkaistu massan suhteen 2 p.
- Oikea kokonaismassan arvo hyväksyttävällä pyöristystarkkuudella 1 p.
- Ionien lukumäärän lauseke 2 p.
- Virran lauseke ionien kokonaismassan, alkeisvarauksen, yksittäisen ionin massan ja ajan avulla 1 p.
- Sähkötehon lauseke jännitteen ja virran avulla 1 p.
- Oikea sähkötehon arvo hyväksyttävällä pyöristystarkkuudella 1 p.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

7. Suurjännitetasavirran magneettikenttä (15 p.)

Energiaa voidaan siirtää tasavirtana suurella jännitteellä. Tällöin sähkövirta synnyttää voimajohdon ympärille magneettikentän. Säteilyturvakeskus suosittelee, että voimajohdot ja rakennukset sijoitettaisiin siten, että voimajohtojen aiheuttama magneettivuon tiheys olisi korkeintaan $0,4 \mu\text{T}$ tiloissa, joissa lapset oleskelevat.

Tarkastellaan tilannetta, jossa sähköenergiaa siirretään tasavirtana 400 kV :n jännitteellä ja energian siirtoteho on 400 MW .

7.1 Kuinka kauas yksittäisestä johtimesta uusi päiväkoti tulisi vähintään sijoittaa, jotta johtimen aiheuttama magneettivuon tiheys olisi korkeintaan $0,4 \mu\text{T}$? Voit olettaa, että johdin on suora. (9 p.)

7.2 Käytännössä voimajohdot rakennetaan usein käyttäen johdinpareja, jolloin vierekkäisissä johtimissa on vastakkaisuuntainen mutta yhtä suuri sähkövirta. Kuinka kauas uusi päiväkoti tulisi vähintään sijoittaa johdinparista, jossa johtimien välinen etäisyys on 2 m ? Tarkastele tilannetta suorien johtimien kanssa samassa tasossa. (6 p.)

Ratkaisu:

7.1

$$U = 400 \text{ kV} = 400 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$P = 400 \text{ MW} = 400 \cdot 10^6 \text{ W} \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)})$$

$$B = 0,4 \mu\text{T} = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

Suoran virtajohtimen aiheuttama magneettikenttä on Biot'n ja Savart'n lain mukaan

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (1 \text{ p. (yht. 2 p.)}) \quad (1)$$

jossa $\mu_0 = 1,256 \, 637 \, 062 \, 12 \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}}$ on tyhjiön permeabiliteetti, I johtimessa kulkeva virta ja r etäisyys johtimesta.

Ratkaistaan johtimessa kulkeva sähkövirta:

$$P = UI \quad (1 \text{ p. (yht. 3 p.)}) \quad || : U$$

$$I = \frac{P}{U} \quad (1 \text{ p. (yht. 4 p.)})$$

Sijoitetaan tulos yhtälöön (1):

$$B = \frac{\mu_0 P}{2\pi r U} \quad (2)$$

Ratkaistaan yhtälöstä (2) CAS-ohjelmalla muuttuja r .

$$\begin{aligned} r &= \frac{\mu_0 P}{2\pi U B} \quad (2 \text{ p. (yht. 6 p.)}) \\ &= \frac{1,256\,637\,062\,12 \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 400 \cdot 10^6 \text{ W}}{2\pi \cdot 400 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ T}} \\ &= 500,000\,000\,272 \dots \text{ m} \quad (1+1 \text{ p. (yht. 8 p.)}) \\ &\approx 500 \text{ m} \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)}) \end{aligned}$$

Vastaus: Päiväkoti tulisi sijoittaa vähintään 500 m:n etäisyydelle yksittäisestä joh-
timesta.

Pisteytyksestä:

- Kaavasta $P = UI$ lähtien virran laskemisesta oikein saa yhteensä 4 p. Jos ei ole laskenut erikseen välitulosta, nämä pisteet voi antaa seuraavasti: 1 p suureiden saattamisesta yhteensopiviin yksiköihin sijoitusta varten, 1 p kaavasta, 1 p virran ratkaistusta lausekkeesta ja 1 p oikeasta vastauksesta, joka oli seurausta näiden arvojen sijoittamisesta oikein lopulliseen lausek-
keeseen.
- Oikea magneettivuon tiheyden kaava 1 p
- Oikean lopullinen lauseke tunnettujen suureiden avulla r :lle 2 p
- Oikea vastaus 1 p
- Oikea vastaus hyväksyttävällä pyöristystarkkuudella 1 p

Yhtälön ratkaisu ilman CAS-ohjelmaa:

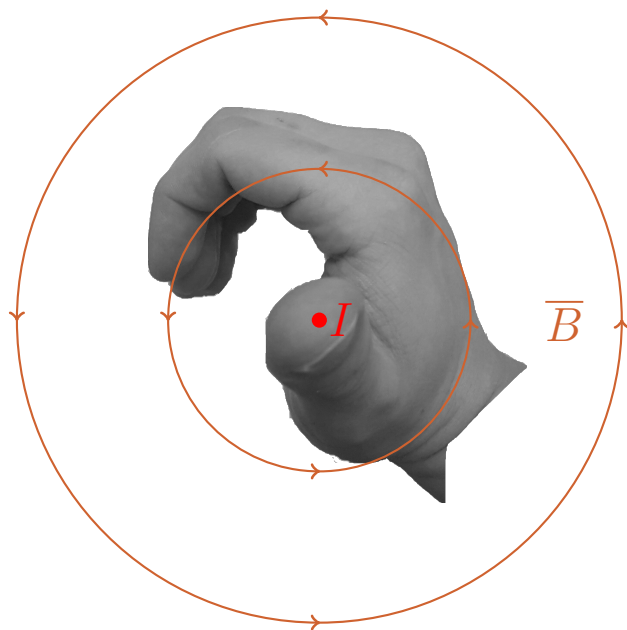
$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 P}{2\pi r U} \\ B &= \frac{\mu_0 P}{2\pi r U} \quad || \cdot 2\pi r U \\ 2\pi r U B &= \mu_0 P \quad || : 2\pi U B \\ r &= \frac{\mu_0 P}{2\pi U B} \end{aligned}$$

7.2 Johtimien etäisyys on $d = 2 \text{ m}$.

Johtimien magneettikentät ovat johtimien tasossa muualla kuin johdinten välissä vastakkaissuuntaiset, joten magneettivuon tiheys on johtimien aiheuttamien magneettivuon tiheyksien erotus. 1 p. (yht. 1 p.)

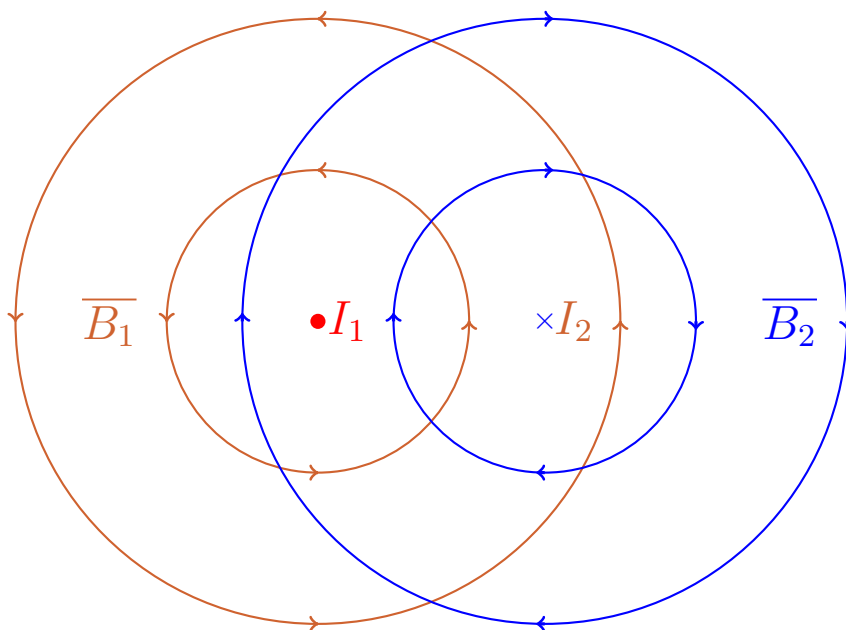
Lisäselitys magneettikenttien suunnista:

Suoran virtajohtimen aiheuttaman magneettikentän kenttäviivat ovat johtimen kanssa kohtisuorassa tasossa olevia ympyröitä, joiden keskipiste on johtimen sisällä. Magneettikentän suunta saadaan oikean käden säännöllä:



Yllä olevassa kuvassa virran suunta on katsojaa kohti ja magneettikentän kenttäviivojen suunta vastapäivään.

