Lyhyt

MATEMATIIKKA

KEVÄT 2025

Malliratkaisut

60 % pk-seudun lukiolaisista opiskelee Mafynetillä yo-kirjoituksiin.

67 % lääketieteen valintakoeväylän paikoista Mafyn asiakkaille.

Suomen kattavimmat malliratkaisut
Opiskelijoiden ja opettajien käyttöön.

Mafy

PALVELUITAMME

- Mafynetti-oppimissovellus
- Valmennuskurssit:
    - Valintakokeeseen A
    - Valintakokeeseen B
    - Valintakokeeseen F
    - Ylioppilaskirjoituksiin

Mallivastaukset laatii Mafyn oppimateriaalitiimi

Tiimi kehittää lukion oppimateriaaleja.

Mallivastausten tekemiseen osallistuivat:

Sampsa Kurvinen
Saija Ojala
Matti Virolainen

Mafy

Käyttöehdot

https://mafy.fi/yhteydenotto

Koetehtävät

Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.

Linkit malliratkaisuihin

Malliratkaisut päivitetty 20. maaliskuuta 2025 klo 16:08.

1. Lyhyitä tehtäviä (12 p.)

Anna tässä tehtävässä pelkkä vastaus ilman perusteluja. Vastauslaatikkoon voi kirjoittaa vain yhden kokonaisluvun.

1.1 Ratkaise yhtälö $5x - 17 = 43$. (2 p.)

$x = \boxed{}$

1.2 Mikä on lausekkeen $-7x^2 + 2x(4x - 1)$ arvo kohdassa $x = 2$? (2 p.)

$\boxed{}$

1.3 Mikä on pisteiden $(-2, -2)$ ja $(1, 4)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin? (2 p.)

$\boxed{}$

1.4 Mikä on edellisen osatehtävän suoran vakiotermi? (2 p.)

$\boxed{}$

1.5 Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat koordinaatiston pisteissä $(1, 1)$ ja $(5, 1)$. Mikä on huippukulman x-koordinaatti? (2 p.)

$\boxed{}$

1.6 Mikä luku saadaan, kun ensimmäiset 50 positiivista paritonta kokonaislukua lasketaan yhteen, eli kuinka paljon on $1 + 3 + \cdots + 97 + 99$? (2 p.)

$\boxed{}$

Ratkaisu.

1.1 $x = \boxed{12}$ 2 p. (yht. 2 p.)

Lisäselitys:

$$
\begin{aligned}
5x - 17 &= 43 \quad \| + 17 \\
5x - 17 + 17 &= 43 + 17 \\
5x &= 60 \quad \| : 5 \\
\frac{5x}{5} &= \frac{60}{5} \\
x &= 12
\end{aligned}
$$

1.2 $\boxed{0}$ 2 p. (yht. 4 p.)

Lisäselitys:
Lasketaan lausekkeen

$$-7x^2 + 2x(4x - 1)$$

arvo, kun $x = 2$.

$$\begin{aligned} -7 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot (4 \cdot 2 - 1) &= -7 \cdot 4 + 4 \cdot (8 - 1) \\ &= -28 + 4 \cdot 7 \\ &= -28 + 28 \\ &= 0 \end{aligned}$$

1.3 $\boxed{2}$ 2 p. (yht. 6 p.)

Lisäselitys:

$$\begin{aligned} k &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{4 - (-2)}{1 - (-2)} \\ &= \frac{4 + 2}{1 + 2} \\ &= \frac{6}{3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

1.4 $\boxed{2}$ 2 p. (yht. 8 p.)

Lisäselitys:
Edellisen osatehtävän suoralla on kulmakerroin 2. Ratkaistaan suoran vakioter-

mi b suoran yhtälöstä käyttäen pistettä $(1,4)$.

$$\begin{aligned} y &= kx + b \qquad \| x = 1, y = 4, k = 2 \\ 4 &= 2 \cdot 1 + b \\ 4 &= 2 + b \qquad \| -2 \\ 4 - 2 &= b \\ b &= 2 \end{aligned}$$

Suoran vakiotermi on siis $b = 2$.

1.5 $\boxed{3}$ 2 p. (yht. 10 p.)

Lisäselitys:
Tasakylkisen kolmion kanta muodostuu pisteistä $(1,1)$ ja $(5,1)$. Koska kolmio on tasakylkinen ja sen kanta on vaakasuora, on korkeus pystysuora. Siten kolmion huippukulma on suoraan kannan keskipisteen yläpuolella, eli kolmion huippukulman x-koordinaatti on sama kuin kannan keskipisteellä. Lasketaan huipun x-koordinaatti.

$$\frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

1.6 $\boxed{2500}$ 2 p. (yht. 12 p.)

Lisäselitys:
Parittomat luvut muodostavat aritmeettisen lukujonon, jonka ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1$. Peräkkäisten jäsenten erotus on $d = 2$. Lisäksi viimeinen yhteenlaskettava on $a_{50} = 99$. Yhteenlaskettavia on $n = 50$. Lasketaan summa aritmeettisen summan kaavalla.

$$\begin{aligned} S_n &= n\frac{a_1 + a_n}{2} \qquad \| n = 50, a_1 = 1, a_n = 50 \\ S_{50} &= 50 \cdot \frac{1+99}{2} \\ &= 50 \cdot \frac{100}{2} \\ &= 50 \cdot 50 \\ &= 2500 \end{aligned}$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

2. Yhtälö ja lukujono (12 p.)

1. Ratkaise yhtälö $(x+3)(2x-1)=4$. (6 p.)
2. Aritmeettisen lukujonon ensimmäinen jäsen on 2025 ja viides jäsen on 1973. Mikä on lukujonon sadas jäsen? (6 p.)

Ratkaisu.

2.1

Ratkaisuvaihtoehto 1

$$
\begin{aligned}
(x+3)(2x-1) &= 4 \\
2x^2 - x + 6x - 3 &= 4 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)} \\
2x^2 + 5x - 3 &= 4 \quad \| -4 \\
2x^2 + 5x - 3 - 4 &= 0 \\
2x^2 + 5x - 7 &= 0 \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}
\end{aligned}
$$

Ratkaistaan yhtälö toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \| a = 2, b = 5, c = -7$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7)}}{2 \cdot 2}$$ 1 p. (yht. 3 p.)

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{4}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{4}$$

$$= \frac{-5 \pm 9}{4}$$ 1 p. (yht. 4 p.)

$$x = \frac{-5 + 9}{4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-5 - 9}{4}$$

$$x = \frac{4}{4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-14}{4}$$

$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-7}{2}$$ 2 p. (yht. 6 p.)

Vastaus: $x = 1$ tai $x = -\frac{7}{2}$

Hyväksytään myös vastaus $x = 1$ ja $x = -3{,}5$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

$$(x + 3)(2x - 1) = 4$$

$$2x^2 - x + 6x - 3 = 4$$ 1 p. (yht. 1 p.)

$$2x^2 + 5x - 3 = 4 \qquad \| - 4$$

$$2x^2 + 5x - 3 - 4 = 0$$

$$2x^2 + 5x - 7 = 0$$ 1 p. (yht. 2 p.)

Ratkaistaan yhtälö SpeedCrunchilla toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Kaavat löytyvät valikosta Näytä -> Kaavakirja -> Toisen asteen yhtälö.

```
a=2
= 2

b=5
= 5

c=-7
= -7

x1 = (-b + sqrt(b^2 - 4*a*c))/(2*a)
= 1

x2 = (-b - sqrt(b^2 - 4*a*c))/(2*a)
= -3,5
```

3 p. (yht. 5 p.)

Vastaus: $x = 1$ tai $x = -3{,}5$ 1 p. (yht. 6 p.)

2.2

Ratkaisuvaihtoehto 1

Aritmeettisen lukujonon yleisen jäsenen kaava on

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

missä d on peräkkäisten jäsenten välinen erotus.

Tiedetään, että $a_1 = 2025$ ja $a_5 = 1973$.

Lasketaan erotusluku d.

$$a_5 = a_1 + (5-1)d \qquad \| a_1 = 2025, a_5 = 1973$$

$$1973 = 2025 + 4d \qquad \| -2025$$ 2 p. (yht. 8 p.)

$$1973 - 2025 = 4d$$

$$-52 = 4d \qquad \| : 4$$

$$-13 = d$$

$$d = -13$$ 2 p. (yht. 10 p.)

Lasketaan lukujonon sadas jäsen:

$$a_{100} = a_1 + (100-1)d \qquad \| a_1 = 2025, d = -13$$

$$= 2025 + 99 \cdot (-13)$$ 1 p. (yht. 11 p.)

$$= 738$$ 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Lukujonon sadas jäsen on 738.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Tiedetään, että $a_1 = 2025$ ja $a_5 = 1973$. Lasketaan näiden erotus.

$$a_5 - a_1 = 1973 - 2025 = -52$$ 2 p. (yht. 8 p.)

Kun siirrytään ensimmäisestä jäsenestä viidenteen jäseneen, on ensimmäiseen jäseneen lisättävä 4 kertaa sama luku. Kahden peräkkäisen jäsenen välinen erotus on siis

$$\frac{-52}{4} = -13.$$ 2 p. (yht. 10 p.)

Sadas jäsen saadaan, kun ensimmäiseen jäseneen lisätään erotusluku 99 kertaa. Sadas jäsen on

$$a_{100} = 2025 + 99 \cdot (-13) = 738.$$ 2 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Lukujonon sadas jäsen on 738.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

3. Kokouspalkkio (12 p.)

Järjestön luottamushenkilöiden kokouspalkkioita on korotettu viimeksi vuonna 2009. Vuonna 2023 järjestö päättää korottaa kokouspalkkiotaan 30 eurosta 40 euroon. Ansiotasoindeksi oli $2\,717$ vuonna 2009 ja $3\,667$ vuonna 2023. Ylittääkö luottamushenkilöiden ansiokehitys tämän jälkeen yleisen ansiokehityksen? Kuinka suuri uuden kokouspalkkion pitäisi olla, jotta korotus noudattaisi yleistä ansiokehitystä?

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Vuoden 2009 ansiotasoindeksi on 2717 ja vuoden 2023 ansiotasoindeksi on 3667. Lasketaan yleisen ansiokehityksen prosentuaalinen kasvu.

$$\frac{3667-2717}{2717}$$ 2 p. (yht. 2 p.)

$$= 0{,}34965\ldots$$ 1 p. (yht. 3p.)

$$= 34{,}965\ldots\ \%$$ 1 p. (yht. 4 p.)

