

Pitkän matematiikan Malliratkaisut

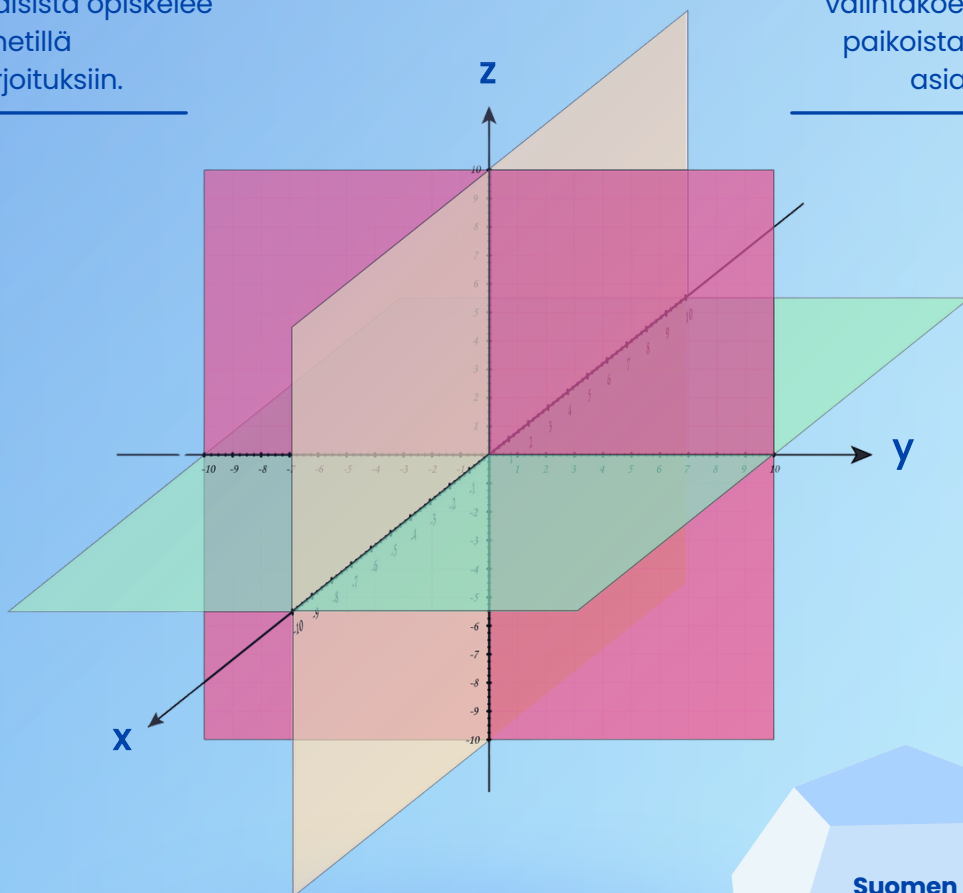
Kevät 2026

60 % pk-seudun

lukiolaisista opiskelee
Mafynetillä
yo-kirjoituksiin.

77 % lääketieteen

valintakoeväylän
paikoista Mafyn
asiakkaille.



Suomen
kattavimmat
malliratkaisut



Mallivastaukset laatii Mafyn oppimateriaalitiimi

Tiimi kehittää lukion
oppimateriaaleja.

Mallivastausten
tekemiseen
osallistuivat:

Jaakko Alasuvanto
Sakke Suomalainen
Lassi Vienonen
Matti Virolainen



Käyttöehdot

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafy.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on **kielletty**.

Lukion opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukion kurseillasi.

Nämä mallivastaukset ovat Mafy Oy:n omaisuutta.

Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	6
Ratkaisu tehtävään 3	9
Ratkaisu tehtävään 4	10
Ratkaisu tehtävään 5	12
Ratkaisu tehtävään 6	14
Ratkaisu tehtävään 7	16
Ratkaisu tehtävään 8	20
Ratkaisu tehtävään 9	25
Ratkaisu tehtävään 10	30
Ratkaisu tehtävään 11	37
Ratkaisu tehtävään 12	40
Ratkaisu tehtävään 13	44

Malliratkaisut päivitetty 19. maaliskuuta 2026 klo 11:35.

1. Puuttuvat luvut (12 p.)

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Jokaisen osatehtävän vastaus on kokonaisluku.

Täydennä puuttuvat luvut osatehtävissä 1.1–1.6 niin, että väitteet ovat tosia. Puuttuvat luvut on merkitty neliösymbolilla ($\square$).

1.1 $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{\square}{60}$ (2 p.)

Puuttuva luku:

1.2 Lukujen -5 , 4 , 13 ja $\square$ keskiarvo on 5 . (2 p.)

Puuttuva luku:

1.3 $(2x + 3)^2 = 4x^2 + \square x + 9$ (2 p.)

Puuttuva luku:

1.4 Yhtälön $7x + \square = 19 - 2x$ ratkaisu on $x = 2$. (2 p.)

Puuttuva luku:

1.5 Luvut $x = 3$ ja y toteuttavat yhtälöparin (2 p.)

$$\begin{cases} 2x + y = \square \\ x - 2y = 9. \end{cases}$$

Puuttuva luku:

1.6 Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 20 ja 21 , joten hypotenuusan pituus on $\square$. (2 p.)

Puuttuva luku:

Vastaukset:1.1 21 2 p. (yht. 2 p.)1.2 8 2 p. (yht. 2 p.)1.3 12 2 p. (yht. 2 p.)1.4 1 2 p. (yht. 2 p.)1.5 3 2 p. (yht. 2 p.)1.6 29 2 p. (yht. 2 p.)

Näin vastaukset saadaan:

1.1 Lavennetaan murtoluvut kuudeskymmenesosiksi, ja sitten yhdistetään osoittajat.

$$\begin{aligned} {}^{15})\frac{3}{4} - {}^{12})\frac{2}{5} &= \frac{45}{60} - \frac{24}{60} \\ &= \frac{21}{60} \end{aligned}$$

Puuttuva luku on siis 21.

1.2 Merkitään puuttuvaa lukua kirjaimella x . Muodostetaan yhtälö sen tiedon perusteella, että lukujen keskiarvo on 5.

$$\begin{aligned} \frac{-5 + 4 + 13 + x}{4} &= 5 \\ \frac{12 + x}{4} &= 5 && \parallel \cdot 4 \\ 12 + x &= 20 \\ x &= 20 - 12 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Puuttuva luku on siis 8.

1.3 Sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned}(2x + 3)^2 &= (2x + 3)(2x + 3) \\&= 2x \cdot 2x + 2x \cdot 3 + 3 \cdot 2x + 3 \cdot 3 \\&= 4x^2 + 6x + 6x + 9 \\&= 4x^2 + 12x + 9\end{aligned}$$

Puuttuva kerroin on siis 12.

1.4 Merkitään puuttuvaa lukua kirjaimella a . Sijoitetaan yhtälöön $x = 2$.

$$\begin{aligned}7x + a &= 19 - 2x & \| x = 2 \\7 \cdot 2 + a &= 19 - 2 \cdot 2 \\14 + a &= 19 - 4 \\14 + a &= 15 \\a &= 15 - 14 \\a &= 1\end{aligned}$$

Puuttuva luku on siis 1.

1.5 Sijoitetaan $x = 3$ yhtälöparin alempaan yhtälöön:

$$\begin{aligned}x - 2y &= 9 & \| x = 3 \\3 - 2y &= 9 \\-2y &= 9 - 3 \\-2y &= 6 & \| : (-2) \\y &= -3\end{aligned}$$

Siis lukupari $x = 3, y = -3$ on yhtälöparin ratkaisu. Siten voidaan sijoittaa myös ylempään yhtälöön nämä luvut. Merkitään puuttuvaa lukua kirjaimella a .

$$\begin{aligned}2x + y &= a & \| x = 3, y = -3 \\2 \cdot 3 - 3 &= a \\6 - 3 &= a \\3 &= a \\a &= 3\end{aligned}$$

Puuttuva luku on siis 3.

1.6 Ratkaistaan hypotenuusan pituus x Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 20^2 + 21^2$$

$$x^2 = 841$$

$$x = \pm\sqrt{841}$$

$$x = \pm 29$$

Pituus ei voi olla negatiivinen, joten hypotenuusan pituus on 29.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita!

2. Derivaattoja ja yhdistelyä (12 p.)

Määritä funktioiden derivaatat ja tutki niiden ominaisuuksia. Valitse kullekin funktiolle kummastakin listasta paras vaihtoehto.

Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvioitavaksi, poista vastauksesi valitsemalla pudotusvalikosta tyhjä rivi.

2.1 $f(x) = -6x^2 + 12x + 5$ (4 p.)

2.1.1 Valitse funktiolle listasta paras vaihtoehto. (2 p.)

Vaihtoehdot: "Derivaatan nollakohdat ovat $x = -2$ ja $x = 2$." / "Derivaatan kuvaaja leikkaa y -akselin pisteessä $(0, 12)$." / "Derivaatan nollakohdat ovat $x = -\frac{2}{3}$ ja $x = \frac{2}{3}$." / "Derivaatan kuvaaja leikkaa x -akselin pisteessä $(4, 0)$." / "Derivaatan arvo kohdassa $x = 1$ on 2." / "Ei mikään yllä olevista."

2.1.2 Valitse funktiolle listasta paras vaihtoehto. (2 p.)

Vaihtoehdot: "Derivaatan kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on -6 ." / "Derivaatan kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on -1 ." / "Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli." / "Derivaatan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli." / "Derivaatta on kolmannen asteen polynomi." / "Ei mikään yllä olevista."

2.2 $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$ (4 p.)

2.2.1 Valitse funktiolle listasta paras vaihtoehto. (2 p.)

Samat vaihtoehdot kuin kohdassa 2.1.1.

2.2.2 Valitse funktiolle listasta paras vaihtoehto. (2 p.)

Samat vaihtoehdot kuin kohdassa 2.1.2.