Kun viereen laitetaan toinen johdin, jossa virran suunta on katsojasta poispäin (tietokoneen näytön sisään), on tämän johtimen aiheuttaman magneettikentän kenttäviivojen suunta myötäpäivään.



Yllä olevasta kuvasta nähdään, että muualla kuin johdinten välissä magneettikentät ovat vastakkaisuuntaiset. Päiväkoti rakennetaan luonnollisesti muualle kuin johdinten väliin.

Merkitään etäisyyttä lähemmästä johtimesta kirjaimella x . Olkoon tämä johdin nimeltään johdin 1.

Kauempi johdin on johdin 2. Etäisyys kauemmasta johtimesta on $x + d$.

Johtimen 1 aiheuttama magneettivuon tiheys on B_1 .

Johtimen 2 aiheuttama magneettivuon tiheys on B_2 .

Johdin 1 on lähempänä kuin johdin 2, joten $B_1 > B_2$.

Lasketaan magneettivuon tiheys pisteessä P , joka ei ole johdinten välissä.

$$B = B_1 - B_2 \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

$$B = \frac{\mu_0 P}{2\pi x U} - \frac{\mu_0 P}{2\pi(x + d)U} \quad \text{2 p. (yht. 4 p.)} \quad (3)$$

Ratkaistaan yhtälöstä (3) CAS-ohjelmalla muuttuja x .

$$x = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 + \frac{2\mu_0 P d}{\pi U B}}}{2} \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

Sijoitetaan lukuarvot:

$$x = \frac{-2 \text{ m} \pm \sqrt{(2 \text{ m})^2 + \frac{2 \cdot 1,256 \dots \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 400 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot 2 \text{ m}}{\pi \cdot 400 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ T}}}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \text{ m} \pm 63,277 \dots \text{ m}}{2}$$

Etäisyys x ei voi olla negatiivinen, joten vain plusmerkki käy:

$$x = \frac{-2 \text{ m} + 63,277 \dots \text{ m}}{2}$$

$$x = 30,638 \dots \text{ m}$$

$$x \approx 30 \text{ m} \quad (1 \text{ p. (yht. 6 p.)})$$

Vastaus: Uusi päiväkotit tulisi sijoittaa vähintään 30 m:n etäisyydelle lähemmästä johtimesta.

Myös kahden merkitsevän numeron tarkkuudella annettu vastaus 31 m hyväksytään, sillä merkitseviä numeroita saa antaa yhden enemmän kuin tehtävänannon epätarkimmassa likiarvossa on.

Pisteytyksestä:

- Perusteltu magneettivuon tiheyksien erotus ja lauseke erotukselle 1 p + 1 p
- Magneettivuon tiheyden lauseke tunnettujen suureiden ja kysytyn etäisyyden funktiona 2 p
- Ratkaistu kysytty etäisyys oikein 1 p
- Oikea vastaus hyväksyttävällä pyöristystarkkuudella 1 p

Jos yhtälö ratkaistaan ilman CAS-ohjelmaa, voidaan aloittaa sievennyksestä:

$$\begin{aligned}
 B &= B_1 - B_2 \\
 &= \frac{x+d}{2\pi xU} \mu_0 P - \frac{x}{2\pi(x+d)U} \mu_0 P \\
 &= \frac{\mu_0 P(x+d)}{2\pi x(x+d)U} - \frac{\mu_0 Px}{2\pi x(x+d)U} \\
 &= \frac{\mu_0 P(x+d) - \mu_0 Px}{2\pi x(x+d)U} \\
 &= \frac{\mu_0 Px + \mu_0 Pd - \mu_0 Px}{2\pi x(x+d)U} \\
 &= \frac{\mu_0 Pd}{2\pi Ux(x+d)}
 \end{aligned}$$

Sen jälkeen yhtälön ratkaisu onnistuu esimerkiksi näin:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\mu_0 Pd}{2\pi Ux(x+d)} \quad || \cdot 2\pi Ux(x+d) \\
 2\pi UBx(x+d) &= \mu_0 Pd \quad || : 2\pi UB \\
 x(x+d) &= \frac{\mu_0 Pd}{2\pi UB} \\
 x^2 + dx &= \frac{\mu_0 Pd}{2\pi UB} \\
 x^2 + dx - \frac{\mu_0 Pd}{2\pi UB} &= 0
 \end{aligned}$$

Tämän jälkeen käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa, jolloin saadaan sama tulos kuin CAS-ohjelmalla.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

8. Neutroniaktiivointi (15 p.)

Aineisto:

8. A [Taulukko: Kullan isotoopit](#)8. B [Taulukko: Mittaustulokset](#)

Kallioperän kultapitoisuutta tutkittiin neutroniaktiivointimenetelmällä. Kalliosta otettu pieni kiviinäyte altistettiin ensin neutronisäteilylle, jolloin osa näytteen sisältämistä kultaytimistä muuttui radioaktiiviseksi isotoopiksi. Seuraavaksi kiviinäyte asetettiin 15,0 cm:n päähän ilmaisimesta, jolla mitattiin radioaktiivisen isotoopin hajoamisessa syntynyttä gammasäteilyä.

8.1 Neutronisäteilytyksessä osa näytteen kultaytimistä muuttuu isotoopiksi X reaktioyhtälön $\text{Au} + n \rightarrow X$ mukaisesti. Taulukossa [8.A](#) on lueteltu kullan eri isotooppeja. Mikä on isotooppi X aineiston perusteella? (3 p.)

8.2 Isotoopin X hajoamisessa syntyvien gammafotonien määrää mitattiin viidesä peräkkäisessä ajanjaksossa. Kunkin ajanjakson kesto oli $\tau = 4,00$ h. Kaikista näytteessä syntyvistä gammafotoneista ilmaisimella havaitsee vain osuuden $p = 0,089\%$. Ilmaisimen havaitsemien gammafotonien lukumäärät on esitetty taulukossa [8.B](#).

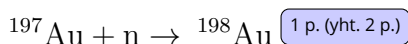
Johda lauseke, joka esittää hetkellä t alkaneen neljän tunnin mittaisen ajanjakson aikana havaittujen fotonien lukumäärän ajan t funktiona. Määritä mittaustulosten perusteella isotoopin puoliintumisaika. (6 p.)

8.3 Kuinka monta isotoopin X ydintä neutronisäteilytys tuotti kiviinäytteeseen? (3 p.)

8.4 Mainitse yksi syy, miksi ilmaisimella havaitsee vain pienen osan näytteessä syntyneistä gammafotoneista. (3 p.)

Ratkaisu:

8.1 Aineiston 8.A mukaan kullalla on vain yksi luonnossa esiintyvä isotooppi ^{197}Au , jonka suhteellinen runsaus on 100 %. 1 p. (yht. 1 p.) **Muiden taulukkokirjasta löytyvien kullan isotooppien puoliintumisaikat ovat suhteellisen lyhyitä.** Näyte sisältää kultaa vain isotooppina 197. Neutronisäteilytyksessä ytimeen liittyy yksi neutroni, jolloin massaluku kasvaa yhdellä ja järjestysluku säilyy muuttumattomana:



Aineiston mukaan ^{198}Au hajoaa β^- -hajoamisella. Gammasäteilyä syntyy, kun reaktion seurauksena syntynyt ydin jää virittyneeseen tilaan, joka purkautuu.