Luottamushenkilöiden kokouspalkkion korotus on 30 eurosta 40 euroon. Lasketaan, kuinka monta prosenttia kokouspalkkio kasvoi.

$$\frac{40-30}{30}$$ 1 p. (yht. 5 p.)

$$= 0{,}33333\ldots$$

$$= 33{,}333\ldots\ \%.$$ 1 p. (yht. 6 p.)

Koska luottamushenkilöiden kokouspalkkiot kasvoivat prosentuaalisesti vähemmän kuin yleinen ansiokehitys, on luottamushenkilöiden ansiokehitys alle yleisen ansiokehityksen. 2 p. (yht. 8 p.)

Lasketaan, kuinka paljon kokouspalkkion tulisi nousta, jotta se vastaisi yleistä ansiokehitystä. Kokouspalkkion tulisi olla $34{,}965\ldots\ \%$ suurempi, joten kokouspalkkion tulisi nousta

$$0{,}34965\ldots \cdot 30\,€$$ 1 p. (yht. 9 p.)

$$= 10{,}48951\ldots\ €.$$ 1 p. (yht. 10 p.)

Lasketaan, kuinka paljon uuden kokouspalkkion tulisi olla.

$$30\,€ + 10{,}48951\ldots\,€ = 40{,}48951\ldots\,€ \approx 40{,}49\,€$$ 2 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Luottamushenkilöiden ansiokehitys ei ylitä yleistä ansiokehitystä. Kokouspalkkion tulisi olla $40{,}49\,€$, jotta se noudattaisi yleistä ansiokehitystä.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Vuoden 2009 ansiotasoindeksi on 2717 ja vuoden 2023 ansiotasoindeksi on 3667. Lasketaan, kuinka monta prosenttia vuoden 2023 ansiotasoindeksi on vuoden 2009 ansiotasoindeksistä.

$$\frac{3667}{2717}$$ 1 p. (yht. 1 p.)

$$= 1{,}34965\ldots$$

$$= 134{,}965\ldots\ \%$$ 1 p. (yht. 2 p.)

Ansiotasoindeksi kasvoi

$$134{,}96503\ldots\ \% - 100\ \%$$ 1 p. (yht. 3 p.)

$$= 34{,}96503\ldots\ \%.$$ 1 p. (yht. 4 p.)

Luottamushenkilöiden kokouspalkkion korotus on 30 eurosta 40 euroon. Lasketaan, kuinka monta prosenttia vuoden 2023 kokouspalkkio on vuoden 2009 kokouspalkkiosta.

$$\frac{40}{30} = 1{,}33333\ldots = 133{,}333\ldots\ \%.$$ 1 p. (yht. 5 p.)

Kokouspalkkio kasvoi

$$133{,}3333\ldots\ \% - 100\ \% = 33{,}3333\ldots\ \%.$$ 1 p. (yht. 6 p.)

Koska luottamushenkilöiden kokouspalkkiot kasvoivat prosentuaalisesti vähemmän kuin yleinen ansiokehitys, on luottamushenkilöiden ansiokehitys alle yleisen ansiokehityksen. 2 p. (yht. 8 p.)

Jotta kokouspalkkion korotus vastaisi yleistä ansiokehitystä, tulisi uuden kokouspalkkion olla

$$\frac{3667}{2717} = 1{,}34965\ldots$$

-kertainen alkuperäiseen kokouspalkkioon verrattuna. Lasketaan, kuinka paljon uuden kokouspalkkion tulisi olla.

$$30\,€ \cdot 1{,}34965\ldots$$ 2 p. (yht. 10 p.)

$$= 40{,}4895\ldots\,€$$

$$\approx 40{,}49\,€$$ 2 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Luottamushenkilöiden ansiokehitys ei ylitä yleistä ansiokehitystä. Kokouspalkkion tulisi olla $40{,}49\,€$, jotta se noudattaisi yleistä ansiokehitystä.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

4. Yhtälötyyppejä (12 p.)

Lukiomatematiikassa on tärkeää osata erottaa *potenssiyhtälöt* ja *eksponenttiyhtälöt* toisistaan. Yksinkertaistettu potenssiyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $x^n = t$ ja yksinkertaistettu eksponenttiyhtälö muodossa $a^x = b$. Molemmissa esimerkkiyhtälöissä tuntematon muuttuja on x.

1. Anna esimerkki yksinkertaistettua muotoa olevasta potenssiyhtälöstä, jossa $n \geq 2$ ja $t \neq 0$ ja jolla on vain yksi ratkaisu. Ratkaise myös yhtälösi. (6 p.)

2. Anna esimerkki yksinkertaistettua muotoa olevasta eksponenttiyhtälöstä, jossa $a > 1$ ja $b > 0$. Ratkaise myös yhtälösi. (6 p.)

Ratkaisu.

4.1 Muodostetaan potenssiyhtälö $x^n = t$, jolle $n \geq 2$ ja $t \neq 0$, ja jolla on vain yksi ratkaisu. Valitaan siis sellainen n, joka on pariton kokonaisluku, koska tällöin saadaan vain yksi ratkaisu.

Valitaan esimerkiksi seuraava potenssiyhtälö:

$$x^3 = 8 \quad \boxed{\text{3 p. (yht. 3 p.)}}$$

Ratkaistaan tämä yhtälö:

$$\begin{aligned} x^3 &= 8 \\ x &= \sqrt[3]{8} \quad \boxed{\text{1 p. (yht. 4 p.)}} \\ x &= 2 \quad \boxed{\text{2 p. (yht. 6 p.)}} \end{aligned}$$

Tässä tapauksessa on vain yksi ratkaisu, $x = 2$.

4.2 Muodostetaan eksponenttiyhtälö $a^x = b$, jolle $a > 1$ ja $b > 0$.

Valitaan esimerkiksi eksponenttiyhtälö

$$2^x = 4. \quad \boxed{\text{3 p. (yht. 9 p.)}}$$

Tässä $a = 2 > 1$ ja $b = 4 > 0$.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Ratkaistaan yhtälö.

$$2^x = 4$$

$$2^x = 2^2$$ 1 p. (yht. 10 p.)

$$x = 2$$ 2 p. (yht. 12 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 2

Ratkaistaan yhtälö logaritmin avulla.

$$2^x = 4 \qquad \| a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x$$

$$x = \log_2(4)$$ 1 p. (yht. 10 p.)

$$x = 2$$ 2 p. (yht. 12 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

5. Pickin lause (12 p.)

Aineisto:

5. A Teksti: Tasokuvio A
5. B Teksti: Tasokuvio B

Pickin lause vuodelta 1899 liittyy tasogeometriaan ja monikulmioiden pinta-aloihin. Monikulmio on piirretty ruudukkoon niin, että sen kaikki kärkipisteet sijaitsevat viivojen risteyskohdissa eli hilapisteissä. Lauseen mukaan tietyntyyppisten monikulmioiden pinta-ala voidaan tällöin laskea kaavalla

$$(*) \qquad A = S + \frac{R}{2} - 1,$$

jossa A on monikulmion pinta-ala ruutuina, S on monikulmion sisälle jäävien hilapisteiden lukumäärä ja R on monikulmion reunalla olevien hilapisteiden lukumäärä.

Laske kuvioiden pinta-alat ja osoita, että kaava $(*)$ pitää paikkansa tasokuvion 5.A tapauksessa, mutta ei pidä paikkaansa tasokuvion 5.B tapauksessa.

Ratkaisu.

Kuvion 5.A sisällä on $S = 8$ hilapistettä ja reunalla $R = 12$ hilapistettä. Pickin lauseen mukaan kuvion 5.A pinta-ala on

$$\begin{aligned} S + \frac{R}{2} - 1 &= 8 + \frac{12}{2} - 1 \\ &= 8 + 6 - 1 \\ &= 13. \end{aligned}$$

1 p. (yht. 1 p.)

Kuvion 5.B sisällä on $S = 9$ hilapistettä ja reunalla $R = 14$ hilapistettä. Pickin lauseen mukaan kuvion 5.B pinta-ala on

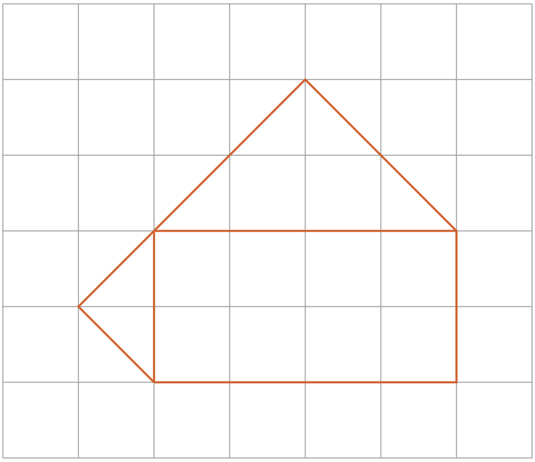
$$\begin{aligned} S + \frac{R}{2} - 1 &= 9 + \frac{14}{2} - 1 \\ &= 9 + 7 - 1 \\ &= 15. \end{aligned}$$

1 p. (yht. 2 p.)

Oikeat pinta-alat, ratkaisuvaihtoehto 1

Kuvio 5.A koostuu oikean alanurkan suorakulmiosta, vasemmalla olevasta kolmiosta ja ylhäällä olevasta kolmiosta. 1 p. (yht. 3 p.)

Mallikuva, jonka piirtämistä ei vaadita:



Suorakulmion pinta-ala on

$$A_{\text{suorakulmio}} = 4 \cdot 2 = 8.$$ 1 p. (yht. 4 p.)

Vasemmalla olevan kolmion kanta on 2 (pystysuorassa) ja korkeus 1 (vaakasuorassa). Vasemmalla olevan kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{vasen kolmio}} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1.$$ 1 p. (yht. 5 p.)

Ylhäällä olevan kolmion kanta on 4 (vaakasuorassa) ja korkeus 2 (pystysuorassa). Ylhäällä olevan kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{ylhäällä oleva kolmio}} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4.$$ 1 p. (yht. 6 p.)

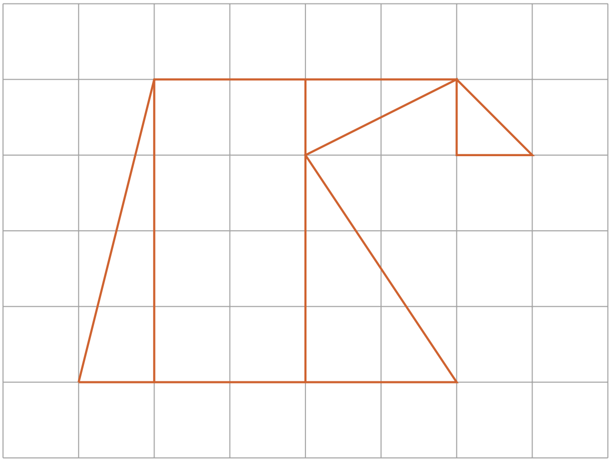
Kuvion 5.A pinta-ala on siis

$$A_{\text{suorakulmio}} + A_{\text{vasen kolmio}} + A_{\text{ylhäällä oleva kolmio}} = 8 + 1 + 4 = 13.$$ 7 p. (yht. 1 p.)