2.3 $h(x) = 3x^3 - 4x + 3$ (4 p.)

2.3.1 Valitse funktiolle listasta paras vaihtoehto. (2 p.)

Samat vaihtoehdot kuin kohdassa 2.1.1.

2.3.2 Valitse funktiolle listasta paras vaihtoehto.

(2 p.)

Samat vaihtoehdot kuin kohdassa 2.1.2.

Ratkaisu.

2.1 $f(x) = -6x^2 + 12x + 5$

Derivoidaan:

$$f'(x) = -12x + 12$$

2.1.1 Derivaatan nollakohta:

$$-12x + 12 = 0 \quad || -12$$

$$-12x = -12 \quad || : (-12)$$

$$x = 1$$

Derivaatan arvo kohdassa $x = 0$ on $f'(0) = -12 \cdot 0 + 12 = 12$, joten derivaatan kuvaaja leikkaa y -akselin pisteessä $(0, 12)$.

Vastaus: Derivaatan kuvaaja leikkaa y -akselin pisteessä $(0, 12)$. 2 p. (yht. 2 p.)

2.1.2 Derivaatta $f'(x) = -12x + 12$ on ensimmäisen asteen polynomi eli suora. Sen kulmakerroin on -12 .

Vastaus: Ei mikään yllä olevista. 2 p. (yht. 2 p.)

2.2 $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$

Derivoidaan:

$$g'(x) = -x + 4$$

2.2.1 Derivaatan nollakohta:

$$-x + 4 = 0$$

$$x = 4$$

Derivaatan kuvaaja leikkaa x -akselin pisteessä $(4, 0)$.

Vastaus: Derivaatan kuvaaja leikkaa x -akselin pisteessä $(4, 0)$. 2 p. (yht. 2 p.)

2.2.2 Derivaatta $g'(x) = -x + 4$ on suora, jonka kulmakerroin on -1 .

Vastaus: Derivaatan kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on -1 . 2 p. (yht. 2 p.)

2.3 $h(x) = 3x^3 - 4x + 3$

Derivoidaan:

$$h'(x) = 9x^2 - 4$$

2.3.1 Derivaatan nollakohdat:

$$9x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = \frac{4}{9}$$

$$x = \pm \frac{2}{3}$$

Vastaus: Derivaatan nollakohdat ovat $x = -\frac{2}{3}$ ja $x = \frac{2}{3}$. 2 p. (yht. 2 p.)

2.3.2 Derivaatta $h'(x) = 9x^2 - 4$ on toisen asteen polynomi, jonka toisen asteen termin kerroin $9 > 0$, joten sen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Vastaus: Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. 2 p. (yht. 2 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita!

3. Logaritmeja (12 p.)

1. Anna esimerkki positiivisista reaaliluvuista a , b ja c , jotka eivät toteuta yhtälöä

$$\ln(a + b + c) = \ln a + \ln b + \ln c.$$

(4 p.)

2. Anna esimerkki positiivisista reaaliluvuista a , b ja c , jotka toteuttavat yhtälön

$$\ln(a + b + c) = \ln a + \ln b + \ln c.$$

Likiarvot eivät riitä yhtäsuuruuden perustelemiseen. (8 p.)

Ratkaisu.

1. Valitaan $a = b = c = 3$. 1 p. (yht. 1 p.) Tällöin

$$\ln(a + b + c) = \ln(3 + 3 + 3) = \ln 9$$

ja

$$\ln a + \ln b + \ln c = \ln 3 + \ln 3 + \ln 3$$

$$= 3 \ln 3 \quad \parallel \log_a x^r = r \log_a x$$

$$= \ln(3^3)$$

$$= \ln 27, \quad \text{2 p. (yht. 3 p.)}$$

Luonnollinen logaritmi on aidosti kasvava ja $9 \neq 27$, joten tehtävänannon yhtälö ei päde. 1 p. (yht. 4 p.)

2. Valitaan $a = 1$, $b = 2$ ja $c = 3$. 2 p. (yht. 6 p.) Tällöin

$$\ln(a + b + c) = \ln(1 + 2 + 3) = \ln 6 \quad \text{3 p. (yht. 9 p.)}$$

ja

$$\ln a + \ln b + \ln c = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 \quad \parallel \log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$$

$$= \ln(1 \cdot 2 \cdot 3)$$

$$= \ln 6 \quad \text{3 p. (yht. 12 p.)}$$

$$= \ln(a + b + c).$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita!

4. Descartesin menetelmä (12 p.)

Aineisto:

4. A [Teksti: Descartesin menetelmä](#)

Ratkaise yhtälö $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ja osoita, että tekstissä [4.A](#) kuvattu Descartesin menetelmä antaa sen positiivisten ratkaisujen lukumäärän oikein.

Ratkaisu.Tehdään sijoitus $u = x^2$:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$u^2 - 5u + 4 = 0 \quad \text{3 p. (yht. 3 p.)}$$

Tämä on toisen asteen yhtälö muotoa

$$au^2 + bu + c = 0,$$

missä $a = 1$, $b = -5$ ja $c = 4$. Ratkaistaan yhtälö toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$\begin{aligned} u &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ u &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\ u &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \\ u &= \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \\ &= \frac{5 \pm 3}{2} \end{aligned}$$

joten

$$u = \frac{5+3}{2}$$

tai

$$u = \frac{5-3}{2}$$

$$u = 4$$

tai

$$u = 1 \quad \text{2 p. (yht. 5 p.)}$$

Ratkaistaan x kummastakin tapauksesta:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ tai } x = -2 \quad (2 \text{ p. (yht. 7 p.)})$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ tai } x = -1 \quad (2 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

Yhtälön ratkaisut ovat siis $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$ ja $x = 2$. Näistä positiivisia ovat $x = 1$ ja $x = 2$, joten positiivisia ratkaisuja on 2.

Sovelletaan Descartesin menetelmää. Polynomi $x^4 - 5x^2 + 4$ on kirjoitettu astelukujen vähenevässä järjestyksessä. Sen nolasta poikkeavat kertoimet ovat

$$1, \quad -5, \quad 4$$

ja niiden etumerkit ovat

$$+, \quad -, \quad +.$$

Termien x^3 ja x kertoimet ovat nollia, joten ne jätetään huomiotta Descartesin säännössä.

Peräkkäisten etumerkkien välillä on kaksi merkinvaihtoa: ensimmäisen ja toisen termin välissä (+ vaihtuu −:ksi) sekä toisen ja kolmannen termin välissä (− vaihtuu +:ksi). Descartesin säännön mukaan positiivisia ratkaisuja on siis 2. (2 p. (yht. 11 p.))

Tämä vastaa yhtälön ratkaisemalla saatua tulosta: positiiviset ratkaisut $x = 1$ ja $x = 2$, joita on 2 kappaletta. Descartesin menetelmä antaa siis positiivisten ratkaisujen lukumäärän oikein. (1 p. (yht. 12 p.))

Vastaus: Yhtälön ratkaisut ovat $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$ ja $x = 2$. Positiivisia ratkaisuja on 2, mikä vastaa Descartesin säännön antamaa merkinvaihtojen lukumäärää.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita!

5. Paraabeli (12 p.)

Aineisto:

5. A [Kuva: Paraabeli](#)

Paraabeli on tasokäyrä, jonka jokainen piste on yhtä kaukana annetusta suorasta ja sen ulkopuolella sijaitsevasta pisteestä. Näitä kutsutaan *johtosuoraksi* ja *polttopisteeksi*.

Kuvan [5.A](#) paraabelin johtosuora on $y = -x$ ja sen polttopiste on $(2, 2)$. Osoita, että paraabelin yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$x + y = a(x - y)^2 + b,$$

ja määritä siinä esiintyvät vakiot a ja b .

Ratkaisu.

Paraabelin piste (x, y) on yhtä kaukana polttopisteestä $(2, 2)$ ja johtosuorasta $y = -x$ eli $x + y = 0$.

Etäisyys polttopisteestä:

$$d_1 = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 2)^2} \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)}$$

Etäisyys johtosuorasta $x + y = 0$:

$$d_2 = \frac{|x + y|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|x + y|}{\sqrt{2}} \quad \text{2 p. (yht. 4 p.)}$$

Etäisyydet ovat positiivisia, joten voidaan muodostaa ehto $d_1^2 = d_2^2$:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = \frac{(x + y)^2}{2} \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)} \quad \parallel \cdot 2$$

$$2(x - 2)^2 + 2(y - 2)^2 = (x + y)^2$$

$$2x^2 - 8x + 8 + 2y^2 - 8y + 8 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{2 p. (yht. 8 p.)}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0 \quad \text{2 p. (yht. 10 p.)}$$

$$(x - y)^2 - 8(x + y) + 16 = 0$$

Ratkaistaan $x + y$:

$$x + y = \frac{(x - y)^2}{8} + 2 = \frac{1}{8}(x - y)^2 + 2 \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

Vastaus: $a = \frac{1}{8}$ ja $b = 2$ 1 p. (yht. 12 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita!

6. Eiffel-torni (12 p.)

Aineisto:

6. A [Kuva: Eiffel-torni](#)

Eiffel-tornin muotoa voidaan mallintaa xyz -koordinaatiston kappaleella, jonka rajaavat neljä pintaa

$$x = ae^{c(h-z)}, \quad y = ae^{c(h-z)}, \quad x = -ae^{c(h-z)}, \quad y = -ae^{c(h-z)}$$

sekä tasot $z = 0$ ja $z = h$. Mallissa $a = 4,255$, $c = 0,00892$, $h = 312$ ja yksikkönä on metri. Tämä kappale on esitetty kuvassa [6.A](#). Laske kappaleen tilavuus integraalia käyttäen.

Ratkaisu.