Vastaus: Isotooppi X on ^{198}Au . 1 p. (yht. 3 p.)

Pisteytyksestä:

- Perustelu luonnossa esiintyvälle kullan isotoopille 1p.
- Reaktioyhtälö esitetty 1p.
- Isotooppi X määritetty oikein 1p.

8.2

$$\tau = 4,00 \text{ h}$$

$$p = 0,089 \% = 8,9 \cdot 10^{-4}$$

Hajoamattomien ytimien lukumäärä noudattaa hajoamislakia $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ 1 p. (yht. 1 p.), missä N_0 on isotoopin X ytimien lukumäärä hetkellä $t = 0$. Ajanjakso τ hajoavien ytimien lukumäärä on

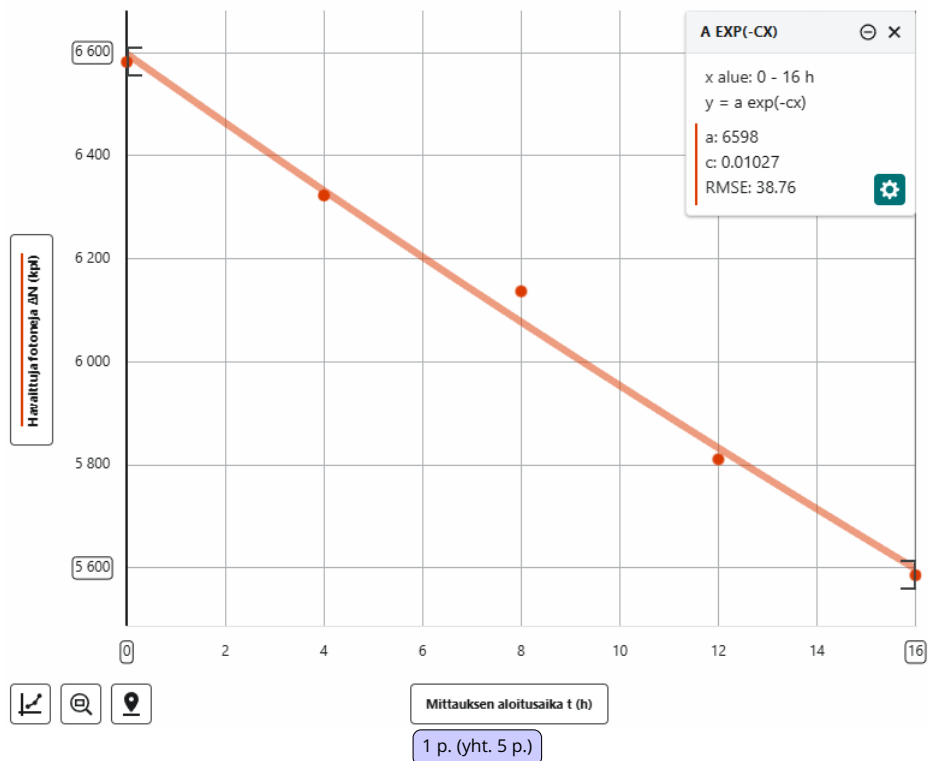
$$\begin{aligned} N(t) - N(t + \tau) &= N_0 e^{-\lambda t} - N_0 e^{-\lambda(t+\tau)} \\ &= N_0 e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda \tau}). \end{aligned} \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

Oletetaan, että kunkin hajoamisen seurauksena syntyy yksi gammafotoni, ja ilmaisoin havaitsee näistä osuuden p . Tällöin havaittujen fotonien lukumäärä $\Delta N(t)$ saadaan laskettua kaavalla:

$$\Delta N(t) = p N_0 (1 - e^{-\lambda \tau}) e^{-\lambda t} \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)} \quad (1)$$

Havaittujen fotonien lukumäärä on verrannollinen hajoamisten lukumäärään, joten tehtävässä kysytty puoliintumisaika saataisiin samasta sovituksesta, vaikka yhden hajoamisen seurauksena syntyisi useampikin gammafotoni.

Yhtälö (1) on muotoa $\Delta N(t) = a e^{-\lambda t}$, joten sovitetaan aineiston 8.B pisteisiin eksponenttifunktio. 1 p. (yht. 4 p.)



Sovituksesta nähdään, että vakio c vastaa hajoamisvakiota λ , ja sen arvo on

$$\lambda = 0,01027 \dots \frac{1}{h}$$

Puoliintumisaika saadaan hajoamisvakiosta:

$$\begin{aligned}
 T_{\frac{1}{2}} &= \frac{\ln 2}{\lambda} \\
 &= \frac{\ln 2}{0,01027 \dots \frac{1}{h}} \\
 &= 67,492 \dots h \\
 &\approx 67 h
 \end{aligned}$$

Vastaus: 4 tunnin aikaikkunan aikana havaittujen fotonien lukumäärä on $\Delta N(t) = pN_0(1 - e^{-\lambda t})$, ja isotoopin puoliintumisaika on 67 tuntia.

Pisteytyksestä:

- Hajoamislaki 1p.
- Syntyneiden fotonien lukumäärän lauseke 1p.
- Havaittujen fotonien lukumäärän lauseke 1p.
- Perustelu eksponenttifunktion sovittamiselle 1p.
- Oikeaoppinen kuvaaja 1p.
- Puoliintumisaika määritetty 1p.
 - Pyöristystarkkuus joko kahdelle tai kolmelle desimaalille.

Koska se on tehtävässä mahdollista, saatua vastausta kannattaa verrata taulukkoarvoon. Päivissä mitattuna saatu puoliintumisaika on 2,8121... d. Mafy-
taulukoista katsottuna isotoopin ^{198}Au puoliintumisaika on 2,69464 d. Vastaus on siis järkevää suuruusluokkaa!

8.3

$$a = 6598$$

$$\lambda = 0,01027 \dots \frac{1}{\text{h}}$$

$$\tau = 4,00 \text{ h}$$

$$p = 0,089 \% = 8,9 \cdot 10^{-4}$$

Sovituksen kerroin a on yhtälöstä (1) katsottuna

$$\begin{aligned}
 a &= pN_0(1 - e^{-\lambda\tau}) \quad \boxed{1 \text{ p. (yht. 1 p.)}} \quad || : p(1 - e^{-\lambda\tau}) \\
 N_0 &= \frac{a}{p(1 - e^{-\lambda\tau})} \quad \boxed{1 \text{ p. (yht. 2 p.)}} \\
 &= \frac{6598}{8,9 \cdot 10^{-4} \cdot \left(1 - e^{(-0,01027 \dots \frac{1}{\text{h}} \cdot 4,00 \text{ h})}\right)} \\
 &= 1,84196655 \dots \cdot 10^8 \\
 &\approx 1,8 \cdot 10^8 \quad \boxed{1 \text{ p. (yht. 3 p.)}}
 \end{aligned}$$

Vastaus: Neutronisäteilytys tuotti kivinäytteeseen noin $1,8 \cdot 10^8$ isotoopin ^{198}Au ydintä.

Pisteytyksestä:

- Sovitteen vakiotermi tulkittu oikein 1p.
- Lauseke kysytylle radioaktiivisten ytimien lukumäärälle 1p.
- Oikea vastaus 1p.

Vastauksessa ei tarvitse ilmoittaa kullan isotooppia, vaan siihen voi viitata tehtävänannon mukaan isotooppina X.

8.4 Näyte säteilee gammafotoneja kaikkiin suuntiin. Ilmaisin peittää 15,0 cm:n etäisyydellä vain pienen osan siitä pallopinnasta, jolle fotonit jakautuvat, eli valtaosa fotoneista ei koskaan vuorovaikuta säteilyilmaisimen kanssa. 3 p. (yht. 3 p.)

Säteilyilmaisim ei myöskään haivaitse jokaista sille tulevaa fotonia. Tämä voi johtua säteilyilmaisimen toimintatavasta tai siitä, että gammasäteily vuorovaikuttaa aineen kanssa heikosti.