Pickin lauseen antama tulos on siis kuviolle 5.A oikea.

Kuvio 5.B koostuu suorakulmiosta ja neljästä suorakulmaisesta kolmiosta. 1 p. (yht. 8 p.)

Mallikuva, jonka piirtämistä ei vaadita:



Suorakulmion pinta-ala on

$$A_{\text{suorakulmio}} = 2 \cdot 4 = 8. \quad \boxed{\text{1 p. (yht. 9 p.)}}$$

Vasemmalla olevan kolmion kanta on 1 (vaakasuorassa) ja korkeus 4 (pystysuorassa). Vasemmalla olevan kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{vasen kolmio}} = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2. \quad \boxed{\text{1 p. (yht. 10 p.)}}$$

Oikealla alhaalla olevan kolmion kanta on 2 (vaakasuorassa) ja korkeus 3 (pystysuorassa). Oikealla alhaalla olevan kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{oikean alanurkan kolmio}} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3.$$

Ylhäällä keskellä olevan kolmion kanta on 2 (vaakasuorassa) ja korkeus 1 (pystysuorassa). Ylhäällä keskellä olevan kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{ylhäällä keskellä oleva kolmio}} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1.$$

Ylhäällä oikealla olevan kolmion kanta on 1 (vaakasuorassa) ja korkeus 1 (pystysuorassa). Ylhäällä oikealla olevan kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{ylhäällä oikealla oleva kolmio}} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Kuvion 5.B pinta-ala on siis

$$\begin{aligned}&A_{\text{suorakulmio}} + A_{\text{vasen kolmio}} + A_{\text{oikean alanurkan kolmio}} + A_{\text{ylhäällä keskellä oleva kolmio}} \\ &+ A_{\text{ylhäällä oikealla oleva kolmio}} \\ &= 8 + 2 + 3 + 1 + \frac{1}{2} \quad \boxed{\text{1 p. (yht. 11 p.)}} \\ &= 14\frac{1}{2}, \quad \boxed{\text{1 p. (yht. 12 p.)}}\end{aligned}$$

joten Pickin lauseen antama pinta-ala 15 on kuviolle 5.B väärä.

Oikeat pinta-alat, ratkaisuvaihtoehto 2

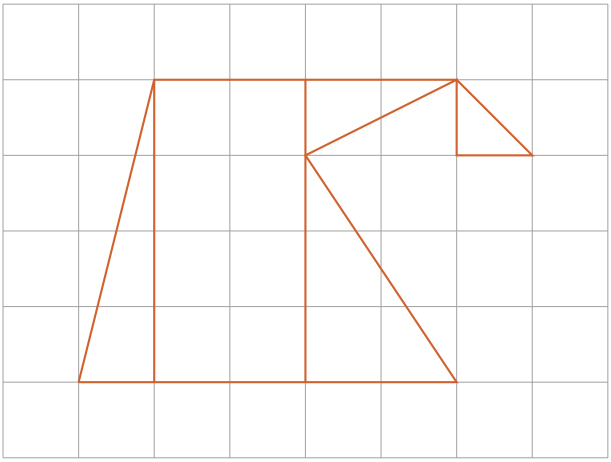
Kuvio 5.A koostuu kymmenestä kokonaisesta ruudusta ja kuudesta puolikkaasta ruudusta. 2 p. (yht. 4 p.) Kuvion 5.A pinta-ala on siis

$$10 + \frac{6}{2} = 10 + 3 = 13. \quad \boxed{\text{3 p. (yht. 7 p.)}}$$

Pickin lauseen antama tulos on siis kuviolle 5.A oikea.

Kuvio 5.B koostuu suorakulmiosta ja neljästä suorakulmaisesta kolmiosta. 1 p. (yht. 8 p.)

Mallikuva, jonka piirtämistä ei vaadita:



Suorakulmion pinta-ala on

$$A_{\text{suorakulmio}} = 2 \cdot 4 = 8. \quad \boxed{\text{1 p. (yht. 9 p.)}}$$

Vasemmalla olevan kolmion kanta on 1 (vaakasuorassa) ja korkeus 4 (pystysuorassa). Vasemmalla olevan kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{vasen kolmio}} = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2. \quad \boxed{\text{1 p. (yht. 10 p.)}}$$

Oikealla alhaalla olevan kolmion kanta on 2 (vaakasuorassa) ja korkeus 3 (pystysuorassa). Oikealla alhaalla olevan kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{oikean alanurkan kolmio}} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3.$$

Ylhäällä keskellä olevan kolmion kanta on 2 (vaakasuorassa) ja korkeus 1 (pystysuorassa). Ylhäällä keskellä olevan kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{ylhäällä keskellä oleva kolmio}} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1.$$

Ylhäällä oikealla olevan kolmion kanta on 1 (vaakasuorassa) ja korkeus 1 (pystysuorassa). Ylhäällä oikealla olevan kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{ylhäällä oikealla oleva kolmio}} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Kuvion 5.B pinta-ala on siis

$$\begin{aligned}
&A_{\text{suorakulmio}} + A_{\text{vasen kolmio}} + A_{\text{oikean alanurkan kolmio}} + A_{\text{ylhäällä keskellä oleva kolmio}} \\
&\quad + A_{\text{ylhäällä oikealla oleva kolmio}} \\
&= 8 + 2 + 3 + 1 + \frac{1}{2} \quad \boxed{\text{1 p. (yht. 11 p.)}} \\
&= 14\frac{1}{2}, \quad \boxed{\text{1 p. (yht. 12 p.)}}
\end{aligned}$$

joten Pickin lauseen antama pinta-ala 15 on kuviolle 5.B väärä.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

6. Klassikko (12 p.)

Määritä esimerkiksi derivaatan avulla polynomifunktion $p(x) = x^3 - x^2 + x$ suurin ja pienin arvo, kun $1 \leq x \leq 2$.

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Määritetään polynomifunktion

$$p(x) = x^3 - x^2 + x$$

suurin ja pienin arvo, kun $1 \leq x \leq 2$.

Kun funktiota p tarkastellaan suljetulla välillä $[a, b]$, suurin ja pienin arvo löytyvät joko välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista. 3 p. (yht. 3 p.)

Derivoidaan funktio.

$$p'(x) = 3x^{3-1} - 2x^{2-1} + 1x^{1-1}$$
$$= 3x^2 - 2x + 1$$ 3 p. (yht. 6 p.)

Pisteytyksestä: 1 piste kustakin oikeasta derivaattafunktion termistä.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$p'(x) = 0$$
$$3x^2 - 2x + 1 = 0$$ 1 p. (yht. 7 p.)

Ratkaistaan yhtälö toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \| a = 3, b = -2, c = 1$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$ 1 p. (yht. 8 p.)

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{6}$$ 1 p. (yht. 9 p.)

Huomataan, että yhtälöllä ei ole ratkaisua, koska negatiivisella luvulla -8 ei ole neliöjuurta. 1 p. (yht. 10 p.)

Lasketaan funktion arvot suljetun välin päätepisteissä $x = 1$ ja $x = 2$.

$$p(1) = 1^3 - 1^2 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1,$$

$$p(2) = 2^3 - 2^2 + 2 = 8 - 4 + 2 = 6$$ 1 p. (yht. 11 p.)

Pienin arvo on siis 1 ja suurin arvo on 6. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Pienin arvo on 1 ja suurin arvo on 6.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Määritetään polynomifunktion

$$p(x) = x^3 - x^2 + x$$

suurin ja pienin arvo, kun $1 \leq x \leq 2$.

Kun funktiota p tarkastellaan suljetulla välillä $[a, b]$, suurin ja pienin arvo löytyvät joko välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista. 3 p. (yht. 3 p.)

Derivoidaan funktio.

$$p'(x) = 3x^{3-1} - 2x^{2-1} + 1x^{1-1}$$

$$= 3x^2 - 2x + 1$$ 3 p. (yht. 6 p.)

Pisteytyksestä: 1 piste kustakin oikeasta derivaattafunktion termistä.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$p'(x) = 0$$

$$3x^2 - 2x + 1 = 0$$ 1 p. (yht. 7 p.)

Tarkistetaan diskriminantin avulla, onko yllä olevalla yhtälöllä ratkaisuja.

$$D = b^2 - 4ac \qquad \| a = 3, b = -2, c = 1$$

$$= (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1$$ 1 p. (yht. 8 p.)

$$= 4 - 12$$

$$= -8$$

$$< 0$$ 1 p. (yht. 9 p.)

Koska diskriminantti on negatiivinen, yhtälöllä ei ole ratkaisuja, joten $p'(x) \neq 0$.
1 p. (yht. 10 p.)

Lasketaan funktion arvot suljetun välin päätepisteissä $x = 1$ ja $x = 2$.

$$p(1) = 1^3 - 1^2 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1,$$

$$p(2) = 2^3 - 2^2 + 2 = 8 - 4 + 2 = 6$$ 1 p. (yht. 11 p.)

Pienin arvo on siis 1 ja suurin arvo on 6. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Pienin arvo on 1 ja suurin arvo on 6.

Ratkaisuvaihtoehto 3

Määritetään polynomifunktion

$$p(x) = x^3 - x^2 + x$$

suurin ja pienin arvo, kun $1 \leq x \leq 2$.

Derivoidaan funktio.

$$p'(x) = 3x^{3-1} - 2x^{2-1} + 1x^{1-1}$$

$$= 3x^2 - 2x + 1$$ 3 p. (yht. 3 p.)

Pisteytyksestä: 1 piste kustakin oikeasta derivaattafunktion termistä.
Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$p'(x) = 0$$

$$3x^2 - 2x + 1 = 0$$ 1 p. (yht. 4 p.)

Ratkaistaan yhtälö toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \| a = 3, b = -2, c = 1$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$ 1 p. (yht. 5 p.)

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{6}$$ 1 p. (yht. 6 p.)

Huomataan, että yhtälöllä ei ole ratkaisua, koska negatiivisesta luvusta -8 ei voida ottaa neliöjuurta. 1 p. (yht. 7 p.)
Derivaatan

$$p'(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Koska derivaatalla ei ole nollakohtia, ovat derivaatan arvot positiivisia. 2 p. (yht. 9 p.) Näin ollen funktio p on kasvava, joten se saa pienimmän arvonsa välin alkupisteessä $x = 1$ ja suurimman arvonsa välin loppupisteessä $x = 2$. 1 p. (yht. 10 p.)

$$p(1) = 1^3 - 1^2 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1,$$

$$p(2) = 2^3 - 2^2 + 2 = 8 - 4 + 2 = 6$$ 1 p. (yht. 11 p.)