Korkeudella z kappale rajautuu suorien $x = \pm ae^{c(h-z)}$ ja $y = \pm ae^{c(h-z)}$ väliin, joten poikkileikkaus on neliö, jonka sivun pituus on $2ae^{c(h-z)}$. 3 p. (yht. 3 p.) Poikkileikkauksen pinta-ala on siis

$$A(z) = (2ae^{c(h-z)})^2 = 4a^2 e^{2c(h-z)}. \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Kappaleen tilavuus saadaan integroimalla poikkileikkauksen pinta-ala korkeuden suhteen välillä $0 \leq z \leq h$:

$$V = \int_0^h 4a^2 e^{2c(h-z)} dz \quad \text{3 p. (yht. 7 p.)}$$

Lasketaan integraali. Koska $D(e^{2c(h-z)}) = -2c e^{2c(h-z)}$, saadaan

$$V = 4a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2c}\right) \int_0^h -2c \cdot e^{2c(h-z)} dz$$

$$V = -\frac{4a^2}{2c} \int_0^h e^{2c(h-z)} dz \quad \text{3 p. (yht. 10 p.)}$$

$$= -\frac{4a^2}{2c} (e^{2c(h-h)} - e^{2c(h-0)})$$

$$= -\frac{4a^2}{2c} (e^{2c \cdot 0} - e^{2ch})$$

$$= -\frac{4a^2}{2c} (1 - e^{2ch})$$

$$= \frac{2a^2}{c} (e^{2ch} - 1).$$

Sijoitetaan arvot $a = 4,255$, $c = 0,00892$ ja $h = 312$:

$$V = 1\,057\,103,58 \text{ m}^3$$

$$\approx 1\,060\,000 \text{ m}^3$$

2 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Kappaleen tilavuus on $V \approx 1\,060\,000 \text{ m}^3$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita!

7. Skotlannin lippu (12 p.)

Aineisto:

7. A [Kuva: Skotlannin lippu](#)

Jalkapallofanilla on Skotlannin lippu, jonka leveys on 50 cm ja korkeus 30 cm. Lipun sinisellä pohjalla on molempien lävistäjien ympärillä valkoinen alue. Se ulottuu vaakasuuntaan 5,8 cm lävistäjältä vasemmalle ja oikealle sekä pystysuuntaan 3,5 cm lävistäjältä ylös ja alas kuten kuvassa [7.A](#). Kuinka monta prosenttia valkoinen alue on lipun pinta-alasta?

Ratkaisu.**Ratkaisuvaihtoehto 1**

Oletetaan, että lipun vaakasuuntaisilla sivuilla olevien kolmioiden ja pystysuuntaisilla sivuilla olevien kolmioiden vaaka- ja pystysuuntaiset etäisyydet lävistäjistä ovat samat.

Lipun leveys on 50 ja korkeus on 30, joten lipun koko pinta-ala on

$$50 \cdot 30 = 1500 \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)})$$

neliösenttimetriä.

Lasketaan lipun alareunassa olevan sinisen kolmion pinta-ala. Kolmion kanta on

$$50 - 2 \cdot 5,8 = 38,4 \quad (1 \text{ p. (yht. 2 p.)})$$

senttimetriä.

Kolmion yläkärjen etäisyys lävistäjien leikkauspisteestä on 3,5 cm, joten kolmion korkeus on siis

$$\frac{30}{2} - 3,5 = 11,5 \quad (2 \text{ p. (yht. 4 p.)})$$

senttimetriä.

Lipun yläreunassa oleva kolmio on tämän kolmion kanssa identtinen, joten ala- ja yläreunassa olevien sinisten kolmioiden yhteenlaskettu pinta-ala on

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 38,4 \cdot 11,5 = 441,6 \quad (1 \text{ p. (yht. 5 p.)})$$

neliösenttimetriä.

Lasketaan sitten vastaavalla tavalla lipun vasemmassa reunassa olevan sinisen kolmion pinta-ala. Sen kanta on

$$30 - 2 \cdot 3,5 = 23 \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

senttimetriä.

Kolmion oikean kärjen etäisyys lävistäjien leikkauspisteestä on 5,8 cm, joten kolmion korkeus on siis

$$\frac{50}{2} - 5,8 = 19,2 \quad \text{2 p. (yht. 8 p.)}$$

senttimetriä.

Lipun oikeassa reunassa oleva kolmio on tämän kolmion kanssa identtinen, joten vasemmassa ja oikeassa reunassa olevien sinisten kolmioiden yhteenlaskettu pinta-ala on

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 23 \cdot 19,2 = 441,6 \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

neliösenttimetriä.

Valkoisen alueen pinta-ala saadaan vähentämällä sinisten kolmioiden pinta-ala koko lipun pinta-alasta. Se on

$$1500 - 441,6 - 441,6 = 616,8 \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

neliösenttimetriä.

Valkoinen alue on siis

$$\begin{aligned} \frac{616,8}{1500} & \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)} = 0,4112 \\ & = 41,12\% \\ & \approx 41\% \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)} \end{aligned}$$

koko lipun pinta-alasta.

Vastaus: Valkoinen alue on 41% koko lipun pinta-alasta.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Oletetaan, että kolmioiden sivut ja lipun lävistäjät ovat yhdensuuntaiset. Asetetaan lippu xy -koordinaatistoon siten, että vasen alareuna on origossa ja oikea yläreuna on pisteessä $(50, 30)$.

Lipun leveys on 50 ja korkeus on 30, joten lipun koko pinta-ala on

$$50 \cdot 30 = 1500 \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)})$$

neliösenttimetriä.

Lasketaan lipun alareunassa olevan sinisen kolmion pinta-ala. Kolmion kanta on

$$50 - 2 \cdot 5,8 = 38,4 \quad (1 \text{ p. (yht. 2 p.)})$$

senttimetriä.

Kolmion vasemmasta alakulmasta kohti yläkärkeä kulkeva sivu on yhdensuuntainen lipun lävistäjän kanssa, joka kulkee origosta lipun oikeaan yläkulmaan, eli sen kulma-kerroin on

$$k = \frac{30}{50} = 0,6.$$

Puolet kolmion kannasta on $\Delta x = 38,4/2 = 19,2$. Kolmion korkeus saadaan kulmakertoimen avulla:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y = k\Delta x = 0,6 \cdot 19,2 = 11,52. \quad (2 \text{ p. (yht. 4 p.)})$$

Lipun yläreunassa oleva kolmio on tämän kolmion kanssa identtinen, joten ala- ja yläreunassa olevien sinisten kolmioiden yhteenlaskettu pinta-ala on

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 38,4 \cdot 11,52 = 442,368 \quad (1 \text{ p. (yht. 5 p.)})$$

neliösenttimetriä.

Lasketaan sitten vastaavalla tavalla lipun vasemmassa reunassa olevan sinisen kolmion pinta-ala. Sen kanta on

$$30 - 2 \cdot 3,5 = 23 \quad (1 \text{ p. (yht. 6 p.)})$$

senttimetriä.

Kolmion alakulmasta kohti kolmion oikealla olevaa kärkeä kulkeva sivu on yhden-suuntainen saman lävistäjän kanssa kuin yllä tarkasteltu kolmion sivu, eli sen kulma-kerroin on

$$k = 0,6.$$

Puolet kolmion kannasta on $\Delta y = 23/2 = 11,5$. Kolmion korkeus saadaan kulmakertoimen avulla:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta x = \frac{\Delta y}{k} = \frac{11,5}{0,6} = 19,1666 \dots \quad (2 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

Lipun oikeassa reunassa oleva kolmio on tämän kolmion kanssa identtinen, joten vasemmassa ja oikeassa reunassa olevien sinisten kolmioiden yhteenlaskettu pinta-ala on

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 23 \cdot 19,1666 \dots = 440,8333 \dots \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

neliösenttimetriä.

Valkoisen alueen pinta-ala saadaan vähentämällä sinisten kolmioiden pinta-ala koko lipun pinta-alasta. Se on

$$1500 - 442,368 - 440,8333 \dots = 616,798666 \dots \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)})$$

neliösenttimetriä.

Valkoinen alue on siis

$$\frac{616,798666 \dots}{1500} \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)}) = 0,411199111 \dots$$

$$= 41,1199111 \dots \%$$

$$\approx 41\% \quad (1 \text{ p. (yht. 12 p.)})$$

koko lipun pinta-alasta.

Vastaus: Valkoinen alue on 41% koko lipun pinta-alasta.

8. Muinainen laina (12 p.)

Korollisia lainoja oli käytössä jo muinaisessa Lähi-idässä. Säilynyt assyrialainen teksti kuvaa erästä lainaa seuraavasti: ”joka kuukausi velkaan lisättiin yksi hopeasekeli velan minaa kohti”. Yksi mina on arvoltaan noin 570 grammaa hopeaa ja se jakautuu 60 sekeliin.

Ei ole täysin selvää, miten teksti pitäisi tulkita. Se voidaan tulkita ainakin seuraavilla kahdella eri tavalla:

Tapa 1: Korko lasketaan vain täysistä minoista.

Tapa 2: Korko lasketaan myös osittaisista minoista.

Kuinka paljon 30 minan lainasta kertyy vuodessa korkoa näiden eri tulkintojen mukaan?

Ratkaisu.

Tapa 1: Korko lasketaan vain täysistä minoista.

Voit laskea nämä käyttämällä taulukkolaskentaohjelmaa tai ”käsin” laskimen avulla.