Pisteytyksestä: Täysiin pisteisiin vaadittiin yksi mahdollinen syy. Täydet pisteet (3p) saa siis joko

- Mainitsemalla mittausgeometrian, eli sen, että syntyneet fotonit etenevät satunnaisesti suuntiin eikä valtaosa koskaan päädy säteilyilmaisimelle
- Mainitsemalla sen, että vaikka kaikki fotonit päätyisivät säteilyilmaisimelle, ilmaisin ei rekisteröisi jokaista fotonia.

Säteen ollessa 15 cm, pallopinnan pinta-alaksi saadaan

$$\begin{aligned} A &= 4\pi r^2 \\ &= 4 \cdot \pi \cdot (15 \text{ cm})^2 \\ &\approx 2800 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Tästä pinta-alasta havaittu osuus 0,089% vastaa noin 2,5 cm² suuruista pinta-alaa, mikä voisi hyvinkin vastata säteilyilmaisimen instrumentteja.

Gammasäteilyä vois myös absorboitua kiviäytteeseen, mutta tämän vaikutus on hyvin pieni muihin syihin verrattuna.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

9. Ilmastointi ja vesihöyry (20 p.)

Aineisto:

9. A [Teksti: Ilma ja vesihöyry](#)
9. B [Taulukko: Kylläisen vesihöyryn paine](#)

Tutustu tekstiin [9.A](#), jossa kerrotaan vesihöyryn fysikaalisista ominaisuuksista ilmassa. Ilmastointilaitteella voidaan jäähdyttää ilmaa, jolloin ulkoilmasta voi tiivistyä vettä nesteeksi. Tarkastellaan tilannetta, jossa ulkoilman lämpötila on 25°C , ilman suhteellinen kosteus on 75 % ja ilmanpaine on normaali.

- 9.1 Piirrä kylläisen vesihöyryn paine lämpötilan funktiona ja määritä kuvaajan avulla ulkoilman kastepiste. Hyödynnä vastauksessasi taulukkoa [9.B](#). (4 p.)
- 9.2 Määritä kuutiometrissä ulkoilmaa olevan vesihöyryn massa. (4 p.)
- 9.3 Auton ilmastointilaitteen läpi kulkee ulkoilmaa. Ilma jäähtyy laitteessa 11°C :n lämpötilaan. Kuinka monta grammaa vettä tiivistyy kuutiometristä ulkoilmaa? (8 p.)
- 9.4 Ilmastointilaitteen läpi kulkee $0,90\text{ m}^3$ ulkoilmaa minuutissa. Kuinka suurella teholla ilmastointilaitteeseen siirtyy energiaa vesihöyryn tiivistymisen takia? (4 p.)

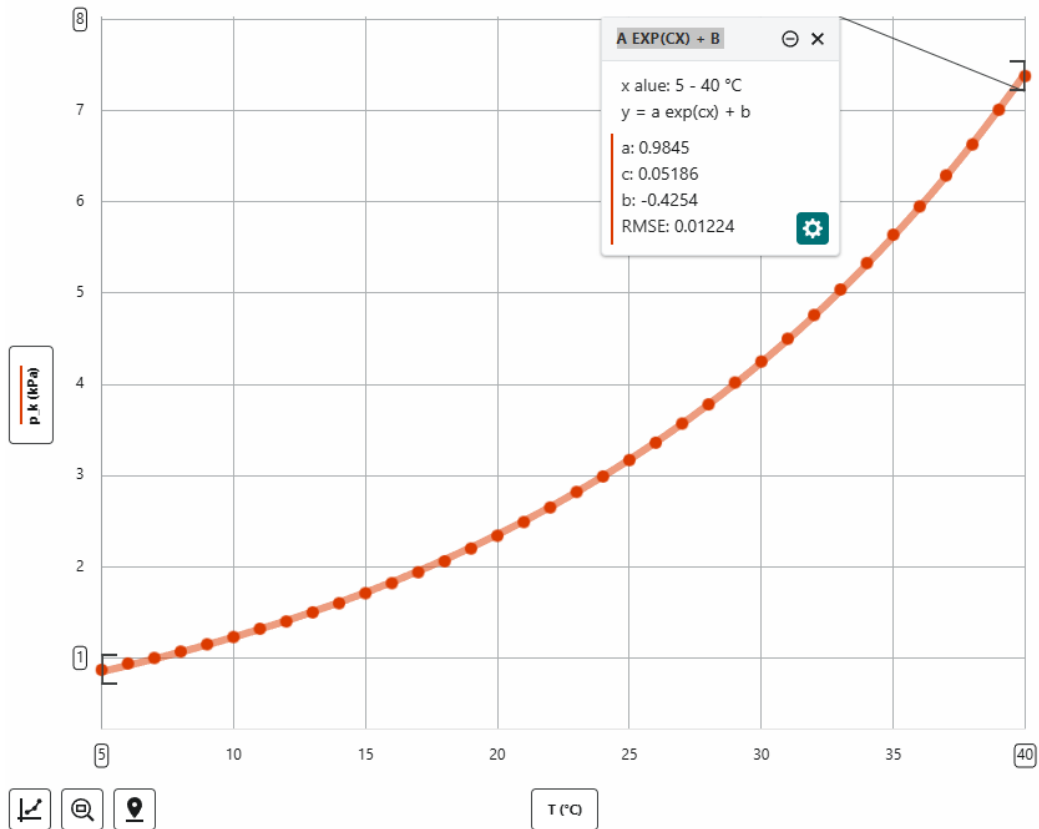
Ratkaisu:

9.1

$$\phi = 75\%$$

$$T_1 = 25^{\circ}\text{C}$$

Piirretään kuvaaja annetusta datasta ja sovitetaan siihen eksponenttifunktio. Tietynlaisen sovitefunktion käyttäminen ei ole välttämätöntä. Kohdan voi ratkaista myös interpoloimalla kuvaajan avulla laskemisen sijaan.



1 p. (yht. 1 p.)

Sovitefunktioksi saadaan $p_k(T) = 0,9845 \text{ kPa} \cdot e^{0,05186 \text{ 1/}^\circ\text{C} \cdot T} - 0,4254 \text{ kPa}$.

Taulukosta voidaan lukea, että lämpötilassa 25 °C kylläisen vesihöyryn paine on $p_k = 3,17 \text{ kPa}$. Suhteellisen kosteuden määritelmästä saadaan ratkaistua vesihöyryn paine ulkoilmassa:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{p_v}{p_k} \cdot 100 \% \\ p_v &= \frac{\phi}{100 \%} \cdot p_k \\ &= \frac{75 \%}{100 \%} \cdot 3,17 \text{ kPa} \\ &= 2,3775 \text{ kPa} \end{aligned}$$

Kastepisteessä suhteellinen kosteus on 100%, eli vesihöyryn paine on sama kuin kylläisen vesihöyryn paine. Ratkaistaan sovitefunktioista lämpötila tällä kylläisen höyryn paineen arvolla:

$$0,9845 \text{ kPa} \cdot e^{0,05186 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot T} - 0,4254 \text{ kPa} = 2,3775 \text{ kPa}$$

$$T = 20,175 \text{ } ^\circ\text{C} \quad \text{2 p. (yht. 3 p.)}$$

$$\approx 20 \text{ } ^\circ\text{C} \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Kastepisteeksi saadaan siis $T_k \approx 20 \text{ } ^\circ\text{C}$. Jos käyrän sovitus ei tehdä, vaan luetaan arvot interpoloimalla mittapisteen välistä, saadaan kastepisteeksi $T_k = 20,25 \text{ } ^\circ\text{C} \approx 20 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Vastaus: Ulkoilman kastepiste on noin $20 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Pisteytyksestä:

- Oikein piirretty kuvaaja 1 p
- Näytetty, miten kuvaajan avulla saatu kastepiste selvitettyä 2 p
- Oikea vastaus hyväksyttävällä pyöristystarkkuudella 1 p
- Vastaus hyväksytään myös $0,1 \text{ } ^\circ\text{C}$ tarkkuudella annettuna.