Pienin arvo on siis 1 ja suurin arvo on 6. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Pienin arvo on 1 ja suurin arvo on 6.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

7. Verrannollisuuksia (12 p.)

Täydennä virkkeet. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 1–2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p. Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvosteltavaksi, poista vastauksesi valitsemalla pudotusvalikosta tyhjä rivi.

7.1 Täydennä virkkeet. (3 p.)

Nopeus [ ] 1 p. aikaan, kun matka on vakio. Jos auto kulkee tietyn matkan 2 tunnissa nopeudella $75\,\mathrm{km/h}$, niin se kulkee saman matkan $1{,}5$ tunnissa nopeudella [ ] 2 p. $\mathrm{km/h}$.

Ensimmäisen vastauslaatikon vaihtoehdot: ”on suoraan verrannollinen”, ”on kääntäen verrannollinen”, ”ei ole suoraan eikä kääntäen verrannollinen”.

Toisen vastauslaatikon vaihtoehdot: ”60”, ”70”, ”80”, ”90”, ”100”, ”110”, ”120”, ”130”, ”140”, ”150”.

7.2 Täydennä virkkeet. (3 p.)

Tasasivuisen kolmion sivun pituus [ ] 1 p. sen pinta-alaan. Erään kolmion korkeus on $3\,\mathrm{cm}$ ja pinta-ala $8\,\mathrm{cm}^2$. Sen kanssa yhdenmuotoisen kolmion korkeus on $9\,\mathrm{cm}$ ja pinta-ala [ ] 2 p..

Ensimmäisen vastauslaatikon vaihtoehdot: ”on suoraan verrannollinen”, ”on kääntäen verrannollinen”, ”ei ole suoraan eikä kääntäen verrannollinen”.

Toisen vastauslaatikon vaihtoehdot: ”12”, ”24”, ”36”, ”48”, ”60”, ”72”, ”84”, ”96”, ”108”, ”120”.

7.3 Täydennä virkkeet. (3 p.)

Tuotteen hinta [ ] 1 p. siitä maksettavaan arvonlisäveroon. Jos 180 euroa maksavasta tuotteesta maksetaan $22{,}11$ euroa arvonlisäveroa, niin [ ] 2 p. euroa maksavasta tuotteesta maksetaan $29{,}48$ euroa arvonlisäveroa.

Ensimmäisen vastauslaatikon vaihtoehdot: ”on suoraan verrannollinen”, ”on kääntäen verrannollinen”, ”ei ole suoraan eikä kääntäen verrannollinen”.

Toisen vastauslaatikon vaihtoehdot: ”150”, ”160”, ”170”, ”180”, ”190”, ”200”, ”210”, ”220”, ”230”, ”240”.

7.4 Täydennä virkkeet. (3 p.)

Muuttujien X ja Y tulo XY on vakio, joten muuttujat X ja Y $\boxed{}$ 1 p.. Tiedetään, että kun $X = 5$, niin $Y = 7$. Tällöin $X = 10$, kun $Y = \boxed{}$ 2 p..

Ensimmäisen vastauslaatikon vaihtoehdot: "on suoraan verrannollinen", "on kääntäen verrannollinen", "ei ole suoraan eikä kääntäen verrannollinen".

Toisen vastauslaatikon vaihtoehdot: "$1{,}4$", "$3{,}5$", "7", "14", "28", "35".

Ratkaisu.

Vastaus:

7.1. on kääntäen verrannollinen 1 p. (yht. 1 p.), 100 2 p. (yht. 3 p.)

7.2. ei ole suoraan eikä kääntäen verrannollinen 1 p. (yht. 4 p.), 72 2 p. (yht. 6 p.)

7.3. on suoraan verrannollinen 1 p. (yht. 7 p.), 240 2 p. (yht. 9 p.)

7.4. ovat kääntäen verrannolliset 1 p. (yht. 10 p.), $3{,}5$ 2 p. (yht. 12 p.)

Näin vastaus saadaan:

7.1. Kun matka on vakio, niin nopeuden kaksinkertaistuessa aika puolittuu. Vastaavasti nopeuden pienentyessä kolmasosaan aika tulee kolminkertaiseksi alkuperäiseen nähden. Koska nopeus ja aika muuttuvat käänteisessä suhteessa, ne ovat kääntäen verrannollisia.

Kääntäen verrannollisten suureiden tulo on vakio. Muodostetaan yhtälö. Alkuperäinen aika on $2\,\mathrm{h}$, alkuperäinen nopeus $75\,\mathrm{km/h}$, uusi aika $1{,}5\,\mathrm{h}$ ja uusi nopeus on $x\,\mathrm{km/h}$.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 75 &= 1{,}5 \cdot x \\ 150 &= 1{,}5x \qquad \| : 1{,}5 \\ 100 &= x \\ x &= 100 \end{aligned}$$

Uusi nopeus on $100\,\mathrm{km/h}$.

7.2. Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö (toinen potenssi). Tasasivuiset kolmiot ovat kaikki keskenään yhdenmuotoisia, joten tasasivuisen kolmion pinta-ala on suoraan verrannollinen sen sivun pituuden neliöön eikä itse sivun pituuteen. Siten tasasivuisen kolmion pinta-ala ei ole suoraan eikä kääntäen verrannollinen sivun pituuteen.

Ensimmäisen tasasivuisen kolmion korkeus on $h_1 = 3\,\mathrm{cm}$ ja pinta-ala $A_1 = 8\,\mathrm{cm}^2$. Toisen tasasivuisen kolmion korkeus on $h_2 = 9\,\mathrm{cm}$ ja pinta-ala A_2. Ratkaistaan A_2.

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2$$

$$\frac{A_2}{8} = \left(\frac{9}{3}\right)^2$$

$$\frac{A_2}{8} = 3^2$$

$$\frac{A_2}{8} = 9 \qquad \| \cdot 8$$

$$A_2 = 9 \cdot 8$$

$$A_2 = 72$$

7.3. Kun tehtävä tulkitaan niin, että kyseessä on tietty tuote eikä kaksi tuotetta, joilla on mahdollisesti eri arvonlisäverokanta, pitää paikkansa, että tuotteesta maksetaan aina yhtä monta prosenttia arvonlisäveroa. Tällöin tuotteen hinnan ja arvonlisäveron määrän suhde on vakio, eli tuotteen hinta ja arvonlisäveron määrä ovat suoraan verrannollisia.

Jos 180 euroa maksavasta tuotteesta maksetaan $22{,}11$ euroa arvonlisäveroa ja x euroa maksavasta tuotteesta maksetaan $29{,}48$ euroa arvonlisäveroa, niin

$$\frac{180}{22{,}11} = \frac{x}{29{,}48} \qquad \| \cdot 29{,}48$$

$$29{,}48 \cdot \frac{180}{22{,}11} = x$$

$$x = 29{,}48 \cdot \frac{180}{22{,}11}$$

$$x = 240$$

Jos tehtävä tulkitaan niin, että kyseessä voi olla kaksi eri tuotetta, joilla on eri arvonlisäverokanta, ei tuotteen hinta ole suoraan verrannollinen arvonlisäveroon. Tätä tulkintaa ei alustavien hyvän vastauksen piirteiden (luettu 19.3.2025 kello 21.54) mukaan hyväksytä.

7.4. Suureet, joiden tulo on vakio, ovat kääntäen verrannolliset. Siten X ja Y ovat kääntäen verrannolliset.

Tiedetään, että kun $X = 5$, niin $Y = 7$. Suureiden tulo on siis $5 \cdot 7 = 35$. Ratkaistaan Y, kun $X = 10$.

$$\begin{aligned} 10 \cdot Y &= 35 \qquad || : 10 \\ Y &= 3{,}5 \end{aligned}$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

8. Superkuu (12 p.)

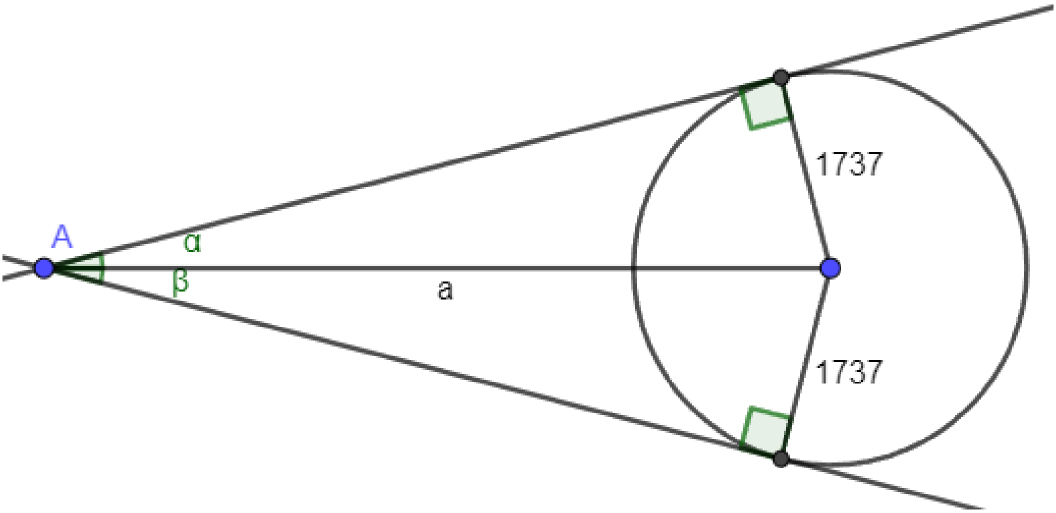
Kun Kuu on täydenkuun aikaan lähellä kiertoratansa Maata lähimpänä olevaa kohtaa (perigeum), sitä kutsutaan superkuuksi. Tämän vuosisadan suurin superkuu nähdään 6.12.2052, jolloin Kuun keskipisteen etäisyys Maan pinnalta on noin $350\,000$ kilometriä. Vastaava etäisyys Kuun kiertoradan kauimpana olevaan kohtaan (apogeum) on noin $401\,000$ kilometriä. Kuinka monta prosenttia suuremmassa kulmassa Kuu näkyy 6.12.2052 verrattuna pienimpään mahdolliseen kulmaan? Kuun säde on $1\,737$ kilometriä.

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Piirretään mallikuva niin, että pituuden yksikkönä on kilometri.

Alla oleva kuva on tehty GeoGebralla.