	A	B	C	D	E	F
1	Kuukausi	Velan määrä kuukauden alussa (minaa)	Velan osa, josta korko lasketaan (minaa)	Korko (sekeliä)	Velan määrä kuukauden lopussa (sekeliä)	Velan määrä kuukauden lopussa (minaa)
2	1	30	30	30	1830	30.5
3	2	30.5	30	30	1860	31
4	3	31	31	31	1891	31.51666667
5	4	31.51666667	31	31	1922	32.03333333
6	5	32.03333333	32	32	1954	32.56666667
7	6	32.56666667	32	32	1986	33.1
8	7	33.1	33	33	2019	33.65
9	8	33.65	33	33	2052	34.2
10	9	34.2	34	34	2086	34.76666667
11	10	34.76666667	34	34	2120	35.33333333
12	11	35.33333333	35	35	2155	35.91666667
13	12	35.91666667	35	35	2190	36.5

Käytetyt kaavat:

	A	B	C	D	E	F
1	Kuukausi	Velan määrä kuukauden alussa (minaa)	Velan osa, josta korko lasketaan (minaa)	Korko (sekeä)	Velan määrä kuukauden lopussa (sekeä)	Velan määrä kuukauden lopussa (minaa)
2	1	30	=KOKONAISLUKU(B2)	=C2	=60*B2+D2	=E2/60
3	=A2+1	=F2	=KOKONAISLUKU(B3)	=C3	=60*B3+D3	=E3/60
4	=A3+1	=F3	=KOKONAISLUKU(B4)	=C4	=60*B4+D4	=E4/60
5	=A4+1	=F4	=KOKONAISLUKU(B5)	=C5	=60*B5+D5	=E5/60
6	=A5+1	=F5	=KOKONAISLUKU(B6)	=C6	=60*B6+D6	=E6/60
7	=A6+1	=F6	=KOKONAISLUKU(B7)	=C7	=60*B7+D7	=E7/60
8	=A7+1	=F7	=KOKONAISLUKU(B8)	=C8	=60*B8+D8	=E8/60
9	=A8+1	=F8	=KOKONAISLUKU(B9)	=C9	=60*B9+D9	=E9/60
10	=A9+1	=F9	=KOKONAISLUKU(B10)	=C10	=60*B10+D10	=E10/60
11	=A10+1	=F10	=KOKONAISLUKU(B11)	=C11	=60*B11+D11	=E11/60
12	=A11+1	=F11	=KOKONAISLUKU(B12)	=C12	=60*B12+D12	=E12/60
13	=A12+1	=F12	=KOKONAISLUKU(B13)	=C13	=60*B13+D13	=E13/60

Lisäselitys: Sarakkeessa A on kuukaudet. Sarakkeessa B on velan määrä kuukauden alussa minoina. Ensimmäisen kuukauden kohdalla se on 30, ja seuraavissa se on otettu edellisen rivin lopussa lasketusta velan määrästä kuukauden lopussa. Sarakkeessa C on otettu sarakkeen B luvusta kokonaislukuosa, jolloin saadaan kokonaisten minojen määrä velassa. Sarakkeessa D on korko sekeleinä, joka on sama kuin viereinen sarakkeen C luku. Sarakkeessa E on laskettu velan määrä kuukauden lopussa sekeleinä kertomalla sarakkeessa B oleva velan määrä minoina luvulla 60 ja lisäämällä siihen sarakkeessa D oleva korko. Sarakkeessa F on velan määrä kuukauden lopussa minoina, joka on laskettu jakamalla sarakkeessa E oleva luku 60:llä.

Korkoa kertyy vuodessa $2190 - 1800 = 390$ sekeä eli 6 minaa 30 sekeä.

Vastaus: Tavalla 1 korkoa kertyy 390 sekeä = 6 minaa 30 sekeä.

Pisteytyksestä:

- Korkoa kertyy ensimmäisenä kuukautena 30 sekeä. 1 p. (yht. 1 p.)
- Myös toisena kuukautena kertyy korkoa 30 sekeä. 1 p. (yht. 2 p.)
- Kolmantena kuukautena korkoa kertyy 31 sekeä. 1 p. (yht. 3 p.)
- Loppujen kuukausien korot oikein. 2 p. (yht. 5 p.)
- Kaikkien korkojen summa oikein. 1 p. (yht. 6 p.)

Tapa 2: Korko lasketaan myös osittaisista minoista.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Korko kertyy koko velan määrälle, myös osittaisille minoille. Koska korkoa kertyy yksi sekeli, eli $\frac{1}{60}$ minoa yhtä minoa kohden kuukaudessa, tämä vastaa korkotekijää $1 + \frac{1}{60}$.

2 p. (yht. 2 p.)

Velan määrä n kuukauden jälkeen on siis

$$V_n = 1800 \cdot \left(1 + \frac{1}{60}\right)^n = 1800 \cdot \left(\frac{61}{60}\right)^n$$

Vuoden eli 12 kuukauden jälkeen velan määrä on:

$$V_{12} = 1800 \cdot \left(\frac{61}{60}\right)^{12}$$

1 p. (yht. 3 p.)

$$= 2194,903952 \dots$$

$$\approx 2195$$

sekeliä.

Korkoa kertyy siis $2195 - 1800$ 1 p. (yht. 4 p.) $= 395$ sekeliä 2 p. (yht. 6 p.) eli 6 minaa 35 sekeliä.

Vastaus: Tavalla 2 korkoa kertyy 395 sekeliä $= 6$ minaa 35 sekeliä.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A	B	C	D	E
1	Kuukausi	Velan määrä kuukauden alussa (minaa)	Korko (sekeliä)	Velan määrä kuukauden lopussa (sekeliä)	Velan määrä kuukauden lopussa (minaa)
2	1	30	30	1830	30.5
3	2	30.5	30.5	1860.5	31.00833333
4	3	31.00833333	31.00833333	1891.50833333	31.52513889
5	4	31.52513889	31.52513889	1923.03347222	32.05055787
6	5	32.05055787	32.05055787	1955.08403009	32.58473383
7	6	32.58473383	32.58473383	1987.66876393	33.12781273
8	7	33.12781273	33.12781273	2020.79657666	33.67994294
9	8	33.67994294	33.67994294	2054.4765196	34.24127533
10	9	34.24127533	34.24127533	2088.71779493	34.81196325
11	10	34.81196325	34.81196325	2123.52975818	35.39216264
12	11	35.39216264	35.39216264	2158.92192082	35.98203201
13	12	35.98203201	35.98203201	2194.90395283	36.58173255

Käytetyt kaavat:

	A	B	C	D	E
1	Kuukausi	Velan määrä kuukauden alussa (minaa)	Korko (sekeliä)	Velan määrä kuukauden lopussa (sekeliä)	Velan määrä kuukauden lopussa (minaa)
2	1	30	=B2	=60*B2+C2	=D2/60
3	=A2+1	=E2	=B3	=60*B3+C3	=D3/60
4	=A3+1	=E3	=B4	=60*B4+C4	=D4/60
5	=A4+1	=E4	=B5	=60*B5+C5	=D5/60
6	=A5+1	=E5	=B6	=60*B6+C6	=D6/60
7	=A6+1	=E6	=B7	=60*B7+C7	=D7/60
8	=A7+1	=E7	=B8	=60*B8+C8	=D8/60
9	=A8+1	=E8	=B9	=60*B9+C9	=D9/60
10	=A9+1	=E9	=B10	=60*B10+C10	=D10/60
11	=A10+1	=E10	=B11	=60*B11+C11	=D11/60
12	=A11+1	=E11	=B12	=60*B12+C12	=D12/60
13	=A12+1	=E12	=B13	=60*B13+C13	=D13/60

Lisäselitys: Sarakkeessa A on kuukaudet. Sarakkeessa B on velan määrä kuukauden alussa minoina. Ensimmäisen kuukauden kohdalla se on 30, ja seuraavissa se on otettu edellisen rivin lopussa lasketusta velan määrästä kuukauden lopussa. Sarakkeessa C on korko sekeleinä, joka on sama kuin viereinen sarakkeen B luku. Sarakkeessa D on laskettu velan määrä kuukauden lopussa sekeleinä kertomalla sarakkeessa B oleva velan määrä minoina luvulla 60 ja lisäämällä siihen sarakkeessa C oleva korko. Sarakkeessa E on velan määrä kuukauden lopussa minoina, joka on laskettu jakamalla sarakkeessa D oleva luku 60:llä.

Lopullinen velka on siis $2194,903 \dots \approx 2195$ sekeliä. Korkoa kertyy vuodessa siis $2195 - 1800 = 395$ sekeliä eli 6 minaa 35 sekeliä.

Vastaus: Tavalla 2 korkoa kertyy 395 sekeliä $= 6$ minaa 35 sekeliä.

Pisteytyksestä:

- Sarakkeista B, C ja E jokaisesta yksi piste, kunhan sarakkeen sisältö on laskettu järkevällä tavalla.
- Sarakkeesta D kaksi pistettä.
- Vastauksesta 1 piste.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita!

9. Korrelaatiokerroin (12 p.)

Anna esimerkki kahden muuttujan aineistosta, jossa on vähintään kymmenen eri datapistettä ja jossa muuttujien välinen korrelaatiokerroin on $r = 1$. Anna vastauksena kuvakaappaus aineistosta, aineiston graafinen esitys ja kuvakaappaukset, jotka osoittavat, että vaaditut ehdot toteutuvat.

Anna vastaavat esimerkit myös tapauksista $r = -1$ ja $r = 0$.

Ratkaisu.

Kahden muuttujan x ja y korrelaatiokerroin lasketaan kaavalla

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y},$$

missä s_{xy} on muuttujien x ja y kovarianssi, s_x muuttujan x keskihajonta ja s_y muuttujan y keskihajonta.

Kun muuttujan x arvot ovat $x_1, x_2 \dots x_n$ lasketaan muuttujan x keskihajonta kaavalla

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}},$$

missä $\bar{x}$ on muuttujan x keskiarvo.