9.2

$$M_v = 18,0 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

$$R = 8,314462618 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$V_1 = 1,0 \text{ m}^3$$

$$T_1 = 25 \text{ } ^\circ\text{C} = (273,15 + 25) \text{ K} = 298,15 \text{ K}$$

$$p_v = 2,3775 \text{ kPa} = 2,3775 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

Aineiston mukaan vesihöyryä voidaan kuvata ideaalikaasumallilla, joten se nou-

dattaa ideaalikaasun tilanyhtälöä.

$$\begin{aligned}
 p_v V_1 &= n R T_1 \quad \boxed{1 \text{ p. (yht. 1 p.)}} \quad || \quad n = \frac{m_v}{M_v} \\
 p_v V_1 &= \frac{m_v}{M_v} R T_1 \quad \boxed{1 \text{ p. (yht. 2 p.)}} \\
 m_v &= \frac{p_v M_v V_1}{R T_1} \quad \boxed{1 \text{ p. (yht. 3 p.)}} \\
 &= \frac{2,3775 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot 18,0 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \cdot 1,0 \text{ m}^3}{8,314462618 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 298,15 \text{ K}} \\
 &= 17,263 \dots \text{ g} \\
 &\approx 17 \text{ g} \quad \boxed{1 \text{ p. (yht. 4 p.)}}
 \end{aligned}$$

Vastaus: Kuutiometrissä ulkoilmaa on vesihöyryä 17 g.

Pisteytyksestä:

- Ideaalikaasun tilanyhtälö 1 p
- Sijoitettu ainemäärän lauseke yhtälöön oikein 1 p
- Lopullinen massan lauseke tunnettujen suureiden avulla 1 p
- Oikea vastaus hyväksyttävällä pyöristystarkkuudella 1 p
- YTL:n hyvän vastauksen piirteiden (luettu 22.9.2026) mukaan tehtävänannon ilmaisu "kuutiometrissä" pitäisi tulkita niin, että se ei ole mittaustulos vaan se on osa käytettäviä yksiköitä, eikä vaikuta pyöristykseen. Tällöin oikea pyöristystarkkuus olisi 17,3 g. Olemme sitä mieltä, että myös 17 g pitäisi hyväksyä tulkinnanvaraisuuden vuoksi.

9.3

$$M_v = 18,0 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

$$R = 8,314462618 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$T_1 = 25^\circ\text{C} = (273,15 + 25) \text{ K} = 298,15 \text{ K}$$

$$T_2 = 11^\circ\text{C} = (11 + 273,15) \text{ K} = 284,15 \text{ K}$$

$$V_1 = 1,0 \text{ m}^3$$

$$p_0 = 101,325 \text{ kPa} = 101,325 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$p_v = 2,3775 \text{ kPa} = 2,3775 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$p_{k2} = 1,32 \text{ kPa} = 1,32 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

Ilma jäähtyy kastepisteensä alapuolelle, joten vesihöyryä tiivistyy ja jäljelle jäävä vesihöyry on kylläistä lämpötilassa T_2 . Samalla tarkasteltavan ilmamäärän tilavuus pienenee arvoon V_2 .

Tilavuus V_2 ratkaistaan kuivan ilman avulla, sillä vesihöyryn ainemäärä muuttuu jäähdytyksessä, kun taas kuivan ilman ainemäärä säilyy. 1 p. (yht. 1 p.) Ideaalikaasun tilanyhtälöstä:

$$pV = nRT$$

$$n = \frac{pV}{RT} \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

Kuivan ilman paine on kokonaispaineen ja vesihöyryn paineen erotus, joten edellä johdettu ainemäärän lauseke kuivalle ilmalle ennen jäähdytystä ja sen jälkeen antaa

$$\frac{(p_0 - p_v)V_1}{RT_1} = \frac{(p_0 - p_{k2})V_2}{RT_2} \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

$$V_2 = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{p_0 - p_v}{p_0 - p_{k2}} \cdot V_1 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Jäljelle jäävän vesihöyryn massa m_{v2} saadaan tilavuudessa V_2 tilanyhtälöstä sa-

malla tavalla kuin kohdassa 9.2. Tiivistyvä vesimäärä on massojen erotus.

$$\Delta m = m_v - m_{v2}$$

$$\Delta m = \frac{p_v M_v V_1}{RT_1} - \frac{p_{k2} M_v V_2}{RT_2}$$

$$\Delta m = \frac{p_v M_v V_1}{RT_1} - \frac{p_{k2} M_v \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{p_0 - p_v}{p_0 - p_{k2}} \cdot V_1}{RT_2} \quad (2 \text{ p. (yht. 6 p.)})$$

$$\Delta m = \frac{p_v M_v V_1}{RT_1} - \frac{p_{k2} M_v V_1}{RT_1} \cdot \frac{p_0 - p_v}{p_0 - p_{k2}}$$

$$\Delta m = \frac{M_v V_1}{RT_1} \left(p_v - \frac{p_0 - p_v}{p_0 - p_{k2}} \cdot p_{k2} \right)$$

$$= \frac{18,0 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \cdot 1,0 \text{ m}^3}{8,314462618 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 298,15 \text{ K}} \left(2,3775 - \frac{101,325 - 2,3775}{101,325 - 1,32} \cdot 1,32 \right) \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$= 7,7799 \dots \text{ g} \quad (1 \text{ p. (yht. 7 p.)})$$

$$\approx 7,8 \text{ g} \quad (1 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

Vastaus: Kuutiometristä ulkoilmaa tiivistyy vettä 7,8 g.

Pistetyksestä:

- Perustelu tilavuuden muutoksen laskemiselle kuivan ilman avulla 1 p
- Kuivan ilman vakiona pysyvän ainemäärän lauseke 1 p
- Muodostettu yhtälö, josta voi ratkaista uuden tilavuuden tunnettujen suureiden avulla 1 p
- Ratkaistu uusi tilavuus tunnettujen suureiden avulla 1 p
- Muodostettu tiivistyvän massan lauseke tunnettujen suureiden avulla 2 p
- Oikea vastaus 1 p
- Oikea vastaus hyväksyttävällä pyöristystarkkuudella 1 p

9.4

$$M_v = 18,0 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

$$R = 8,314462618 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$V_3 = 0,90 \text{ m}^3$$

$$t = 1,0 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$h = 2480 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 2,48 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$p_0 = 101,325 \text{ kPa} = 101,325 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$p_v = 2,3775 \text{ kPa} = 2,3775 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$p_{k2} = 1,32 \text{ kPa} = 1,32 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

Nyt tiivistyvän veden massa on

$$\begin{aligned} \Delta m_2 &= \frac{M_v V_3}{RT_1} \left(p_v - \frac{p_0 - p_v}{p_0 - p_{k2}} \cdot p_{k2} \right) \\ &= \frac{18,0 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \cdot 0,9 \text{ m}^3}{8,314462618 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 298,15 \text{ K}} \left(2,3775 - \frac{101,325 - 2,3775}{101,325 - 1,32} \cdot 1,32 \right) \cdot 10^3 \text{ Pa} \\ &= 7,0019 \dots \text{ g} \\ &= 7,0019 \dots \cdot 10^{-3} \text{ kg} \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)}) \end{aligned}$$

Vesihöyryn tiivistyessä siitä vapautuu lämpömäärä $Q = h\Delta m_2$. Näin ollen ilmastointilaitteeseen siirtyy energiaa teholla

$$\begin{aligned} P &= \frac{Q}{t} \\ &= \frac{h\Delta m_2}{t} \quad (1 \text{ p. (yht. 2 p.)}) \\ &= \frac{2,48 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \cdot 7,0019 \dots \cdot 10^{-3} \text{ kg}}{60 \text{ s}} \\ &= 289,415 \dots \text{ W} \quad (1 \text{ p. (yht. 3 p.)}) \\ &\approx 290 \text{ W} \quad (1 \text{ p. (yht. 4 p.)}) \end{aligned}$$

Vastaus: Vesihöyryn tiivistymisen takia ilmastointilaitteeseen siirtyy energiaa teholla 290 W.