Piste A on Maan pinnalla. Etäisyys a on Maan pinnan pisteen ja Kuun keskipisteen välinen etäisyys eli vähintään $350\,000\,\mathrm{km}$, korkeintaan $401\,000\,\mathrm{km}$.

Ratkaistaan kulma α, kun Kuu on mahdollisimman kaukana, eli kun $a = 401\,000\,\mathrm{km}$. Kulman α vastainen kateetti on 1737, ja hypotenuusa on a. 1 p. (yht. 1 p.)

$$\sin\alpha = \frac{1737}{a}$$

$$\sin\alpha = \frac{1737}{401\,000}$$ 1 p. (yht. 2 p.)

$$\alpha = 0{,}248187\ldots^\circ$$ 1 p. (yht. 3 p.)

Kulman β on symmetrian vuoksi yhtä suuri kuin kulma α. 1 p. (yht. 4 p.)

Kulma, jossa Kuu näkyy, on tällöin

$$\alpha + \beta = 2 \cdot 0{,}248187\ldots^\circ = 0{,}496374\ldots^\circ.$$ 1 p. (yht. 5 p.)

Ratkaistaan kulma α, kun Kuu on mahdollisimman lähellä, eli kun $a = 350\,000\,\mathrm{km}$.

$$\sin\alpha = \frac{1737}{a}$$

$$\sin\alpha = \frac{1737}{350\,000}$$ 1 p. (yht. 6 p.)

$$\alpha = 0{,}284351\ldots^\circ$$ 1 p. (yht. 7 p.)

Kulma, jossa Kuu näkyy, on tällöin

$$2 \cdot 0{,}284351\ldots^\circ = 0{,}568703\ldots^\circ.$$ 1 p. (yht. 8 p.)

Lasketaan, kuinka monta prosenttia suurin mahdollinen kulma on suurempi kuin pienin mahdollinen kulma.

$$\frac{0{,}568703\ldots^\circ - 0{,}496374\ldots^\circ}{0{,}496374\ldots^\circ}$$ 2 p. (yht. 10 p.)

$$= \frac{0{,}072329\ldots^\circ}{0{,}496374\ldots^\circ}$$

$$= 0{,}145715\ldots$$ 1 p. (yht. 11 p.)

$$= 14{,}5715\ldots\,\%$$

$$\approx 15\,\%$$ 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: $15\,\%$

Myös $14{,}6\,\%$ hyväksytään vastaukseksi.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Voidaan ajatella, että muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat Kuun säde ja Maan pinnan ja Kuun keskipisteen etäisyys. Tämä ei ole aivan tarkkaa, mutta on riittävän tarkkaa. 3 p. (yht. 3 p.)

Merkitään kirjaimella α sen kulman puolikasta, jossa Kuu näkyy Maasta katsottuna.

Lasketaan kulma α, kun Kuu on lähimmällä etäisyydellä Maasta.

$$\tan\alpha = \frac{1737}{350\,000}$$ 2 p. (yht. 5 p.)

$$\alpha = 0{,}284348\ldots°$$ 1 p. (yht. 6 p.)

Lasketaan kulma α, kun Kuu on pisimmällä etäisyydellä Maasta.

$$\tan\alpha = \frac{1737}{401\,000}$$ 1 p. (yht. 7 p.)

$$\alpha = 0{,}248184\ldots°$$ 1 p. (yht. 8 p.)

Kuu näkyy kulmassa 2α molemmissa tapauksissa. Kahdella kertominen ei vaikuta kulmien suhteelliseen eroon, joten riitää laskea, kuinka monta prosenttia kulma $0{,}284348\ldots°$ on suurempi kuin kulma $0{,}248184\ldots°$. 2 p. (yht. 10 p.)

$$\frac{0{,}284348\ldots° - 0{,}248184\ldots°}{0{,}248184\ldots°}$$ 1 p. (yht. 11 p.)

$$= 0{,}145712\ldots$$

$$= 14,5712\ldots\ \%$$

$$\approx 15\,\%$$ 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: $15\,\%$

Myös $14{,}6\,\%$ hyväksytään vastaukseksi.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

9. Sähkösopimukset (12 p.)

Aineisto:

9. A Taulukko: Sähkönkulutus ja pörssisähkön hinta

Viima on hankkimassa uutta sähkösopimusta. Eräs sähköyhtiö tarjoaa seuraavia sopimuksia:

A. kiinteähintainen: $9{,}80\,\mathrm{snt/kWh} + 5{,}99\,\mathrm{e/kk}$

B. kiinteähintainen, jossa huomioidaan käyttövaikutus:
$8{,}99\,\mathrm{snt/kWh}$ + käyttövaikutus + $3{,}99\,\mathrm{e/kk}$.

Sähkösopimuksessa B esiintyvä käyttövaikutus (yksikkönä $\mathrm{snt/kWh}$) lasketaan kuukausittain kaavalla $\frac{X}{Y} - Z$. Tässä X lasketaan kuukauden ajalta tuntikohtaisten sähkönkulutusten s_k ja tuntikohtaisten pörssisähkön hintojen h_k avulla kaavalla

$$X = s_1 h_1 + s_2 h_2 + \cdots + s_{720} h_{720}.$$

Nimittäjä Y on kuukauden kokonaissähkönkulutus ja Z on tuntikohtaisten pörssisähkön hintojen h_k keskiarvo kuukauden ajalta. Käyttövaikutus voi olla myös negatiivinen.

Viima tarkastelee päätöksensä tueksi syyskuun sähkönkulutustaan. Taulukossa 9.A on esitetty syyskuun sähkönkulutus tunneittain sekä tunteja vastaavat pörssisähkön hinnat. Taulukossa otsikkoa seuraavalla rivillä esiintyvät siis muuttujien s_1 ja h_1 arvot, sitä seuraavalla s_2 ja h_2 ja niin edelleen.

Kummalla sopimuksella Viiman syyskuun sähkölasku olisi ollut pienempi?

Ratkaisu.

Tarkastellaan sopimukset A ja B erikseen.

Sopimus A:

Sähkön yksikköhinta on $9{,}80\,\mathrm{snt/kWh}$. Kokonaiskustannus muodostuu sähkön kulutuksesta kilowattitunteina ja kiinteästä kuukausimaksusta. Kuukausimaksu on $5{,}99$ € $= 599\,\mathrm{snt}$.

Lasketaan aineiston perusteella Viiman sähkönkulutus kuukauden ajalta.

	A	B	C
700	699	0,48	-0,00496
701	700	0,35	-0,00868
702	701	0,46	-0,00248
703	702	0,38	0
704	703	0,4	0,00124
705	704	0,63	0,00868
706	705	0,86	0,15376
707	706	0,96	0,24552
708	707	1,54	0,26536
709	708	1,29	0,186
710	709	0,71	0,18352
711	710	0,27	0,16616
712	711	0,26	0,1612
713	712	0,36	0,16616
714	713	0,78	0,20088
715	714	1,51	0,23312
716	715	0,78	0,38936
717	716	5,07	0,62
718	717	4,11	0,53692
719	718	1,55	0,19344
720	719	2,58	0,15996
721	720	1,4	0,0682
722		=SUMMA(B2:B721)	
723		525,44	

Viiman sähkönkulutus syyskuulta oli yhteensä $525{,}44\,\mathrm{kWh}$. 1 p. (yht. 1 p.)

Lasketaan sähkölaskun suuruus tällä sopimuksella.

$$\begin{aligned} 525{,}44\,\mathrm{kWh} \cdot 9{,}80\,\mathrm{snt/kWh} + 599\,\mathrm{snt} &= 5748{,}312\,\mathrm{snt} \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)} \\ &= 57{,}48312\,€ \\ &\approx 57{,}48\,€ \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)} \end{aligned}$$

Sopimuksella A Viiman sähkölasku olisi $57{,}48\,€$.

Sopimus B:

Sopimuksessa B huomioidaan käyttövaikutus. Käyttövaikutus lasketaan kaavalla

$$\frac{X}{Y} - Z,$$

jossa X lasketaan kuukauden ajalta tuntikohtaisten sähkönkulutusten ja tuntikohtaisten pörssisähkön hintojen avulla. Nimittäjä Y on kuukauden kokonaissähkönkulutus ja Z on tuntikohtaisten pörssisähkön hintojen keskiarvo kuukauden ajalta. Lasketaan nämä taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B	C	D
1	Tunnit	Sähkönkulutus kWh	Pörssisähkön hinta snt/kWh	sh (snt)
2	1	0,65	11,66344	=B2*C2
3	2	0,65	2,50356	=B3*C3
4	3	0,42	2,45272	=B4*C4
5	4	0,33	2,35228	=B5*C5
6	5	0,43	2,34112	=B6*C6
7	6	0,39	3,40628	=B7*C7
8	7	0,46	9,30744	=B8*C8
9	8	0,6	13,89916	=B9*C9
10	9	0,84	18,95464	=B10*C10
11	10	0,63	24,7938	=B11*C11
12	11	0,31	19,94168	=B12*C12
13	12	0,29	21,1854	=B13*C13
14	13	0,45	14,88	=B14*C14
15	14	0,42	11,41048	=B15*C15
16	15	0,7	11,0236	=B16*C16

	A	B	C	D
709	708	1,29	0,186	=B709*C709
710	709	0,71	0,18352	=B710*C710
711	710	0,27	0,16616	=B711*C711
712	711	0,26	0,1612	=B712*C712
713	712	0,36	0,16616	=B713*C713
714	713	0,78	0,20088	=B714*C714
715	714	1,51	0,23312	=B715*C715
716	715	0,78	0,38936	=B716*C716
717	716	5,07	0,62	=B717*C717
718	717	4,11	0,53692	=B718*C718
719	718	1,55	0,19344	=B719*C719
720	719	2,58	0,15996	=B720*C720
721	720	1,4	0,0682	=B721*C721
722		**kokonaissähkönkulutus (Y):**	**keskiarvo (Z):**	**summa (X):**
723		=SUMMA(B2:B721)	=KESKIARVO(C2:C721)	=SUMMA(D2:D721)

	A	B	C	D
709	708	1,29	0,186	0,23994
710	709	0,71	0,18352	0,1302992
711	710	0,27	0,16616	0,0448632
712	711	0,26	0,1612	0,041912
713	712	0,36	0,16616	0,0598176
714	713	0,78	0,20088	0,1566864
715	714	1,51	0,23312	0,3520112
716	715	0,78	0,38936	0,3037008
717	716	5,07	0,62	3,1434
718	717	4,11	0,53692	2,2067412
719	718	1,55	0,19344	0,299832
720	719	2,58	0,15996	0,4126968
721	720	1,4	0,0682	0,09548
722		**kokonaissähkönkulutus (Y):**	**keskiarvo (Z):**	**summa (X):**
723		525,44	4,08453072222222	2502,0138812

2 p. (yht. 5 p.)

Taulukkolaskentaohjelmalla saadaan, että

$$X = 2502{,}0138\ldots\ \mathrm{snt}$$
$$Y = 525{,}44\,\mathrm{kWh}$$
$$Z = 4{,}08453\ldots\ \mathrm{snt/kWh}$$

2 p. (yht. 7 p.)

Lasketaan käyttövaikutus.

$$\frac{X}{Y} - Z = \frac{2502{,}0138\ldots\ \mathrm{snt}}{525{,}44\,\mathrm{kWh}} - 4{,}08453\ldots\ \mathrm{snt/kWh}$$ 1 p. (yht. 8 p.)

$$= 0{,}67721\ldots\ \mathrm{snt/kWh}$$ 1 p. (yht. 9 p.)

Lasketaan sähkölaskun suuruus sopimuksen B mukaan, kun sopimus on kiinteähintainen, jossa huomioidaan käyttövaikutus: 8,99 snt/kWh + käyttövaikutus + 3,99 e/kk.

$$525{,}44\,\mathrm{kWh} \cdot 8{,}99\,\mathrm{snt/kWh} + 525{,}44\,\mathrm{kWh} \cdot 0{,}67721\ldots\ \mathrm{snt/kWh} + 399\,\mathrm{snt}$$ 1 p. (yht. 10 p.)

$$= 5478{,}543\ldots\ \mathrm{snt}$$
$$= 54{,}785\ldots\ €$$
$$\approx 54{,}79\,€$$ 1 p. (yht. 11 p.)

Sopimuksen A perusteella sähkölasku olisi ollut $57{,}48\,€$ ja sopimuksen B perusteella $54{,}79\,€$. Sopimuksella B sähkölasku olisi siis ollut pienempi. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Sopimuksella B sähkölasku olisi ollut pienempi.

GeoGebra 6 ei näyttänyt taulukosta kaikkia 720 riviä, sillä se ei osaa käsitellä näin isoja aineistoja. LibreOffice Calcilla kaikki tunnit näkyivät oikein.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

10. Koulutus (18 p,)

Aineisto:

10. A Kuva: Koulutettujen ihmisten osuus

Yksi kestävän kehityksen tavoitteista (SDG Tavoite 4.1, lyhenne sanoista Sustainable Development Goal) on tarjota riittävä koulutus mahdollisimman monille ihmisille. Eräs tapa arvioida tämän tavoitteen toteutumista on tarkastella niiden 25–29-vuotiaiden ihmisten prosenttiosuutta $p(t)$, jotka ovat opiskelleet vähintään 12 vuotta. Prosenttiosuuden $p(t)$ kehitys on esitetty kuvassa 10.A, jossa aika t on vuosiluku.

Logistinen malli on eräs tapa ennustaa funktion $p(t)$ arvoja. Sen mukaan

$$p(t_2) = p(t_1) + cp(t_1)(100 - p(t_1))(t_2 - t_1),$$

kun c on malliin liittyvä vakio.

1. Mallinnetaan ensin korkean tulotason maiden koulutettujen osuutta. Määritä vakion c arvo niin, että alkuarvolla $p(1970) = 54$ logistinen malli antaa tulokseksi $p(2018) = 84$. Nämä luvut on poimittu kuvan 10.A käyrästä, jonka otsikko on ”High-income”. (4 p.)

2. Koko maailman tapauksessa saadaan aikaväliä 1970–2018 käyttämällä vakion arvoksi $c = 0{,}000404$. Kuvassa 10.A tämä vastaa käyrää, jonka otsikko on ”Global”. Laske logistisen mallin mukainen vuoden 2030 prosenttiosuuden ennuste käyttämällä vain yhtä aikaväliä 2018–2030 ja kuvasta 10.A poimittua alkuarvoa. Miten hyvin tulos vastaa kuvan 10.A mukaista ennustetta vuodelle 2030? (6 p.)

3. Minä vuonna osatehtävän 10.2 logistisen mallin mukaan koko maailman koulutettujen osuus $p(t)$ saavuttaa $75\,\%$:n rajan? Tutki tilannetta taulukoimalla prosenttiosuuden kehitystä vuoden välein alkaen vuodesta 2018. (8 p.)

Ratkaisu.

1. Logistinen malli on

$$p(t_2) \;=\; p(t_1) \;+\; c\,p(t_1)\big(100 - p(t_1)\big)\;\big(t_2 - t_1\big),$$

jossa t on vuosiluku.

Ratkaisuvaihtoehto 1

$$p(1970) = 54$$
$$p(2018) = 84$$

Tarkasteltavan aikavälin pituus on

$$t_2 - t_1 = 2018 - 1970 = 48$$

vuotta. 1 p. (yht. 1 p.)

Tarkasteltavien arvojen erotus on

$$p(t_2) - p(t_1) = 84 - 54 = 30.$$ 1 p. (yht. 2 p.)

Lasketaan nyt vakio c logistisen mallin mukaan.

$$\begin{aligned}
p(t_2) &= p(t_1) + c\,p(t_1)\big(100 - p(t_1)\big)\,\big(t_2 - t_1\big) \qquad \| - p(t_1)\\
p(t_2) - p(t_1) &= c\,p(t_1)\big(100 - p(t_1)\big)\,\big(t_2 - t_1\big)\\
30 &= c \cdot 54 \cdot (100 - 54) \cdot 48\\
30 &= c \cdot 54 \cdot 46 \cdot 48 \qquad \| : 54 \cdot 46 \cdot 48\\
c &= \frac{30}{54 \cdot 46 \cdot 48}
\end{aligned}$$

1 p. (yht. 3 p.)

$$= 0{,}00025161\ldots$$
$$\approx 0{,}00025$$ 1 p. (yht. 4 p.)

Vastaus: $c \approx 0{,}00025$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Tehtävän mukaan $p(1970) = 54$ ja $p(2018) = 84$, jolloin

$$t_1 = 1970$$
$$t_2 = 2018$$
$$p(t_1) = 54$$
$$p(t_2) = 84.$$

Sijoitetaan nämä tiedot logistiseen malliin ja ratkaistaan vakio c.

$$p(t_2) = p(t_1) + c \cdot p(t_1)\big(100 - p(t_1)\big)\,\big(t_2 - t_1\big)$$

$$84 = 54 + c \cdot 54 \cdot \big(100 - 54\big) \cdot \big(2018 - 1970\big) \quad \boxed{\text{2 p. (yht. 2 p.)}}$$

$$84 = 54 + c \cdot 54 \cdot 46 \cdot 48$$

$$84 = 54 + c \cdot 119\,232 \qquad \| - 54$$

$$84 - 54 = 119\,232c$$

$$30 = 119\,232c \qquad \| : 119\,232 \quad \boxed{\text{1 p. (yht. 3 p.)}}$$

$$\begin{aligned} c &= \frac{30}{119\,232} \\ &= \frac{5}{19\,872} \\ &= 0{,}00025161\ldots \\ &\approx 0{,}00025 \quad \boxed{\text{1 p. (yht. 4 p.)}} \end{aligned}$$

Yhtälö voidaan ratkaista myös laskinohjelmalla.

Vastaus: $c \approx 0{,}00025$

2. Nyt vakion arvo on $c = 0{,}000404$. Tämä vastaa aineiston käyrää Global. Tämän käyrän perusteella voidaan lukea jokin alkutilanteen arvo eli vuotta 2018 vastaava arvo. Kuvaajasta (Global) nähdään, että $p(2018) = 51$. $\boxed{\text{1 p. (yht. 5 p.)}}$

Ratkaisuvaihtoehto 1

$$\begin{aligned} c &= 0{,}000404 \\ p(2018) &= 51 \\ t_2 &= 2030 \end{aligned}$$

Tarkasteltavan aikavälin pituus on

$$t_2 - t_1 = 2030 - 2018 = 12$$

vuotta. 1 p. (yht. 6 p.)

Lasketaan nyt $p(2030)$.

$$\begin{aligned} p(t_2) &= p(t_1) + c\, p(t_1)\big(100 - p(t_1)\big)\,\big(t_2 - t_1\big) \\ p(2030) &= p(2018) + 0{,}000404\ \cdot\ p(2018)\,\big(100 - p(2018)\big) \cdot 12 \\ &= 51 + 0{,}000404 \cdot 51 \cdot \big(100 - 51\big) \cdot 12 \quad \text{1p. (yht. 7 p.)} \\ &= 63{,}11515\ldots \\ &\approx 63 \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)} \end{aligned}$$

Logistisen mallin mukaan vuoden 2030 ennuste olisi $63\ \%$. Aineiston perusteella vuoden 2030 ennuste on $61\ \%$. Ennusteiden ero on noin 2 prosenttiyksikköä, joten mallin mukainen ennuste vastaa melko hyvin aineistossa esitettyä ennustetta. 1 p. (yht. 9 p.)

Toisaalta oikea muutos oli

$$61 - 51 = 10$$

prosenttiyksikköä. Tällöin 2 prosenttiyksikön ero vastaa noin

$$\frac{2}{10} \cdot 100\ \% = 20\ \%$$

poikkeamaa todelliseen muutokseen verrattuna. 1 p. (yht. 10 p.)

Vastaus: Logistisen mallin mukaan vuoden 2030 ennuste olisi $63\ \%$ ja tämä vastaa melko hyvin kuvan 10.A mukaista ennustetta.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Sijoitetaan logistiseen malliin seuraavat tiedot.

$$\begin{aligned} t_1 &= 2018 \\ t_2 &= 2030 \\ p(t_1) &= 51 \\ c &= 0{,}000404 \end{aligned}$$

Lasketaan logistisen mallin avulla arvo $p(2030)$.

$$p(t_2) = p(t_1) + c \cdot p(t_1)\big(100 - p(t_1)\big)\,(t_2 - t_1)$$

$$\begin{aligned} p(2030) &= p(2018) + 0{,}000404 \cdot p(2018)\big(100 - p(2018)\big)\big(2030 - 2018\big) \quad \boxed{\text{1 p. (yht. 6 p.)}} \\ &= 51 + 0{,}000404 \cdot 51 \cdot \big(100 - 51\big) \cdot \big(2030 - 2018\big) \quad \boxed{\text{1p. (yht. 7 p.)}} \\ &= 63{,}11515\ldots \\ &\approx 63 \quad \boxed{\text{1 p. (yht. 8 p.)}} \end{aligned}$$

Logistisen mallin mukaan vuoden 2030 ennuste olisi $63\ \%$. Aineiston perusteella vuoden 2030 ennuste on $61\ \%$. Ennusteiden ero on noin 2 prosenttiyksikköä, joten mallin mukainen ennuste vastaa melko hyvin aineistossa esitettyä ennustetta. $\boxed{\text{1 p. (yht. 9 p.)}}$

Lasketaan vielä, kuinka monta prosenttia suurempi mallin mukainen ennuste on kuin aineiston ennuste.

$$\frac{63{,}11515}{61} = 1{,}034674\ldots = 103{,}4674\ldots\ \%$$

Mallin mukainen ennuste on

$$103{,}4674\ldots\ \% - 100\ \% = 3{,}4674\ldots\ \% \approx 3{,}5\ \%$$

suurempi kuin aineiston ennuste. Myös prosentuaalinen ero mallien välillä on melko pieni, joten logistinen malli vastaa melko hyvin kuvan 10.A mukaista ennustetta. $\boxed{\text{1 p. (yht. 10 p.)}}$

Vastaus: Logistisen mallin mukaan vuoden 2030 ennuste olisi $63\ \%$ ja tämä vastaa melko hyvin kuvan 10.A mukaista ennustetta.

3. Selvitetään, minä vuonna koulutettujen osuus saavuttaa $75\ \%$ rajan. Nyt $c = 0{,}000404$ ja tarkastelu alkaa vuodesta 2018. Arvot halutaan vuoden välein taulukoimalla. Logistinen malli on muotoa

$$p(t+1) \;=\; p(t) + 0{,}000404 \cdot p(t)\,\big(100 - p(t)\big). \quad \boxed{\text{2 p. (yht. 12 p.)}}$$

Taulukko on esitetty alla. Lähtöarvona on käytetty $p(2018) = 51$.

	A	B
1	Vuosi	p(t) (%)
2	2018	51
3	2019	52,009596
4	2020	53,01796446
5	2021	54,02428478
6	2022	55,02774205
7	2023	56,02752966
8	2024	57,02285189
9	2025	58,01292643
10	2026	58,99698681
11	2027	59,97428472
12	2028	60,94409223
13	2029	61,90570387
14	2030	62,85843858
15	2031	63,80164144
16	2032	64,73468538
17	2033	65,65697255
18	2034	66,56793568
19	2035	67,46703909
20	2036	68,35377972
21	2037	69,22768778
22	2038	70,08832738
23	2039	70,93529685
24	2040	71,76822905
25	2041	72,5867913
26	2042	73,3906854
27	2043	74,17964723
28	2044	74,95344648
29	2045	75,71188598
30	2046	76,45480114

2 p. (yht. 14 p.)

Alla on esitetty, miten taulukkolaskentaohjelmalla on laskettu aina seuraavat arvot.

	A	B
1	Vuosi	p(t) (%)
2	2018	51
3	2019	=B2+0,000404*B2*(100-B2)
4	2020	=B3+0,000404*B3*(100-B3)
5	2021	=B4+0,000404*B4*(100-B4)
6	2022	=B5+0,000404*B5*(100-B5)
7	2023	=B6+0,000404*B6*(100-B6)
8	2024	=B7+0,000404*B7*(100-B7)
9	2025	=B8+0,000404*B8*(100-B8)
10	2026	=B9+0,000404*B9*(100-B9)
11	2027	=B10+0,000404*B10*(100-B10)
12	2028	=B11+0,000404*B11*(100-B11)
13	2029	=B12+0,000404*B12*(100-B12)
14	2030	=B13+0,000404*B13*(100-B13)
15	2031	=B14+0,000404*B14*(100-B14)
16	2032	=B15+0,000404*B15*(100-B15)
17	2033	=B16+0,000404*B16*(100-B16)

2 p. (yht. 16 p.)

Ensimmäinen vuosi, jolloin mallin mukaan ylittyy $75\ \%$, on vuosi 2045. 2 p. (yht. 18 p.)

Vastaus: Koko maailman koulutettujen osuus saavuttaa $75\ \%$:n rajan vuonna 2045.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

11. Avaruuslentoja, tekstiviestejä ja muuta mielenkiintoista (18 p.)

Aineisto:

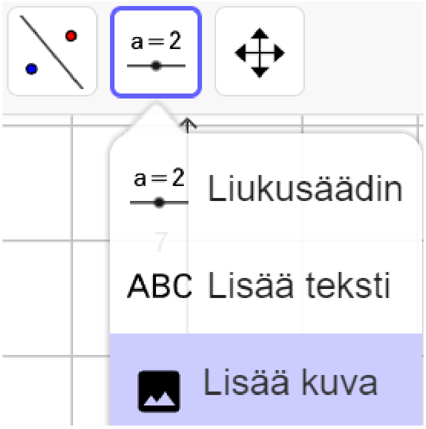
11. A Kuva: Tekstiviestien vastaanottajien lukumäärät ja kirjeiden postimaksut
11. B Kuva: Avaruuslentojen ja sosiologian tohtorintutkintojen lukumäärät

Kuvassa 11.A verrataan kirjeen postimaksua ja tekstiviestin vastaanottamiseen kykenevien yhdysvaltalaisten lukumäärää. Kuvassa 11.B verrataan kaupallisten avaruuslentojen ja sosiologian alan tohtorintutkintojen lukumäärää. Vastaa näiden aineistojen perusteella seuraaviin kysymyksiin. Tarvittaessa voit mitata kuvista lukuarvoja sopivassa ohjelmistossa.

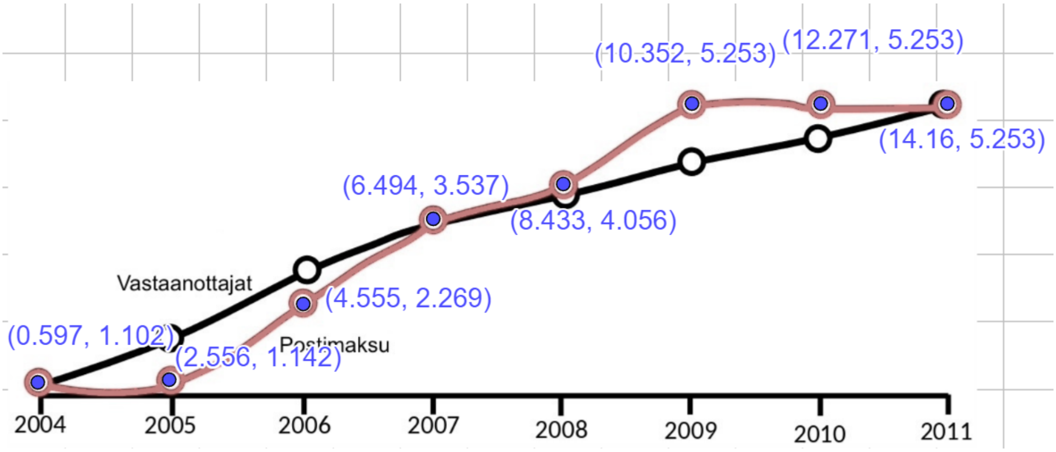
1. Minkä kahden peräkkäisen vuoden välillä kirjeen postimaksu muuttui eniten? (4 p.)
2. Minä vuonna kaupallisten avaruuslentojen lukumäärä on ollut lähimpänä vuosien 1997–2009 keskiarvoa? (8 p.)
3. Miten kuvissa 11.A ja 11.B näkyy muuttujien välinen korrelaatio? Kummassa tapauksessa on perustellumpaa arvioida, että ilmiöiden välillä on syy-seuraussuhde? (6 p.)

Ratkaisu.

1. Ladataan kuva 11.A GeoGebraan. Alla on kuva piirtoalueen valikosta, josta kuvan lisääminen löytyy. Valikon kuvaa ei kuulu liittää ratkaisuun.



Merkitään kuvan käyrälle postimaksuja kuvaavat pisteet kunkin vuoden kohdalle.



2 p. (yht. 2 p.)

Pisteiden koordinaatit riippuvat siitä, minkä kokoisena kuva on laitettu koordinaatistoon ja mihin kohtaan koordinaatistoa se on laitettu. Alla olevat koordinaatit ovat siis vain yksi esimerkki mahdollisista koordinaateista.

Postimaksu nousi eniten, kun pisteen y-koordinaatti muuttui eniten. Muutos oli suurin jonakin seuraavista:

- vuodesta 2005 vuoteen 2006
- vuodesta 2006 vuoteen 2007
- vuodesta 2008 vuoteen 2009

Lasketaan näitä muutoksia vastaavat y-koordinaatit.

Vuodesta 2005 vuoteen 2006:

$$2{,}269 - 1{,}142 = 1{,}127$$

Vuodesta 2006 vuoteen 2007:

$$3{,}537 - 2{,}269 = 1{,}268$$

Vuodesta 2008 vuoteen 2009:

$$5{,}253 - 4{,}056 = 1{,}197$$ 1 p. (yht. 3 p.)

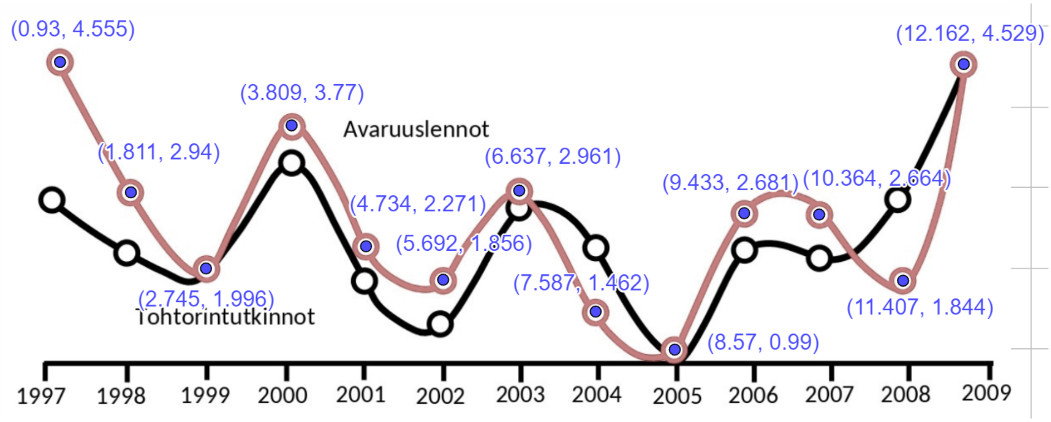
Muutos oli suurin vuodesta 2006 vuoteen 2007. 1 p. (yht. 4 p.)

Vastaus: vuodesta 2006 vuoteen 2007

2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Ladataan kuva 11.B GeoGebraan. Merkitään kuvan käyrälle avaruuslentojen määriä kuvaavat pisteet kunkin vuoden kohdalle. Muutetaan pisteiden asetuksista koordinaatit näkyviin.



4 p. (yht. 8 p.)

Määritetään kaupallisten avaruuslentojen vuotuisten lukumäärien keskiarvo vuosina $1997–2009$ taulukkolaskentaohjelmalla. Todellista yksikköä ei tunneta, koska kuvassa ei ole y-akselin asteikkoa. Lasketaan siten vain niillä arvoilla, jotka tulivat pisteiden y-koordinaateiksi. Alla oleva kuva on LibreOffice Calcista. Kuvissa on selvyyden vuoksi tehty myös sarake, jossa on vuosiluvut. Tämän sarakkeen tekemistä ei vaadita.

	A	B
1	Vuosi	Avaruuslentoja
2	=1997	4,555
3	=A2+1	2,94
4	=A3+1	1,996
5	=A4+1	3,77
6	=A5+1	2,271
7	=A6+1	1,856
8	=A7+1	2,961
9	=A8+1	1,462
10	=A9+1	0,99
11	=A10+1	2,681
12	=A11+1	2,664
13	=A12+1	1,844
14	=A13+1	4,529
15	Keskiarvo	=KESKIARVO(B2:B14)

	A	B
1	Vuosi	Avaruuslentoja
2	1997	4,555
3	1998	2,94
4	1999	1,996
5	2000	3,77
6	2001	2,271
7	2002	1,856
8	2003	2,961
9	2004	1,462
10	2005	0,99
11	2006	2,681
12	2007	2,664
13	2008	1,844
14	2009	4,529
15	Keskiarvo	2,65530769230769

2 p. (yht. 10 p.)

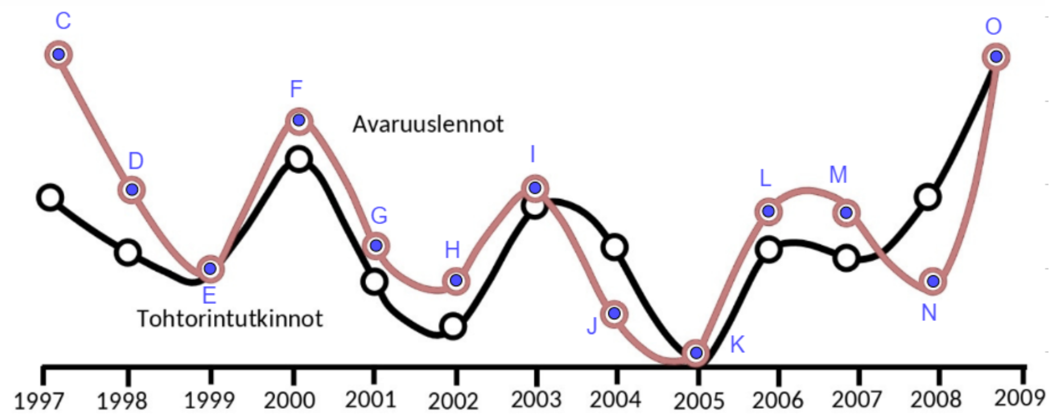
Avaruuslentojen määrän keskiarvo on $2{,}655\ldots$ yksikköä. Vuoden 2007 määrä $2{,}664$ on lähimpänä tätä määrää. 2 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: vuonna 2007

Kuvan epätarkkuudesta johtuen vastaukseksi hyväksytään myös vuosi 2006.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Ladataan kuva 11.B GeoGebraan.



2 p. (yht. 6 p.)

Lasketaan GeoGebralla pisteiden y-koordinaattien keskiarvo.

KeskiarvoY({C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O})

≈ **2.655**

4 p. (yht. 10 p.)

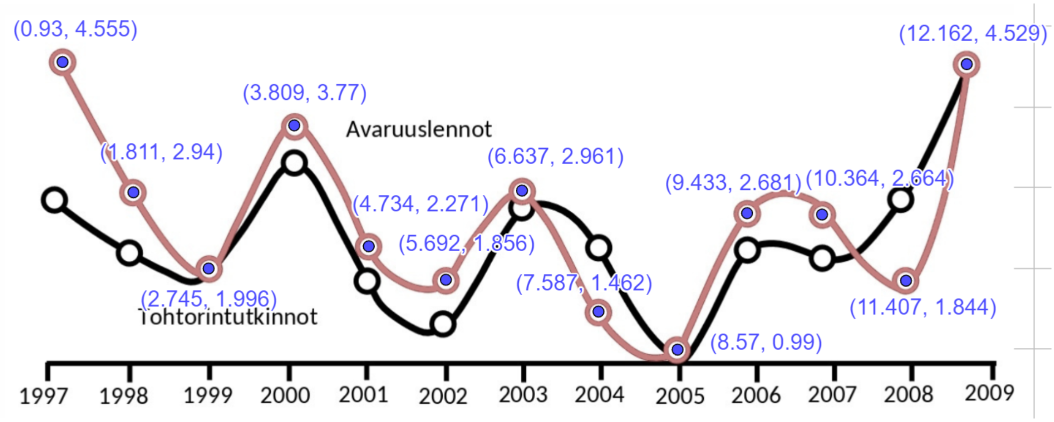
Avaruuslentojen määrän keskiarvo on $2{,}655$ yksikköä. Vuoden 2007 määrä $2{,}664$ on lähimpänä tätä määrää. 2 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: vuonna 2007

Kuvan epätarkkuudesta johtuen vastaukseksi hyväksytään myös vuosi 2006.

Ratkaisuvaihtoehto 3

Ladataan kuva 11.B GeoGebraan. Merkitään kuvan käyrälle avaruuslentojen määriä kuvaavat pisteet kunkin vuoden kohdalle. Muutetaan pisteiden asetuksista koordinaatit näkyviin.



4 p. (yht. 8 p.)

Lasketaan avaruuslentojen määrän keskiarvo.

$$\frac{4{,}555+2{,}94+1{,}996+3{,}77+2{,}271+1{,}856+2{,}961+1{,}462+\ldots+4{,}529}{13}$$

$$=\frac{34{,}519}{13}$$

$$=2{,}65530\ldots$$ 2 p. (yht. 10 p.)

Avaruuslentojen määrän keskiarvo on $2{,}655\ldots$ yksikköä. Vuoden 2007 määrä $2{,}664$ on lähimpänä tätä määrää. 2 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: vuonna 2007

Kuvan epätarkkuudesta johtuen vastaukseksi hyväksytään myös vuosi 2006.

3.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Muuttujien välinen korrelaatio näkyy kuvissa 11.A ja 11.B niin, että kuvaajat seuraavat toisiaan. Kun toinen kuvaaja nousee, niin toinenkin yleensä nousee, ja kun toinen kuvaaja alenee, niin toinenkin alenee. 3 p. (yht. 15 p.)

Siitä, että postimaksu nousee, saattaa seurata, että ihmiset kirjoittavat vähemmän kirjeitä ja opettelevat kirjoittamaan asiansa tekstiviesteillä. On myös mahdollista, että tekstiviestien yleistymisen myötä ihmiset lähettävät vähemmän postia, ja tällöin postilla tulee enemmän kustannuksia yksittäistä kirjettä kohti, mikä pakottaa postin nostamaan postimaksua. Tällöin tekstiviestien määrän kasvu aiheuttaisi postimaksun kasvamisen. 1 p. (yht. 16 p.)

Ei ole mitään selvää syytä sille, miksi sosiologian tohtorintutkintojen määrä kasvattaisi avaruuslentojen määrää tai avaruuslentojen määrä kasvattaisi sosiologian tohtorintutkintojen määrää. 1 p. (yht. 17 p.) Tohtorintutkintojen määrän voisi ajatella mahdollistavan suurempia avaruuslentojen määriä, jos tohtorintutkinnot olisivat fysiikan tohtorintutkintoja. Sosiologian opinnot eivät kuitenkaan valmenna rakentamaan avaruusaluksia. Ei ole myöskään uskottavaa, että avaruudessa käyneet ihmiset suorittaisivat avaruuslentovuonna paljon sosiologian tohtorintutkintoja, eikä tämä edes näkyisi tutkintojen määrässä, sillä avaruuslentäjiä on hyvin vähän verrattuna sosiologian opiskelijoihin.

Tohtorintutkintojen ja avaruuslentojen määrän välillä siis tuskin on syy-seuraussuhdetta kumpaankaan suuntaan, mutta tekstiviestien määrän ja postimaksun välillä mahdollisesti on syy-seuraussuhde.

Vastaus: On perustellumpaa arvioida, että syy-seuraussuhde on tekstiviestien ja postimaksujen välillä kuin tohtorintutkintojen ja avaruuslentojen välillä. 1 p. (yht. 18 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 2

Muuttujien välinen korrelaatio näkyy kuvissa 11.A ja 11.B niin, että kummassakin kuvassa muuttujat seuraavat toisiaan. Jos eri vuosien havainnot asetetaan xy-koordinaatistoon niin, että pisteen x-koordinaatti on jommassakummassa kuvassa vaaka-akselilla oleva muuttuja ja y-koordinaatti on (näkymättömällä) pystyakselilla oleva muuttuja, pisteet asettuvat likimain suoralle. 3 p. (yht. 15 p.)

Siitä, että postimaksu nousee, saattaa seurata, että ihmiset kirjoittavat vähemmän kirjeitä ja opettelevat kirjoittamaan asiansa tekstiviesteillä. On myös mahdollista, että tekstiviestien yleistymisen myötä ihmiset lähettävät vähemmän postia, ja tällöin postilla tulee enemmän kustannuksia yksittäistä kirjettä kohti, mikä pakottaa postin nostamaan postimaksua. Tällöin tekstiviestien määrän kasvu aiheuttaisi postimaksun kasvamisen. 1 p. (yht. 16 p.)

Ei ole mitään selvää syytä sille, miksi sosiologian tohtorintutkintojen määrä kasvattaisi avaruuslentojen määrää tai avaruuslentojen määrä kasvattaisi sosiologian tohtorintutkintojen määrää. 1 p. (yht. 17 p.)

Tohtorintutkintojen ja avaruuslentojen määrän välillä siis tuskin on syy-seuraussuhdetta kumpaankaan suuntaan, mutta tekstiviestien määrän ja postimaksun välillä mahdollisesti on syy-seuraussuhde.

Vastaus: On perustellumpaa arvioida, että syy-seuraussuhde on tekstiviestien ja postimaksujen välillä kuin tohtorintutkintojen ja avaruuslentojen välillä. 1 p. (yht. 18 p.)

Pisteytyksestä: Jos kohdissa 11.1 ja 11.2 on sanottu, ettei tiedetä, onko pystyakselin asteikko lineaarinen, ja että tämän vuoksi ei voida tietää vastausta, annetaan täydet pisteet.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!