Vastaavasti kun muuttujan y arvot ovat $y_1, y_2 \dots y_n$ lasketaan muuttujan y keskihajonta kaavalla

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}},$$

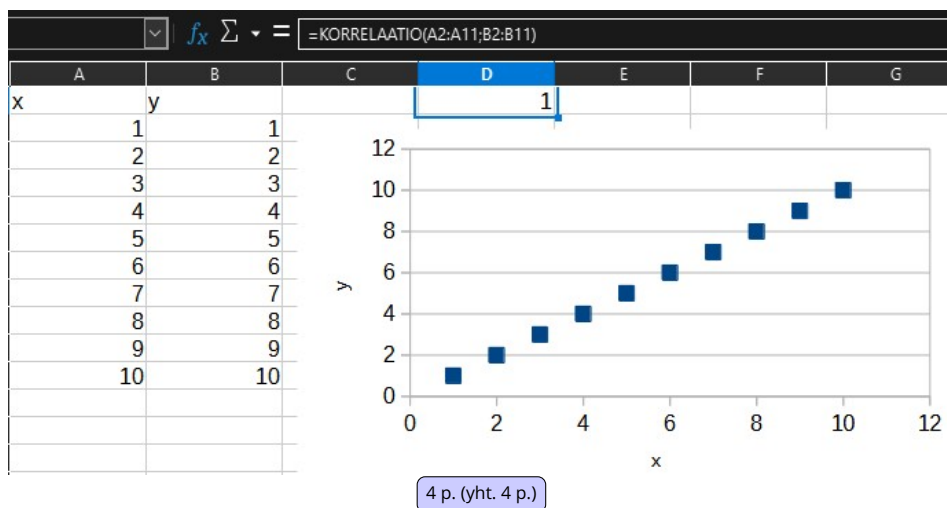
missä $\bar{y}$ on muuttujan y keskiarvo.

Lisäksi muuttujien x ja y kovarianssi s_{xy} lasketaan kaavalla

$$s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}.$$

Korrelaatiokerroin $r = 1$ tarkoittaa, että aineiston kahden muuttujan välillä on täydellinen positiivinen lineaarinen riippuvuus.

Esimerkki kahden muuttujan ja kymmenen datapisteen aineistosta, jonka korrelaatiokerroin on $r = 1$ olisi seuraava:



Muuttujien keskiarvot $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat tällöin

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10}{10} = 5,5.$$

Muuttujien keskihajonnat ovat tällöin

$$s_x = s_y = \sqrt{\frac{(1 - 5,5)^2 + (2 - 5,5)^2 + \dots + (10 - 5,5)^2}{10}} = \frac{\sqrt{33}}{2},$$

ja kovarianssi

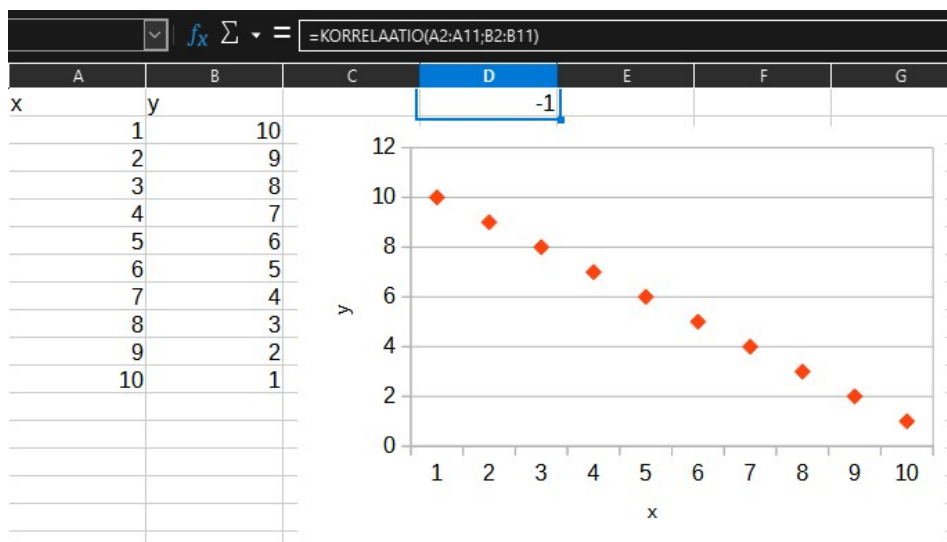
$$s_{xy} = \frac{(1 - 5,5)(1 - 5,5) + (2 - 5,5)(2 - 5,5) + \dots + (10 - 5,5)(10 - 5,5)}{10} = \frac{33}{4},$$

jolloin korrelaatiokerroin on

$$r = \frac{\frac{33}{4}}{\frac{\sqrt{33}}{2} \cdot \frac{\sqrt{33}}{2}} = 1.$$

Korrelaatiokerroin $r = -1$ tarkoittaa, että aineiston kahden muuttujan välillä on täydellinen negatiivinen lineaarinen riippuvuus.

Esimerkki kahden muuttujan ja kymmenen datapisteen aineistosta, jonka korrelaatiokerroin on $r = -1$ olisi seuraava:



4 p. (yht. 8 p.)

Muuttujien keskiarvot $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat tällöin

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10}{10} = 5,5$$

$$\bar{y} = \frac{10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}{10} = 5,5.$$

Muuttujien keskihajonnat ovat tällöin

$$s_x = \sqrt{\frac{(1 - 5,5)^2 + (2 - 5,5)^2 + \dots + (10 - 5,5)^2}{10}} = \frac{\sqrt{33}}{2}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{(10 - 5,5)^2 + (9 - 5,5)^2 + \dots + (1 - 5,5)^2}{10}} = \frac{\sqrt{33}}{2},$$

ja kovarianssi

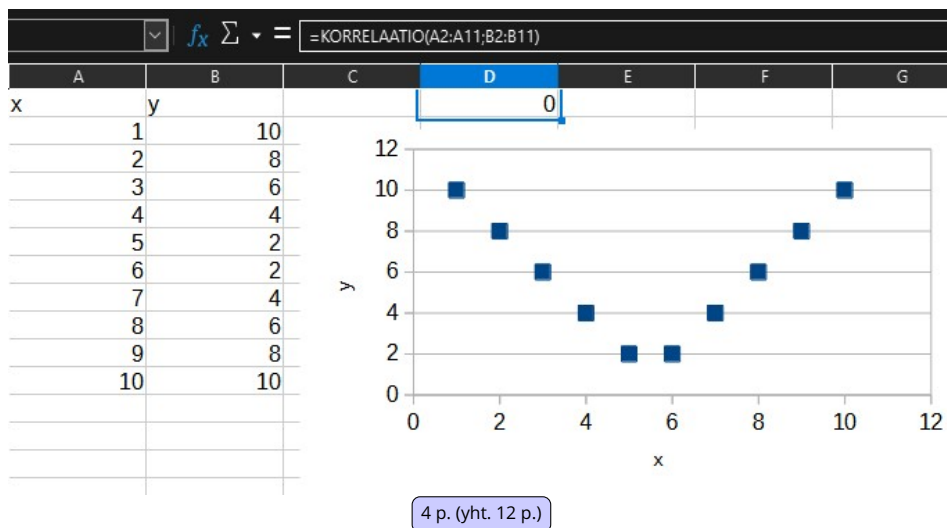
$$s_{xy} = \frac{(1 - 5,5)(10 - 5,5) + (2 - 5,5)(9 - 5,5) + \dots + (10 - 5,5)(1 - 5,5)}{10} = \frac{-33}{4},$$

jolloin korrelaatiokerroin on

$$r = \frac{\frac{-33}{4}}{\frac{\sqrt{33}}{2} \cdot \frac{\sqrt{33}}{2}} = -1.$$

Korrelaatiokerroin $r = 0$ tarkoittaa, että aineiston kahden muuttujan välillä ei ole lineaarista riippuvuutta.

Esimerkki kahden muuttujan ja kymmenen datapisteen aineistosta, jonka korrelaatiokerroin on $r = 0$ olisi seuraava:



Muuttujien keskiarvot $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat tällöin

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10}{10} = 5,5$$

$$\bar{y} = \frac{10 + 8 + 6 + 4 + 2 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10}{10} = 6.$$

Muuttujien keskihajonnat ovat tällöin

$$s_x = \sqrt{\frac{(1 - 5,5)^2 + (2 - 5,5)^2 + \dots + (10 - 5,5)^2}{10}} = \frac{\sqrt{33}}{2}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{(10 - 6)^2 + (8 - 6)^2 + \dots + (10 - 6)^2}{10}} = 2\sqrt{2},$$

ja kovarianssi

$$s_{xy} = \frac{(1 - 5,5)(10 - 5,5) + (2 - 5,5)(9 - 5,5) + \dots + (10 - 5,5)(1 - 5,5)}{10} = 0,$$

jolloin korrelaatiokerroin on

$$r = \frac{0}{\frac{\sqrt{33}}{2} \cdot 2\sqrt{2}} = 0.$$

Pisteytyksestä:

- Oikeanlainen aineisto kullekin korrelaatiokertoimelle 1 p / aineisto.
- Aineiston graafinen esitys 1 p / aineisto.
- Laskettu aineistolla oikea korrelaatiokertoimen arvo ja näkyy kuinka laskettu 2 p / aineisto.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita!

10. Collatzin lukujono (12 p.)

Collatzin jono on rekursiivinen lukujono, jonka jäsenet ovat positiivisia kokonaislukuja. Jonon seuraava jäsen a_{n+1} saadaan edellisestä jäsenestä a_n seuraavalla tavalla:

- Jos a_n on parillinen, niin $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$.
- Jos a_n on pariton ja suurempi kuin 1, niin $a_{n+1} = 3a_n + 1$.
- Jos $a_n = 1$, niin jono päättyy.

Esimerkiksi luvusta $a_1 = 20$ alkava Collatzin jono on 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Saksalainen Lothar Collatz esitti vuonna 1937 konjektuurin (eli väittämän, jota ei kyennyt todistamaan), jonka mukaan mistä tahansa alkuarvosta alkava Collatzin jono on äärellinen. Tähän päivään mennessä kukaan ei ole kyennyt todistamaan sitä oikeaksi tai vääräksi.

1. Määritä Collatzin lukujono alkuarvolla $a_1 = 23$. (3 p.)
2. Selvitä ohjelmiston avulla, mikä alkuarvo välillä 2–100 johtaa pisimpään Collatzin jonoon. Voit kirjoittaa koodisi esimerkiksi Pythonilla tai taulukkolaskentaohjelmalla. Anna vastauksena koodisi, koodin selitys ja taulukko, jossa näkyvät ainakin ne alkuarvot, jotka tuottavat viisi pisintä jonoa, sekä näiden jonojen pituudet. (9 p.)