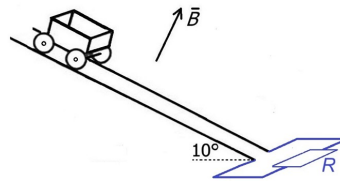
Pisteytyksestä:

- Oikein laskettu tiivistyvä massa 1 p
- Tehon lauseke tunnettujen suureiden avulla 1 p
- Oikea vastaus 1 p
- Oikea vastaus hyväksyttävällä pyöristystarkkuudella 1 p

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

10. Induktiojarru (20 p.)

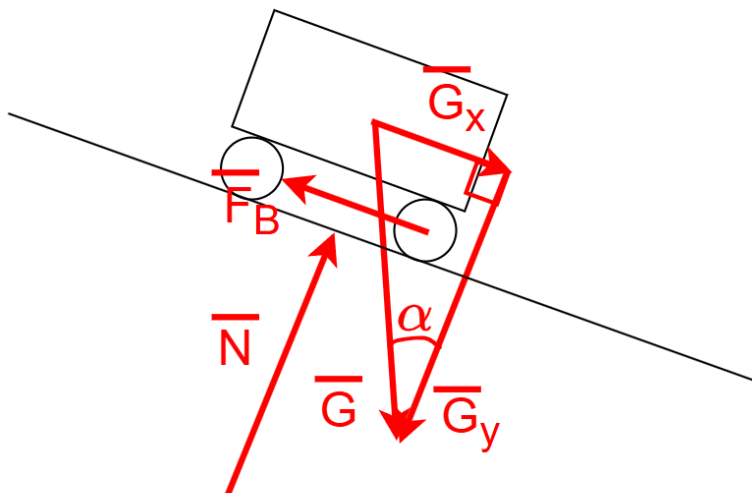
Herkkäliikkeinen vaunu asetetaan magneettikentässä oleville pitkille kalteville kiskoille oheisen kuvan mukaisesti. Kiskot johtavat hyvin sähköä, ja kiskojen alapää on yhdistetty vastuksella. Magneettikenttä on homogeeninen ja kiskojen kautta kulkevaa tasoa vastaan kohtisuorassa. Magneettivuon tiheys on $0,35 \text{ T}$. Kiskojen kaltevuuskulma on 10° ja kiskojen välinen etäisyys 320 mm . Vaunun massa on 520 g . Vaunun etupyörät ja etuakseli ovat hyvin sähköä johtavaa materiaalia. Vaunun muut osat eivät johda sähköä.



- 10.1 Vaunu päästetään liikkeelle levosta. Kuvaile ja perustele sanallisesti, miten vaunun kiihtyvyys ja nopeus muuttuvat ajan mittaan. Miksi vaunu saavuttaa vakionopeuden? (8 p.)
- 10.2 Halutaan, että vaunu saavuttaa vakionopeuden $2,5 \text{ m/s}$. Kuinka suuri vastuksen resistanssin on oltava? (8 p.)
- 10.3 Vaunu etenee osatehtävän 10.2 mukaisesti vakionopeudella $2,5 \text{ m/s}$. Kuinka pitkän ajan kuluessa vastuksessa kuluu $1,0 \text{ J}$ energiaa? (4 p.)

Ratkaisu:

10.1. Piirretään voimakuvio:



Kiskoille asetetun vaunun etupyörät ja etuakseli muodostavat yhdessä kiskojen ja vastuksen kanssa suljetun virtapiirin.

Kun vaunu päästetään liikkeelle levosta, sen nopeus on aluksi nolla, jolloin etuakselin yli ei indusoidu jännitettä eikä piirissä kulje virtaa. Tällöin vaunuun ei vaikuta lainkaan magneettista jarruttavaa voimaa, joten ainoa kiskojen suunnassa vaikuttava voima on painovoiman komponentti

$$G_x = mg \sin \alpha,$$

jossa α on kiskojen kaltevuus vaakatasoon nähden. Vaunun kiihtyvyys on tällöin suurimmillaan, ja se on $a = g \sin \alpha$. 2 p. (yht. 2 p.)

Kun vaunu lähtee liikkumaan, sen etuakseli (joka on hyvin sähköä johtavaa materiaalia) liikkuu kohtisuorassa olevassa magneettikentässä ja toimii siten kuin liikkuva johdin. Etuakselin yli indusoituu Faradayn induktiolain mukaan jännite

2 p. (yht. 4 p.)

$$e = lvB,$$

jossa l on etuakselin pituus, v etuakselin nopeus sen kulkiessa kiskoa pitkin (tämä nopeus on kohtisuorassa magneettivuon tiheyttä vastaan) ja B magneettivuon tiheys.

Jännite saa piirissä (etuakseli, kiskot ja vastus) Ohmin lain mukaan aikaan virran

$$I = \frac{e}{R}$$

jossa R on piirin resistanssi. Muiden piirin osien resistanssin voidaan olettaa olevan merkityksettömän pieni verrattuna vastuksen resistanssiin, joten käytännössä R on vastuksen resistanssi.

Magneettikenttä kohdistaa etuakseliin voiman

$$F_B = IlB = \frac{elB}{R},$$

joka Lenzin lain mukaan vastustaa vaunun liikettä.

2 p. (yht. 6 p.)

Jännite on suoraan verrannollinen vaunun nopeuteen, joten mitä suurempi vaunun nopeus v on, sitä suurempia ovat indusoitunut jännite, virta ja jarruttava voima F_B . Kiskojen suuntainen kokonaisvoima $mg \sin \alpha - F_{\text{jarru}}$ pienenee

siis nopeuden kasvaessa, joten myös vaunun kiihtyvyys pienenee ajan myötä kohti nollaa. Nopeus siis edelleen kasvaa, mutta yhä hitaammin. Kun jarruttava voima on kasvanut yhtä suureksi kuin painovoiman komponentti $mg \sin \alpha$, kokonaisvoima ja siten kiihtyvyys on nolla, eikä nopeus enää muutu: vaunu on saavuttanut vakionopeuden. 2 p. (yht. 8 p.)

Pisteytyksestä:

- Vaunuun ei aluksi indusoidu jännitettä/virtaa ja se alkaa kiihtyä alamäkeen painovoiman vaikutuksesta 2 p.
- Vaunun liikkuesssa sen etuakseliin indusoituu Faradayn induktiolain nojalla jännite ja siten siinä alkaa kulkea virta 2 p.
- Virran vuoksi etuakseliin kohdistuu magneettikentässä magneettinen voima, joka Lenzin lain nojalla on suunnaltaan vaunun liikkeelle vastakkainen 2 p.
- Tarpeeksi suurella nopeudella voimien summa on nolla ja vaunu liikkuu vakionopeudella 2 p.

10.2. Etuakselin yli indusoituu Faradayn induktiolain mukaan jännite

$$e = lvB. \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)}$$

Magneettikenttä kohdistaa siten etuakseliin voiman

$$F_B = IlB = \frac{elB}{R}. \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)}$$

Vakionopeudessa vaunun kiihtyvyys on nolla, joten Newtonin toisen lain mukaan kiskojen suunnassa on

$$\Sigma F = ma$$

$$mg \sin \alpha - F_B = 0. \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)}$$

Ratkaistaan yllä olevasta yhtälöstä muuttuja R CAS-ohjelmalla.

$$R = \frac{B^2 l^2 v}{mg \sin \alpha} \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

Yhtälön ratkaisu ilman CAS-ohjelmaa:

$$mg \sin \alpha - F_B = 0$$

$$mg \sin \alpha - \frac{elB}{R} = 0$$

$$mg \sin \alpha = \frac{elB}{R} \quad \| \cdot R$$

$$Rmg \sin \alpha = elB \quad \| : mg \sin \alpha$$

$$R = \frac{elB}{mg \sin \alpha} \quad \| e = lvB$$

$$R = \frac{lvB \cdot lB}{mg \sin \alpha}$$

$$R = \frac{B^2 l^2 v}{mg \sin \alpha}$$

Sijoitetaan lukuarvot:

$$B = 0,35 \text{ T}$$

$$L = 320 \text{ mm} = 0,320 \text{ m}$$

$$v = 2,5 \text{ m/s}$$

$$m = 0,52 \text{ kg}$$

$$\alpha = 10^\circ$$

$$R = \frac{(0,35 \text{ T})^2 \cdot (0,320 \text{ m})^2 \cdot 2,5 \text{ m/s}}{0,52 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 10^\circ}$$

$$R = 0,0354 \dots \Omega$$

$$R \approx 0,035 \Omega$$

1 p. (yht. 8 p.)

Vastaus: $0,035 \Omega$

Vastauksen voi ilmoittaa myös muodossa $35 \text{ m}\Omega$.

Pisteytyksestä:

- Induktiojännitteen kaava 2 p.
- Akseliin kohdistuvan magneettisen voiman lauseke 2 p.
- Vaunun liikeyhtälö kiskojen suunnassa 2 p.
- Ratkaistu resistanssin lauseke 1 p.
- Oikea vastaus hyväksyttävällä pyöristystarkkuudella 1 p.

10.3.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Vakionopeudessa vaunun liike-energia ei muutu ajan myötä, joten painovoiman rinnettä pitkin vaikuttavan komponentin tekemä työ muuttuu kokonaisuudessaan vastuksessa häviäväksi sähköenergiaksi.

Lasketaan, millä teholla vastus kuluttaa energiaa.

$$P = mg \sin \alpha \cdot v \quad \left(\begin{array}{c} 2 \text{ p. (yht. 2 p.)} \end{array} \right) \quad \parallel m = 0,520 \text{ kg}, \alpha = 10^\circ, v = 2,5 \text{ m/s}$$

$$P = 0,520 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 10^\circ \cdot 2,5 \text{ m/s}$$

$$P = 2,21453 \dots \text{ W}$$

Ratkaistaan, missä ajassa energiaa kuluu 1,0 J.

$$E = Pt \quad \parallel : P$$

$$t = \frac{E}{P} \quad \left(\begin{array}{c} 1 \text{ p. (yht. 3 p.)} \end{array} \right) \quad \parallel E = 1,0 \text{ J}; P = 2,21453 \dots \text{ W}$$

$$t = \frac{1,0 \text{ J}}{2,21453 \dots \text{ W}}$$

$$t = 0,4515 \dots \text{ s}$$

$$t \approx 0,45 \text{ s} \quad \left(\begin{array}{c} 1 \text{ p. (yht. 4 p.)} \end{array} \right)$$

Vastaus: 0,45 s

Pisteytyksestä:

- Tehon lauseke 2 p.
- Kuluneen ajan lauseke 1 p.
- Oikea vastaus hyväksyttävällä pyöristystarkkuudella 1 p.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Aiemmin saatiin etuakseliin indusoituvan jännitteen ja akselin resistanssin lausekkeet:

$$e = lvB$$

$$R = \frac{B^2 l^2 v}{mg \sin \alpha}$$

Etuakselissa kulkeva virta saadaan Ohmin lailla:

$$\begin{aligned} I &= \frac{e}{R} \\ &= \frac{lvB \cdot mg \sin \alpha}{B^2 l^2 v} \\ &= \frac{mg \sin \alpha}{Bl} \end{aligned}$$

Teho saadaan Joulen lailla:

$$\begin{aligned} P &= eI \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)} \\ &= lvB \cdot \frac{mg \sin \alpha}{Bl} \\ &= mg \sin \alpha \cdot v \end{aligned}$$

Kulunut aika on kulutettu energia jaettuna teholla:

$$t = \frac{E}{P} \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

$$t = \frac{E}{mg \sin \alpha \cdot v}$$

$$t = \frac{1,0 \text{ J}}{0,520 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 10^\circ \cdot 2,5 \text{ m/s}}$$

$$t = 0,4515 \dots \text{ s}$$

$$t \approx 0,45 \text{ s} \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Vastaus: 0,45 s

Pisteytyksestä:

- Tehon lauseke 2 p.
- Kuluneen ajan lauseke 1 p.
- Oikea vastaus hyväksyttävällä pyöristystarkkuudella 1 p.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.

11. Leija (20 p.)

Aineisto:

11. A [Kuva: Leija ja tuoli](#)11. B [Kuva: Tuolin pohjakuva voimakuviota varten](#)

Leija on kiinnitetty ohuella langalla terassilla olevaan tuoliin, kuten kuva [11.A](#) esittää. Tuulen vaikutuksesta leija pysyy paikallaan ilmassa ja aiheuttaa huomattavan jännitysvoiman lankaan. Tehtävässä oletetaan, että tuuli ei vaikuta tuoliin ja että langan ja pystysuoran suunnan välinen kulma on 27° kaikissa tilanteissa. Tuolin massa on 4,6 kg.

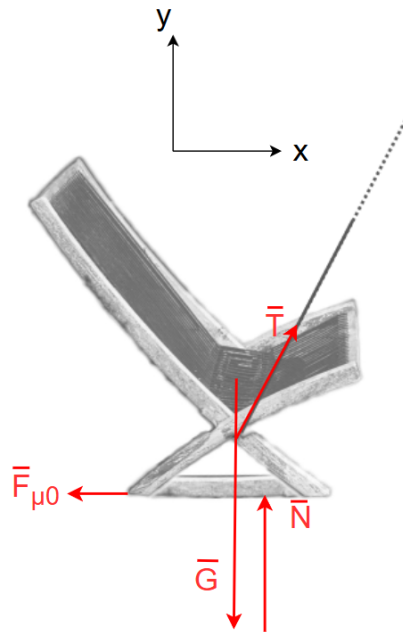
- 11.1 Piirrä paikallaan olevan tuolin voimakuvio. Käytä kuvaa [11.B](#) ratkaisun osana. Ole tarkka voimien vaikutuspisteiden ja voimanuolien pituuksien kanssa. (4 p.)
- 11.2 Kuinka suuri langan jännitysvoiman täytyy vähintään olla, jotta tuoli alkaa liukua terassilla? Tuolin ja terassin välinen lepokitkakerroin on 0,37. (7 p.)
- 11.3 Fyysikko toteaa tuulen voimistuvan ja istuutuu tuolille pitääkseen sen paikallaan. Kuinka suuren tuulen nopeuden lanka kestää? (9 p.)

Hyödynnä vastauksessa seuraavia tietoja:

- Langan jännitysvoima aiheutuu leijaan kohdistuvasta tuulesta. Leija muuttaa siihen osuvan tuulen ilmavirtauksen suuntaa, jolloin virtauksen suunnan muutos aiheuttaa leijaan voiman. Tällöin lankaan syntyy jännitysvoima.
- Leijan poikkipinta-ala tuulen suunnassa on $0,19 \text{ m}^2$. Tuulen ilmavirtaus osuu leijaan ja jatkaa samalla vauhdilla sen pintaa pitkin. Ilmavirtauksen suunnan muutos on 23° . Ilman tiheys on $1,3 \text{ kg/m}^3$.
- Langan murtolujuus eli suurin jännitysvoima poikkipinta-alayksikköä kohhti, jonka lanka kestää katkeamatta, on 470 N/mm^2 . Langan halkaisija on 0,35 mm.

Ratkaisu:

11.1



3 p. (yht. 3 p.)

Voimakuviossa $\bar{G}$ on tuolin paino, $\bar{N}$ on tukivoima, $\bar{T}$ on langan jännitysvoima ja $\bar{F}_{\mu 0}$ on lepokitkavoima. 1 p. (yht. 4 p.)