Ratkaisu.

1.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Lasketaan Collatzin jono alkuarvolla $a_1 = 23$:

$$a_1 = 23$$

$$a_2 = 3 \cdot 23 + 1 = 70$$

$$a_3 = 70/2 = 35$$

$$a_4 = 3 \cdot 35 + 1 = 106$$

$$a_5 = 106/2 = 53$$

$$a_6 = 3 \cdot 53 + 1 = 160$$

$$a_7 = 160/2 = 80$$

$$a_8 = 80/2 = 40$$

$$a_9 = 40/2 = 20$$

$$a_{10} = 20/2 = 10$$

$$a_{11} = 10/2 = 5$$

$$a_{12} = 3 \cdot 5 + 1 = 16$$

$$a_{13} = 16/2 = 8$$

$$a_{14} = 8/2 = 4$$

$$a_{15} = 4/2 = 2$$

$$a_{16} = 2/2 = 1$$

Vastaus: 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

3 p. (yht. 3 p.)

Pisteytyksestä: Kaikkia jonon alkuiden arvoihin johtavia laskutoimituksia ei tarvitse merkitä näkyviin. Riittää, että on näyttänyt laskutoimituksen parilliselle arvolle ja parittomalle arvolle ainakin kerran, ja kaikki jonon jäsenet on esitetty oikein ja järjestyksessä.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Tämä ratkaisutapa on mahdollinen vain, jos kohdassa 2 muodosti jonot näkyviin esimerkiksi taulukkolaskennan avulla.

Kohdan 2 nojalla lukujono on 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

3 p. (yht. 3 p.)

Pisteytyksestä: Kaikkia jonon alkioden arvoihin johtavia laskutoimituksia ei tarvitse merkitä näkyviin. Riittää, että kohdan 2 ratkaisussa on näyttänyt laskutoimituksen parilliselle arvolle ja parittomalle arvolle ainakin kerran, ja kaikki jonon jäsenet on esitetty oikein ja järjestyksessä.

Ratkaisuvaihtoehto 3

Kirjoitetaan Python-ohjelma, joka laskee Collatzin lukujonon, kun ensimmäinen jäsen on 23.

`a = 23`

```
while True:
    print(a)
    if a == 1:
        break
    if a % 2 == 0:
        a = a // 2
    else:
        a = 3 * a + 1
```

Ohjelma asettaa ensimmäisellä rivillä alkuarvoksi 23, minkä jälkeen ohjelma toistaa silmukkaa, kunnes arvoksi tulee 1. Silmukassa ohjelma laskee seuraavan arvon lukujonon säännön mukaisesti: jos edellinen arvo a on parillinen, seuraava on $a/2$, ja jos edellinen arvo a on pariton, seuraava on $3a + 1$.

Vastaus: 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

3 p. (yht. 3 p.)

Pisteytyksestä: Kaikkia jonon alkioden arvoihin johtavia laskutoimituksia ei tarvitse merkitä näkyviin. Riittää, että käytetyssä koodista tulee näyttäneeksi laskutoimituksen parilliselle arvolle ja parittomalle arvolle ainakin kerran, ja kaikki jonon jäsenet on esitetty oikein ja järjestyksessä.

2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Kirjoitetaan Pythonilla ohjelma, joka laskee Collatzin jonon pituuden jokaiselle alkuarvolle välillä 2–100, ja löytää viisi pisintä jonoa.

Koodi:

```
results = []

for start in range(2, 101):
    a = start
    length = 1

    while a != 1:
        if a % 2 == 0:
            a = a // 2
        else:
            a = 3 * a + 1
        length += 1

    results.append((length, start))

results.sort(reverse=True)

for length, start in results[:5]:
    print("Alkuarvo:", start, "- Jonon pituus:", length)
```

3 p. (yht. 6 p.)

Koodin selitys:

```
results = []
```

Tällä rivillä luodaan lista, johon voidaan tallentaa tulokset.

```
for start in range(2, 101):
    a = start
    length = 1
```

Tässä käydään läpi alkuarvot luvusta 2 lukuun 100 for-silmukan avulla, ja aina kun-kin alkuarvon kohdalla asetetaan a :n arvoksi alkuarvo ja jonon pituutta kuvaavan muuttujan length arvoksi 1. **Huomaa, että Pythonissa $\text{range}(m, n)$ aloittaa luvus-ta m ja päättyy lukuun $n - 1$.**

```
while a != 1:
    if a % 2 == 0:
        a = a // 2
    else:
        a = 3 * a + 1
    length += 1
```

Tässä on while-silmukka, joka toistaa sen sisällä olevaa koodia kunnes a :n arvoksi tulee 1. Sisällä oleva koodi päivittää a :n arvoksi $a/2$, jos a on parillinen, ja $3a + 1$, jos a on pariton. Kullakin toistolla jonon pituutta kuvaavan muuttujan length arvoon lisätään 1.

```
results.append((length, start))
```

Tällä rivillä lisätään while-silmukan päättymisen jälkeen tulos, eli jonon pituus ja alkuarvo, alussa luotuun listaan.

```
results.sort(reverse=True)
```

Tällä rivillä järjestetään lista suurimmasta jonon pituudesta pienimpään.

```
for length, start in results[:5]:
    print("Alkuarvo:", start, "- Jonon pituus:", length)
```

Tässä tulostetaan järjestetyn listan viisi ensimmäistä alkia, eli viiden pisimmän jonon alkuarvo ja pituus. 2 p. (yht. 8 p.)

Koodin selityksen voi kirjoittaa myös kommentteina itse koodissa.

Tulos:

Alkuarvo: 97 - Jonon pituus: 119

Alkuarvo: 73 - Jonon pituus: 116

Alkuarvo: 55 - Jonon pituus: 113

Alkuarvo: 54 - Jonon pituus: 113

Alkuarvo: 27 - Jonon pituus: 112 2 p. (yht. 10 p.)

Vastaus: Pisin Collatzin jono välillä 2–100 saadaan alkuarvolla $a_1 = 97$, jolloin jonon pituus on 119. 2 p. (yht. 12 p.)

Pisteytyksestä:

- Toimivan koodin esittämisestä saa 3 pistettä.
- Koodin toiminnan selityksestä saa 2 pistettä.
- Viiden pisimmän Collatzin lukujonon esittämisestä saa 4 pistettä.
 - Jos vastausten antaminen on unohtunut, mutta osana ratkaisua on esitetty kuvakaappaus koodin tulosteesta josta pisimmät jonot on nähtävillä muiden jonojen lisäksi, tästä kohdasta voi antaa 2 pistettä.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Muodostetaan jonot taulukkolaskennalla ja etsitään viisi pisintä jonoa. Aloitetaan kirjoittamalla kaikki alkuarvot luvusta 2 lukuun 100 riville 2. Sen jälkeen muodostetaan riville 3 kaava, joka laskee edellisen rivin arvosta seuraavan arvon tai antaa tyhjän, jos edellinen arvo on 1 tai tyhjä. 2 p. (yht. 5 p.) Kaava sarakkeessa A:

=JOS(TAI(A2="",A2=1),"",JOS(JAKOJ(A2,2)=0,A2/2,3*A2+1))

3 p. (yht. 8 p.)

Huomaa, että asetuksista riippuen funktion argumentit erotellaan joko pilkulla tai puolipisteellä.

Kopioidaan tämä kaava vastaavasti kaikkiin sarakkeisiin, ja jatketaan sitä alaspäin niin monta riviä, että pisinkin jono on loppunut.

Tämän jälkeen selvitetään kunkin jonon pituus rivillä 1. Kaava sarakkeessa A:

=LASKE.JOS(A2:A200,">0")

Tämän jälkeen voidaan järjestää sarakkeet rivin 1 mukaan laskevasti, jotta saadaan viisi pisintä jonoa ensimmäisiksi viideksi sarakkeeksi.

Tulos:

Alkuarvo: 97 - Jonon pituus: 119

Alkuarvo: 73 - Jonon pituus: 116

Alkuarvo: 55 - Jonon pituus: 113

Alkuarvo: 54 - Jonon pituus: 113

Alkuarvo: 27 - Jonon pituus: 112

2 p. (yht. 10 p.)

Vastaus: Pisin Collatzin jono välillä 2–100 saadaan alkuarvolla $a_1 = 97$, jolloin jonon pituus on 119.

2 p. (yht. 12 p.)

Pisteytyksestä:

- Toimivan taulukkolaskennan esittämisestä saa 3 pistettä.
- Käytettyjen vaiheiden selittämisestä selityksestä saa 2 pistettä.
- Viiden pisimmän Collatzin lukujonon esittämisestä saa 4 pistettä.
 - Jos vastausten antaminen on unohtunut, mutta osana ratkaisua on esitetty kuvakaappaus taulukkolaskentaohjelmasta, jossa pisimmät jonot on nähtävillä muiden jonojen lisäksi, tästä kohdasta voi antaa 2 pistettä.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita!

11. Integraalin palautuskaava (12 p.)

Tarkastellaan epäoleellisia integraaleja

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx,$$

kun $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

1. Johda palautuskaava

$$I_n = n I_{n-1},$$

kun $n \geq 1$.

Vihje: Integroi kaava $D(x^n e^{-x}) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}$ puolittain välillä $0 \leq x \leq R$. (6 p.)

2. Osoita epäoleellisen integraalin määritelmää käyttämällä, että

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1,$$

ja päättelee integraalin I_5 arvo palautuskaavan $I_n = n I_{n-1}$ avulla. (6 p.)

Ratkaisu.

1.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Vihjeen mukaan

$$D(x^n e^{-x}) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}.$$

Integroidaan molemmat puolet välillä $[0, R]$:

$$\int_0^R D(x^n e^{-x}) = \int_0^R nx^{n-1}e^{-x} dx - \int_0^R x^n e^{-x} dx$$

$$\int_0^R x^n e^{-x} = n \int_0^R x^{n-1}e^{-x} dx - \int_0^R x^n e^{-x} dx \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)}$$

$$R^n e^{-R} - 0^n e^{-0} \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)} = n \int_0^R x^{n-1}e^{-x} dx - \int_0^R x^n e^{-x} dx$$

Otetaan raja-arvo $R \rightarrow \infty$. Koska eksponenttifunktio kasvaa nopeammin kuin mikään polynomi,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^n e^{-R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^n}{e^R} = 0. \quad (1 \text{ p. (yht. 4 p.)})$$

Lisäksi $0^n \cdot e^{-0} = 0$.

Saadaan siis

$$0 = n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx - \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \quad (1 \text{ p. (yht. 5 p.)})$$

$$I_n = n \cdot I_{n-1}, \quad (1 \text{ p. (yht. 6 p.)})$$

kun $n \geq 1$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Osittaisintegroidaan I_n . Merkitään $f(x) = -e^{-x}$ ja $g(x) = x^n$. Tällöin siis $f'(x) = e^{-x}$ ja $g'(x) = nx^{n-1}$.

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x} x^n dx$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f'(x) g(x) dx$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[f(x) g(x) - \int_0^R f(x) g'(x) dx \right]$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-e^{-x} x^n - \int_0^R -e^{-x} \cdot nx^{n-1} dx \right]$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} (-e^{-R} R^n) \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)}) - (-e^{-0} \cdot 0^n) + n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \quad (2 \text{ p. (yht. 3 p.)})$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} (-e^{-R} R^n) - 0 + n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

Koska eksponenttifunktio kasvaa nopeammin kuin mikään polynomi,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-R} R^n = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^n}{e^R} = 0. \quad (1 \text{ p. (yht. 4 p.)})$$

Täten saadaan

$$I_n = n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \quad (1 \text{ p. (yht. 5 p.)}) = n I_{n-1}, \quad (1 \text{ p. (yht. 6 p.)})$$

kun $n \geq 1$

2. Lasketaan I_0 epäoleellisen integraalin määritelmän mukaan:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-e^{-x} \right]_0^R \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} (-e^{-R} + e^0) \quad (1 \text{ p. (yht. 7 p.)}) \\ &= 0 + 1 \quad (2 \text{ p. (yht. 9 p.)}) \\ &= 1 \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)}) \end{aligned}$$

Sovelletaan palautuskaavaa $I_n = n I_{n-1}$ iteroiden:

$$I_1 = 1 \cdot I_0 = 1$$

$$I_2 = 2 \cdot I_1 = 2$$

$$I_3 = 3 \cdot I_2 = 6$$

$$I_4 = 4 \cdot I_3 = 24$$

$$I_5 = 5 \cdot I_4 = 120$$

(2 p. (yht. 12 p.))

Vastaus: $I_5 = 120$

Värilliset tekstit ovat lisäselyksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita!

12. Seitsensakarainen tähti (12 p.)

George R. R. Martinin luomaan fantasiamaailmaan sijoittuvassa Game of Thrones -sarjassa esiintyy seitsensakarainen tähti (katso oheinen kuva), jonka muotoa mallinnetaan tässä tehtävässä. Tähten seitsemän kärkipistettä asettuvat ympyrän kehälle tasavälein. Tähten sakarat muodostuvat seitsemästä paraabelin kaaresta niin, että jokaista sakaraa rajaa kaksi paraabelia. Yksittäinen paraabeli leikkaa ympyrän kahdessa tähden kärkipisteessä, joiden väliin jää yksi tähden kärkipiste. Leikkauspisteessä ympyrän tangentti ja paraabelin tangentti ovat kohtisuorassa. Tähten keskellä on ympyrä, joka sivuaa paraabeleja.

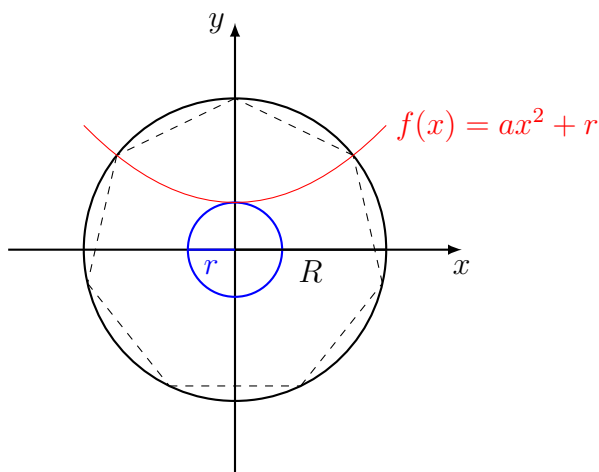


Määritä tähden keskellä olevan ympyrän ja tähden kärkien kautta kulkevan ympyrän säteiden suhde.

Ratkaisu.

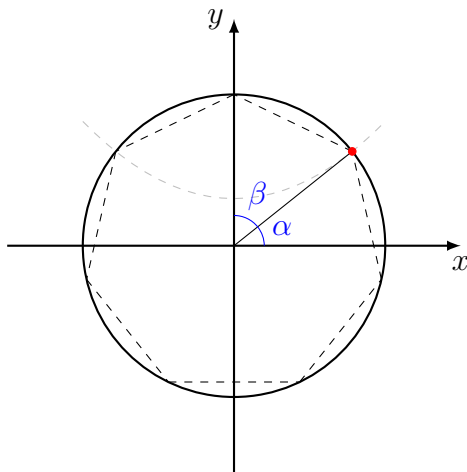
Olkoon tehtävän paraabelikuvion suurempi ympyrä origokeskinen R -säteinen ympyrä. Asetetaan tarkasteltava kuvio siten, että seitsemänkulmion yksi kärki on ylimpänä y -akselilla, jolloin yksi paraabeleista on y -akselin suhteen symmetrinen ja ylöspäin aukeava, ja leikkaa ympyrän seitsemänkulmion viereisissä kärjissä ylimmän kärjen vasemmalla ja oikealla puolella. Tämän paraabelin yhtälö on siten $y = f(x) = ax^2 + r$.

1 p. (yht. 1 p.)



Kuvion sisempi ympyrä on myös origokeskinen ja sivuaa paraabelia sen huipun kohdalla pisteessä $(0, r)$. 1 p. (yht. 2 p.)

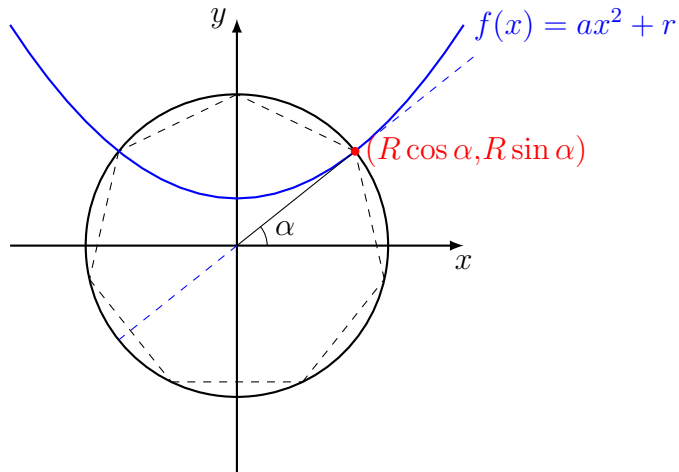
Tarkastellaan äsken määritellyn paraabelin ja R -säteisen origokeskisen ympyrän ensimmäisessä neljänneksessä sijaitsevaa leikkauspistettä.



Säännöllisen seitsenkulmion pisteet ovat ympyrällä kulman $\frac{2\pi}{7}$ välein, joten ympyrän keskipisteen ja tarkasteltavan leikkauspisteen välisen säteen ja positiivisen y -akselin välinen kulma on siten $\beta = \frac{2\pi}{7}$. Tällöin tämän saman säteen ja positiivisen x -akselin välinen kulma on

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\pi}{2} - \beta \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7} \\ &= \frac{3\pi}{14}.\end{aligned}$$

Tarkasteltava ympyrän kehän piste on siten piste $(R \cos(\frac{3\pi}{14}), R \sin(\frac{3\pi}{14}))$. 2 p. (yht. 4 p.)
Tässä pisteessä ympyrän tangentti ja paraabelin tangentti ovat kohtisuorassa. Koska ympyrän tangentti ja ympyrän säde ovat kohtisuorassa, on tässä pisteessä siis paraabelin tangentti ympyrän säteen suuntainen.



Tässä pisteessä paraabelin tangentin suuntaisen suoran suuntakulma on α . Täten tämän suoran kulmakertoimen on oltava $\tan \alpha$. 2 p. (yht. 6 p.) Tämä on myös paraabelin derivaatan $f'(x) = 2ax$ arvo pisteessä $x = R \cos \alpha$ 1 p. (yht. 7 p.) eli

$$2aR \cos(\alpha) = \tan \alpha$$

$$a = \frac{\tan \alpha}{2R \cos \alpha} \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

Paraabeli kulkee pisteen $(R \cos(\alpha), R \sin(\alpha))$ kautta, joten

$$f(R \cos(\alpha)) = R \sin(\alpha)$$

$$a \cdot (R \cos(\alpha))^2 + r = R \sin(\alpha)$$

$$\frac{\tan \alpha}{2R \cos \alpha} \cdot (R \cos(\alpha))^2 + r = R \sin(\alpha) \quad \text{2 p. (yht. 10 p.)}$$

$$r = R \sin(\alpha) - \frac{\tan \alpha}{2R \cos \alpha} \cdot (R \cos(\alpha))^2$$

$$\begin{aligned}
&= R \sin(\alpha) - \frac{\tan \alpha}{2} \cdot R \cos(\alpha) \\
&= R \sin(\alpha) - \frac{\sin \alpha}{2 \cos \alpha} \cdot R \cos(\alpha) \\
&= R \sin(\alpha) - \frac{\sin \alpha}{2} \cdot R \\
&= R \left(\sin(\alpha) - \frac{\sin \alpha}{2} \right) \\
r &= R \frac{\sin \alpha}{2} \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}
\end{aligned}$$

Täten ympyröiden säteiden suhde on

$$\begin{aligned}
\frac{r}{R} &= \frac{R \frac{\sin \alpha}{2}}{R} \\
&= \frac{\sin \alpha}{2} \\
&= \frac{\sin \frac{3\pi}{14}}{2} \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}
\end{aligned}$$

Vastaus: Ympyröiden säteiden suhde on $\frac{\sin \frac{3\pi}{14}}{2}$.

Täysien pisteiden arvoisen ratkaisun ei tarvitse sisältää näin montaa näin tarkkaa kuvaa: yksi hahmotelma tilanteesta riittää selityksen tueksi.

Täydellisyyden vuoksi olemme näyttäneet, kuinka mielivaltaisen suuremman ympyrän säde R supistuu laskussa pois. YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 18.3.2026) suurempi ympyrä oli asetettu origokeskiseksi yksikköympyräksi, joten myös tällainen ratkaisu on täysien pisteiden arvoinen.

Värikkiset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita!

13. Ääriarvokohdat (12 p.)

Määritellään funktio $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla

$$f(x) = \int_0^x \sin(2\pi z^2) dz.$$

Missä kohdissa funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa?

Voit tutkia tilannetta ohjelmistojen avulla, mutta vastaus täytyy perustella täsmällisesti. Perusteluiksi eivät riitä ohjelmistolla lasketut integraalien likiarvot eikä fMax- tai fMin-käskyjen käyttäminen.

Ratkaisu.

$$f'(x) = \sin(2\pi x^2).$$

Etsitään derivaatan nollakohdat välillä $[0, 1]$. Ehto $\sin(2\pi x^2) = 0$ toteutuu, kun

$$2\pi x^2 = n\pi, \quad \text{missä } n \text{ on epänegatiivinen kokonaisluku}$$

$$x^2 = \frac{n}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Koska $x \in [0, 1]$, täytyy olla $0 \leq \frac{n}{2} \leq 1$ eli $n \leq 2$. Ratkaisut ovat

$$n = 0: \quad x = 0,$$

$$n = 1: \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$n = 2: \quad x = 1.$$

Välillä $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ pätee $0 < 2\pi x^2 < \pi$, joten $\sin(2\pi x^2) > 0$. Funktio f on siis aidosti kasvava tällä välillä.

Välillä $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$ pätee $\pi < 2\pi x^2 < 2\pi$, joten $\sin(2\pi x^2) < 0$. Funktio f on siis aidosti vähenevä tällä välillä.

Kohdassa $x = 0$:

$$f(0) = \int_0^0 \sin(2\pi z^2) dz = 0. \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)})$$

Koska $f(x)$ kasvaa välillä $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ ja vähenee välillä $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$, funktion f täytyy saada suurin arvo kohdassa $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 2 p. (yht. 3 p.)

Pienimmän arvon löytämiseksi täytyy selvittää, onko $f(1)$ negatiivinen (jolloin pienin arvo olisi $f(1)$), nolla (jolloin pienin arvo olisi $f(0) = f(1) = 0$) vai positiivinen (jolloin pienin arvo olisi $f(0) = 0$). 1 p. (yht. 4 p.)

Kohdassa $x = 1$:

$$f(1) = \int_0^1 \sin(2\pi z^2) dz = \underbrace{\int_0^{1/\sqrt{2}} \sin(2\pi z^2) dz}_{>0} + \underbrace{\int_{1/\sqrt{2}}^1 \sin(2\pi z^2) dz}_{<0}.$$

Arvioidaan alaspäin integraalia $\int_0^{1/\sqrt{2}} \sin(2\pi z^2) dz$. Eräät integroitavan lausekkeen arvot välillä $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ saadaan seuraavien sinifunktion tunnettujen tarkkojen arvojen avulla:

$$z = \frac{1}{2\sqrt{3}} : \quad \sin(2\pi z^2) = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{1}{2\sqrt{2}} : \quad \sin(2\pi z^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} : \quad \sin(2\pi z^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} : \quad \sin(2\pi z^2) = \frac{1}{2}$$

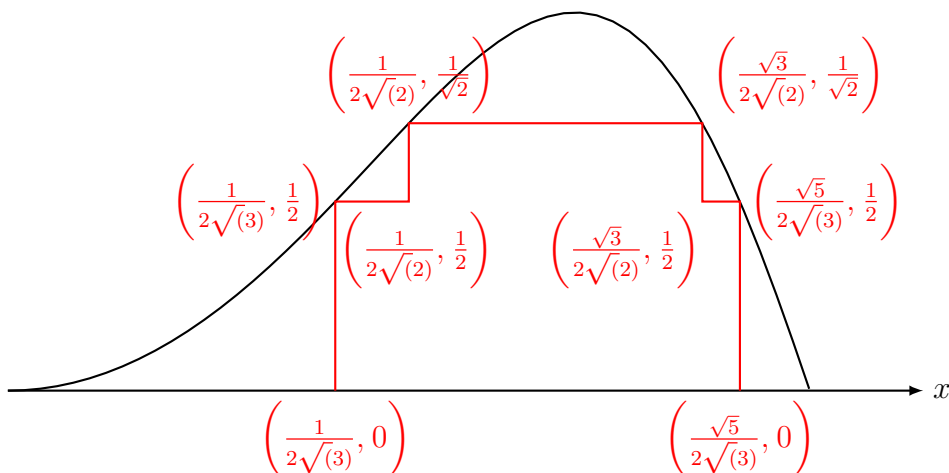
Näillä saadaan alarajaksi tarkasteltavalle integraalille

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & + \left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{1}{2} = 0,232014 \dots > 0,232 \end{aligned}$$

jolloin

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \sin(2\pi z^2) dz > 0,232 \quad \text{3 p. (yht. 7 p.)}$$

Mallikuva ensimmäisen integraalin alarajasta (ei vaadita ratkaisussa, jos selitetty hyvin):



Arvioidaan seuraavaksi alaspäin integraalia $\int_{1/\sqrt{2}}^1 \sin(2\pi z^2) dz$.

Integraali on negatiivinen, joten sitä alaspäin arvioimalla saatu negatiivinen arvo vastaa integroidun pinta-alan ylärajaa.

Eräät integroitavan lausekkeen arvot välillä $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$ saadaan seuraavien sinifunktion tunnettujen tarkkojen arvojen avulla:

$$z = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} : \quad \sin(2\pi z^2) = -\frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} : \quad \sin(2\pi z^2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} : \quad \sin(2\pi z^2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} : \quad \sin(2\pi z^2) = -\frac{1}{2}$$

Näillä saadaan alarajaksi tarkasteltavalle integraalille

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ & + \left(1 - \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{-1}{2} = -0,22898 \dots > -0,23 \end{aligned}$$

jolloin

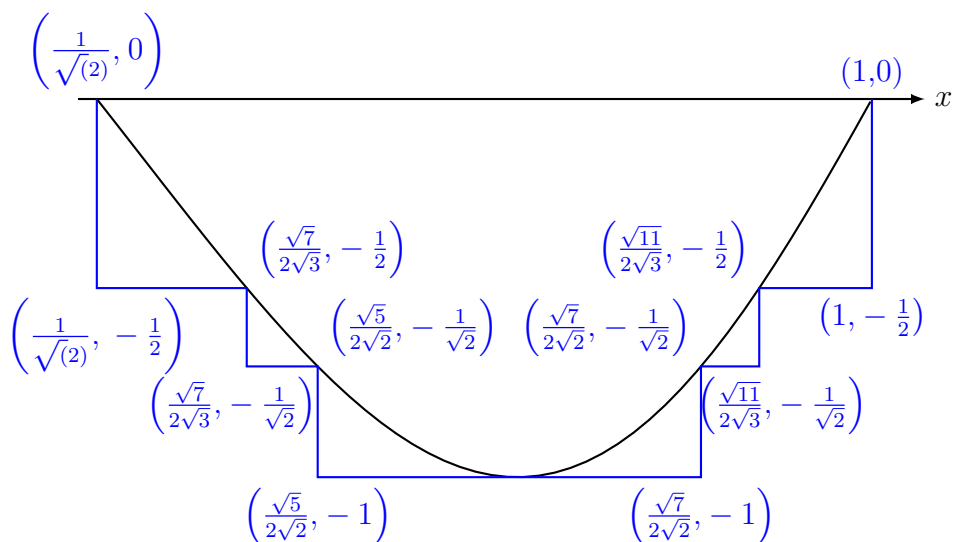
$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \sin(2\pi z^2) dz > -0,23 \quad \text{3 p. (yht. 10 p.)}$$

Täten

$$f(1) = \int_0^{1/\sqrt{2}} \sin(2\pi z^2) dz + \int_{1/\sqrt{2}}^1 \sin(2\pi z^2) dz > 0,232 - 0,23 > 0,$$

joten funktion pienin arvo on $f(0) = 0$. 2 p. (yht. 12 p.)

Mallikuva toisen integraalin alarajasta (ei vaadita ratkaisussa, jos selitetty hyvin):



Vastaus: Funktio saavuttaa suurimman arvonsa kohdassa $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja pienimmän arvonsa kohdassa $x = 0$.

Pisteytyksestä:

- Näytetty, että $f(0) = 0$ 1 p.
- Näytetty, että funktion suurin arvo on kohdassa $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 2 p.
- Näytetty, että pienimmän arvon on oltava kohdassa $x = 0$ tai $x = 1$ 1 p.
- Pätevä arvio integroitavalle alalle välillä $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ 3 p.
- Pätevä arvio integroitavalle alalle välillä $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$ 3 p.
- Näytetty pienimmän arvon olevan kohdassa $x = 0$ 2 p.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joiden kirjoittamista ei vaadita!