Pisteytyksestä:

- Voimakuviossa oikeat voimavektorit oikeisiin kohtiin piirrettyinä 2 p.
- Voimavektoreiden pituudet toisiinsa nähden järkevät (silmämääräisesti voimien summa nolla x- ja y-suunnissa) 1 p.
- Voimat nimetty oikein 1 p.

11.2

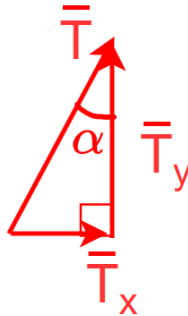
$$m = 4,6 \text{ kg}$$

$$\mu_0 = 0,37$$

$$\alpha = 27^\circ$$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Tarkastellaan jännitysvoiman $\vec{T}$ komponentteja voimakuvion mukaisessa koordinaatistossa:



Tilanteen geometriasta seuraa:

$$T_y = T \cos \alpha \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

$$T_x = T \sin \alpha \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

Rajatapauksessa lepokitkavoima on täysin kehittynyt eli $F_{\mu 0} = \mu_0 N$. 1 p. (yht. 3 p.)
 Tuoli on levossa, joten Newtonin toisen lain nojalla voimien summa on nolla sekä vaaka- että pystysuunnassa:

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$$

$$\vec{T}_x + \vec{F}_{\mu 0} = \vec{0}$$

$$T_x - F_{\mu 0} = 0$$

$$T \sin \alpha - \mu_0 N = 0 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} \quad (1)$$

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0}$$

$$\vec{N} + \vec{T}_y + \vec{G} = \vec{0}$$

$$N + T_y - G = 0$$

$$N + T \cos \alpha - mg = 0 \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)} \quad (2)$$

Ratkaistaan yhtälöistä (1) ja (2) jännitysvoima T käsin tai CAS-laskimella:

Ratkaisu käsin: ratkaistaan tukivoima y-suuntaisesta liikeyhtälöstä ja sijoitetaan se x-suuntaiseen liikeyhtälöön:

$$N = mg - T \cos \alpha$$

$$T \sin \alpha = \mu_0 (mg - T \cos \alpha)$$

$$T \sin \alpha + \mu_0 T \cos \alpha = \mu_0 mg$$

$$T(\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha) = \mu_0 mg$$

$$T = \frac{\mu_0 mg}{\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha} \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

$$= \frac{0,37 \cdot 4,6 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\sin 27^\circ + 0,37 \cdot \cos 27^\circ}$$

$$= 21,30 \dots \text{ N}$$

$$\approx 21 \text{ N} \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

Vastaus: Tuoli alkaa liukua, kun langan jännitysvoima on vähintään 21 N.

Pisteytyksestä:

- Jännitysvoiman oikeanlainen komponentteihin jako 2 p.
- Täysin kehittyneen lepokitkavoiman kaava 1 p.
- Lopullinen x-suuntainen liikeyhtälö 1 p.
- Lopullinen y-suuntainen liikeyhtälö 1 p.
- Ratkaistu jännitysvoiman lauseke 1 p.
- Oikea vastaus hyväksyttävällä pyöristystarkkuudella 1 p.

11.3

$$A = 0,19 \text{ m}^2$$

$$\beta = 23^\circ$$

$$\rho = 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

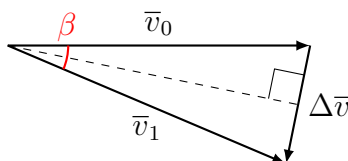
$$\sigma = 470 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$d = 0,35 \text{ mm}$$

Suurin jännitysvoima, jonka lanka kestää, on murtolujuuden ja langan poikkipinta-alan tulo:

$$T_{\max} = \sigma \cdot \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)}$$

Olkoon ilman vauhti v . Kohdattuaan leijan ilmavirtaus jatkaa samalla vauhdilla v ja sen suunta kääntyy kulman β verran. Olkoon ilmavirtauksen alkunopeus $\bar{v}_0$ ja ilmavirtauksen nopeus käännöksen jälkeen $\bar{v}_1$, jolloin pätee $|\bar{v}_0| = |\bar{v}_1| = v$ sekä $\bar{v}_0 + \Delta\bar{v} = \bar{v}_1$. Tarkastellaan ilman nopeuden muutosta $\Delta\bar{v}$ vektorikolmion avulla:



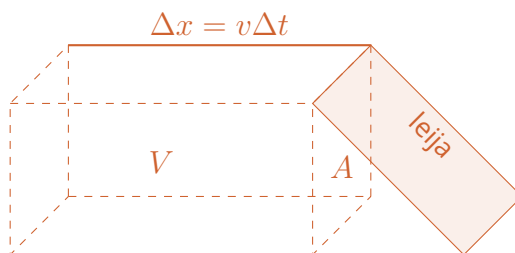
Vektorikolmio on tasakylkinen, joten:

$$\frac{\Delta v}{2} = v \sin \frac{\beta}{2}$$

$$\Delta v = 2v \sin \frac{\beta}{2} \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Ilma etenee ajassa Δt matkan $\Delta x = v\Delta t$. Ilmaa osuu siten leijaan tässä ajassa tilavuus $V = A\Delta x = Av\Delta t$. Ajassa Δt leijaan osuvan ilman massa on siten $m_{\text{ilma}} = \rho Av\Delta t$. 2 p. (yht. 5 p.)

Mallikuva leijaan osuvasta ilmapatsaasta (ei tarvita täysien pisteiden arvoiseen vastaukseen):



Ilman liikemäärän muutoksen suuruus $\Delta p = m_{\text{ilma}} \Delta v$ on impulssiperiaatteen nojalla ilmaan kohdistuva voima F kertaa voiman vaikutusaika Δt , 1 p. (yht. 6 p.)
jolloin:

$$F \Delta t = m_{\text{ilma}} \Delta v$$

$$F = \frac{m_{\text{ilma}} \Delta v}{\Delta t}$$

$$= \frac{\rho A v \Delta t 2v \sin \frac{\beta}{2}}{\Delta t}$$

$$F = 2\rho A v^2 \sin \frac{\beta}{2}$$

Newtonin kolmannen lain mukaan leijaan kohdistuu yhtä suuri vastakkaissuuntainen voima, ja koska leija on rajatapauksessa levossa, siihen kohdistuvan langan jännitysvoiman on Newtonin toisen lain nojalla oltava yhtä suuri:

$$T = F$$
 1 p. (yht. 7 p.)

$$T = 2\rho A v^2 \sin \frac{\beta}{2}$$

Lanka katkeaa, kun jännitysvoima saavuttaa arvon T_{max} . Ratkaistaan tätä vastaava tuulen nopeus v **käsin tai CAS-laskimella**:

$$2\rho A v^2 \sin \frac{\beta}{2} = \sigma \cdot \frac{\pi d^2}{4} \quad \parallel \cdot \frac{1}{2\rho A \sin \frac{\beta}{2}}$$

$$v^2 = \frac{\sigma \pi d^2}{8\rho A \sin \frac{\beta}{2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{\sigma \pi d^2}{8\rho A \sin \frac{\beta}{2}}} \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

$$= \sqrt{\frac{470 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \pi \cdot (0,35 \text{ mm})^2}{8 \cdot 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,19 \text{ m}^2 \cdot \sin \frac{23^\circ}{2}}}$$

$$= 21,42 \dots \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\approx 21 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

Vastaus: Lanka kestää enintään tuulen nopeuden $21 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Pisteytyksestä:

- Suurimman mahdollisen jännitysvoiman lauseke 2 p.
- Ilman vauhdin muutoksen lauseke 1 p.
- Ilman massan lauseke 2 p.
- Impulssiperiaate 1 p.
- Ilman leijaan aiheuttaman voiman ja langan jännitysvoiman yhtäsuuruus 1 p.
- Tuulen nopeuden ratkaistu lauseke 1 p.
- Oikea vastaus hyväksyttävällä pyöristystarkkuudella 1 p.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita.