

PITKÄ

MATEMATIIKKA

YO-MALLIVASTAUKSET

SYKSY 2024

SUOMEN KATTAVIMMAT MALLIVASTAUKSET

Kaikkien lukiolaisten ja
lukion opettajien
ilmaiseen käyttöön.

67 % LÄÄKETIETEEN ALOITUSPAIKOISTA

Mafyn opiskelijat veivät
67% lääketieteiden
pääsykoepaikoista
2024.

60 % PK-SEUDUN LUKIOLAISISTA

opiskelee Mafynetillä
yo-kirjoituksiin.

Mafy

PALVELUITAMME OVAT

- Mafynetti-oppimissovellus
- Lääketieteen valmennuskurssit
- Diplomi-insinööri- ja tietojenkäsittelytieteen valmennuskurssit
- Kauppatieteen valmennuskurssit
- Ylioppilaskirjoituksiin valmistavat kertauskurssit

MALLIVASTAUKSET LAATII MAFYN OPPIMATERIAALITIIMI

Mallivastausten tekemiseen osallistuivat Sakke Suomalainen, Linnea Tokola, Tuulia Tokola, Jaakko Alasuvanto ja Matti Virolainen.

KÄYTTÖEHDOT

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafy.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty.

Lukion opettajana voit käyttää tätä dokumenttia oppimateriaalina lukion kursseillasi. Nämä mallivastaukset ovat Mafy Oy:n omaisuutta.

Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	6
Ratkaisu tehtävään 3	9
Ratkaisu tehtävään 4	12
Ratkaisu tehtävään 5	16
Ratkaisu tehtävään 6	21
Ratkaisu tehtävään 7	23
Ratkaisu tehtävään 8	31
Ratkaisu tehtävään 9	34
Ratkaisu tehtävään 10	37
Ratkaisu tehtävään 11	41
Ratkaisu tehtävään 12	45
Ratkaisu tehtävään 13	48

Malliratkaisut päivitetty 27. syyskuuta 2024 klo. 12:11.

1. Peruslaskuja (12 p.)

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Jokaisen osatehtävän vastaus on kokonaisluku.

1.1 Laske. (2 p.)

Juna lähtee Oulusta kello 9.48 ja on perillä Helsingissä kello 15.25. Junamatkan kesto on ^{1 p.} tuntia ja ^{1 p.} minuuttia.

1.2 Laske. (2 p.)

Harrin palkka on 4 200 euroa kuukaudessa. Hänen palkastaan vähennetään 33 % ennakonpidätystä, joka sisältää pakolliset eläke- ja työttömyysvakuutusmaksut. Harrin nettopalkka euron tarkkuudella on euroa.

1.3 Laske. (2 p.)

Alma maksaa kuukaudessa 12 euron ennakkomaksun vedenkäytöstään. Kuuden kuukauden välein isännöitsijä lähettää todelliseen kulutukseen perustuvan tasauslaskun, jossa on jo huomioitu maksetut ennakkomaksut. Tammi-kesäkuussa Alman veden kulutus oli $17,012 \text{ m}^3$, ja veden hinta on $4,63 \text{ euroa/m}^3$. Alman tammi-kesäkuun tasauslaskun loppusumma kokonaisiksi euroiksi pyöristettynä on euroa.

1.4 Laske. (2 p.)

Kokeiden arvostelu kestää kolmelta opettajalta yhteensä 12 tuntia. Neljältä opettajalta samaan urakkaan menisi tuntia. Jokainen opettaja arvostelee kokeensa itsenäisesti ja samalla nopeudella.

1.5 Laske. (2 p.)

Yhtälön $|x - 1| = 3$ negatiivinen ratkaisu on $x = \text{}$.

1.6 Laske. (2 p.)

Vektoreiden $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ ja $\vec{b} = 2\vec{i} + 8\vec{j}$ pistetulo on $\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{}$.

Ratkaisu.

1.1 Laske. (2 p.)

Juna lähtee Oulusta kello 9.48 ja on perillä Helsingissä kello 15.25. Junamatkan kesto on ^{1 p.} tuntia ja ^{1 p.} minuuttia.

Lähtöaika: 09:48

Saapumisaika: 15:25

Lasketaan ensin, että kuluu 12 minuuttia, kunnes kello on 10:00. Tämän jälkeen kuluu 5 tuntia, että kello on 15:00. Tämän jälkeen kuluu vielä 25 minuuttia, että kello on 15:25. Yhteensä aikaa kuluu siis 5 tuntia ja 37 minuuttia.

1.2 Laske. (2 p.)

Harrin palkka on 4 200 euroa kuukaudessa. Hänen palkastaan vähennetään 33 % ennakonpidätystä, joka sisältää pakolliset eläke- ja työttömyysvakuutusmaksut. Harrin nettopalkka euron tarkkuudella on euroa.

Harrin nettopalkan voi laskea vähentämällä ennakonpidätyksen euroina bruttopalkasta. Lasketaan ennakonpidätys euroina seuraavasti:

$$33\% \cdot 4\,200 \text{ €} = 0,33 \cdot 4\,200 \text{ €} = 1\,386 \text{ €}$$

Harrin nettopalkka saadaan vähentämällä ennakonpidätys bruttopalkasta:

$$4\,200 \text{ €} - 1\,386 \text{ €} = 2\,814 \text{ €}$$

Harrin nettopalkka on siis 2 814 €.

1.3 Laske. (2 p.)

Alma maksaa kuukaudessa 12 euron ennakkomaksun vedenkäytöstään. Kuuden kuukauden välein isännöitsijä lähettää todelliseen kulutukseen perustuvan tasauslaskun, jossa on jo huomioitu maksetut ennakkomaksut. Tammi-kesäkuussa Alman veden kulutus oli $17,012 \text{ m}^3$, ja veden hinta on $4,63 \text{ euroa/m}^3$. Alman tammi-kesäkuun tasauslaskun loppusumma kokonaisiksi euroiksi pyöristettynä on euroa.

Lasketaan ensin vedenkäytön kokonaiskustannukset:

$$17,012 \text{ m}^3 \cdot 4,63 \text{ €/m}^3 = 78,76556 \text{ €}$$

Alma on maksanut ennakkomaksuja kuuden kuukauden ajalta:

$$12 \text{ €} / \text{kk} \cdot 6 \text{ kk} = 72 \text{ €}$$

Lasketaan tasauskaskun loppusumma:

$$78,76556 \text{ €} - 72 \text{ €} = 6,76556 \text{ €} \approx 7 \text{ €}$$

Alman tammi-kesäkuun tasauskaskun loppusumma on siis 7 euroa.

1.4 Laske. (2 p.)

Kokeiden arvostelu kestää kolmelta opettajalta yhteensä 12 tuntia. Neljältä opettajalta samaan urakkaan menisi tuntia. 2 p. (yht. 8 p.) Jokainen opettaja arvostelee kokeensa itsenäisesti ja samalla nopeudella.

Oletetaan, että opettajat arvostelevat kokeita yhtäaikaan. Työhön kuluva aika ja työntekijöiden määrä ovat keskenään kääntäen verrannolliset. Muodostetaan verranto:

$$12 \text{ h} \cdot 3 \text{ hlö} = x \cdot 4 \text{ hlö}$$

$$x = \frac{12 \text{ h} \cdot 3 \text{ hlö}}{4 \text{ hlö}}$$

$$x = 9 \text{ h}$$

1.5 Laske. (2 p.)

Yhtälön $|x - 1| = 3$ negatiivinen ratkaisu on $x = \text{input type="text" value="-2"}$. 2 p. (yht. 10 p.)

Ratkaistaan yhtälö $|x - 1| = 3$. Itseisarvoyhtälöllä $|x - 1| = 3$ on kaksi ratkaisua:

$$x - 1 = 3 \quad || + 1$$

$$x = 4$$

tai

$$x - 1 = -3 \quad || + 1$$

$$x = -2$$

Yhtälön negatiivinen ratkaisu on siis $x = -2$.

1.6 Laske. (2 p.)

Vektoreiden $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ ja $\vec{b} = 2\vec{i} + 8\vec{j}$ pistetulo on $\vec{a} \cdot \vec{b} =$. 2 p. (yht. 12 p.)

Pistetulon määritelmästä saadaan:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (2\vec{i} + 8\vec{j})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3 \cdot 2) + (4 \cdot 8)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 32$$

$$= 38$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

2. Derivaattoja (12 p.)

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 3 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvioitavaksi, poista vastauksesi valitsemalla pudotusvalikosta tyhjä rivi.

2.1 Määritä luvun $p'(1)$ tarkka arvo, kun $p(x) = -2x^5 + x^4 - 2$. (3 p.)

$$p'(1) = \boxed{}$$

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "-12", "-11", "-10", "-9", "-8", "-7", "-6", "-5", "-4", "-3", "-2", "-1", "0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9", "10", "11", "12".

2.2 Määritä derivaatta $f'(x)$, kun $f(x) = xe^x$. (3 p.)

$$f'(x) = \boxed{}$$

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " e^x ", " xe^x ", " x^2e^x ", " x^2e^{x-1} ", " $(x+1)e^x$ ", " $1+e^x$ ", " $x+e^x$ ", "ei mikään ylläolevista".

2.3 Määritä luvun $g'(-1)$ tarkka arvo, kun $g(x) = \ln(2x+3)$. (3 p.)

$$g'(-1) = \boxed{}$$

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "1", "2", "5", " $\ln 1$ ", " $\ln 5$ ", " $2 \ln 1$ ", " $2 \ln 5$ ", "ei mikään ylläolevista".

2.4 Määritä derivaatta $h'(x)$, kun $h(x) = \sin x + \cos(3x)$. 3 p.

$$h'(x) = \boxed{}$$

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $\cos(x) - \sin(3x)$ ", " $-\cos(x) + \sin(3x)$ ", " $\cos(x) - 3 \sin(3x)$ ", " $-\cos(x) + 3 \sin(3x)$ ", " $\cos(x) - \frac{1}{3} \sin(3x)$ ", " $-\cos(x) + \frac{1}{3} \sin(3x)$ ", " $\cos(x) - 3 \sin(x)$ ", " $-\cos(x) + 3 \sin(x)$ ", "ei mikään ylläolevista".

Ratkaisu.

1. $p'(1) = -6$ 3 p. (yht. 3 p.)

Miten vastaukseen päädyttiin:

$$p(x) = -2x^5 + x^4 - 2$$

Derivoidaan $p(x)$.

$$\begin{aligned} p'(x) &= -2 \cdot 5 \cdot x^4 + 4x^3 - 0 \\ &= -10x^4 + 4x^3 \end{aligned}$$

Lasketaan kysytty arvo.

$$\begin{aligned} p'(1) &= -10 \cdot 1^4 + 4 \cdot 1^3 \\ &= -10 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\ &= -10 + 4 \\ &= -6 \end{aligned}$$

2. $f'(x) = (x + 1)e^x$ 3 p. (yht. 6 p.)

Miten vastaukseen päädyttiin:

$$f(x) = xe^x$$

Merkitään $g(x) = x$ ja $h(x) = e^x$. Tällöin $f(x) = g(x)h(x)$, ja voidaan käyttää tulon derivointisääntöä

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x).$$

Funktion f derivaatta on siis

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1 + x)e^x = (x + 1)e^x.$$

3. $g'(-1) = 2$ 3 p. (yht. 9 p.)

Miten vastaukseen päädyttiin:

$$g(x) = \ln(2x + 3)$$

Merkitään $h(x) = \ln(x)$ ja $k(x) = 2x + 3$. Tällöin $g(x) = h(k(x))$, ja voidaan käyttää sisäfunktion derivointisääntöä

$$g'(x) = h'(k(x)) \cdot k'(x).$$

Funktion g derivaatta on siis

$$g'(x) = \frac{1}{2x+3} \cdot 2 = \frac{2}{2x+3}.$$

Lasketaan kysytty arvo.

$$g'(-1) = \frac{2}{2 \cdot (-1) + 3} = \frac{2}{-2 + 3} = \frac{2}{1} = 2.$$

4. $h'(x) = \cos(x) - 3 \sin(3x)$ 3 p. (yht. 12 p.)

Miten vastaukseen päädyttiin:

$$h(x) = \sin(x) + \cos(3x).$$

Derivoidaan $h(x)$. Käytetään jälkimmäisen termiin sisäfunktion derivointisääntöä.

$$h'(x) = \cos(x) - \sin(3x) \cdot 3 = \cos(x) - 3 \sin(3x).$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

3. Yhtälöt (12 p.)

Ratkaise muuttujien x ja y tarkat arvot seuraavista yhtälöistä.

1. Yhtälö $4 \cdot 8^x = \sqrt{2}$. (4 p.)
2. Yhtälö $\sin(6y - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$, kun $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$. (8 p.)

Ratkaisu.

- 3.1. Yhtälön voi ratkaista usealla eri tavalla. Tässä on esitetty kaksi hieman erilaista tapaa.

Ratkaisuvaihtoehto 1

$$4 \cdot 8^x = \sqrt{2}$$

$$2^2 \cdot (2^3)^x = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^2 \cdot 2^{3x} = 2^{\frac{1}{2}} \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

$$2^{2+3x} = 2^{\frac{1}{2}} \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

$$2 + 3x = \frac{1}{2} \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

$$3x = \frac{1}{2} - 2$$

$$3x = -\frac{3}{2}$$

$$x = \frac{-\frac{3}{2}}{3}$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Vastaus: $x = -\frac{1}{2}$

Ratkaisuvaihtoehto 2

$$4 \cdot 8^x = \sqrt{2}$$

$$8^x = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$8^x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4^2}} \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

$$8^x = \sqrt{\frac{2}{4^2}} \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

$$8^x = \sqrt{\frac{2}{16}}$$

$$8^x = \sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$8^x = 8^{-\frac{1}{2}}$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{2 p. (yht. 4 p.)}$$

Vastaus: $x = -\frac{1}{2}$

3.2. Ratkaistaan yhtälö, kun $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\sin\left(6y - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$6y - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{tai} \quad 6y - \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{3 p. (yht. 7 p.)}$$

$$6y = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \text{tai} \quad 6y = \pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$6y = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{tai} \quad 6y = \frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} + 2\pi n$$

$$6y = \frac{4\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{tai} \quad 6y = \frac{8\pi}{6} + 2\pi n$$

$$y = \frac{\frac{4\pi}{6} + 2\pi n}{6} \quad \text{tai} \quad y = \frac{\frac{8\pi}{6} + 2\pi n}{6}$$

$$y = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3} \quad \text{tai} \quad y = \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi n}{3} \quad \text{2 p. (yht. 9 p.)}$$

Etsitään ratkaisuista $y = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$ ne, jotka ovat kysytyllä välillä $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$y = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi \cdot (-1)}{3} = -\frac{2\pi}{9} < 0 \quad \text{ei kelpaa}$$

$$y = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi \cdot 0}{3} = \frac{\pi}{9} \quad \text{kelpaa}$$

$$y = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi \cdot 1}{3} = \frac{4\pi}{9} \quad \text{kelpaa}$$

$$y = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi \cdot 2}{3} = \frac{7\pi}{9} > \frac{\pi}{2} \quad \text{ei kelpaa}$$

Huomataan, että jos $n < -1$ tai $n > 2$, ratkaisut eivät myöskään ole kysytyllä välillä. Tehdään seuraavaksi sama ratkaisuille $y = \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$.

$$y = \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi \cdot (-1)}{3} = -\frac{\pi}{9} < 0 \quad \text{ei kelpaa}$$

$$y = \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi \cdot 0}{3} = \frac{2\pi}{9} \quad \text{kelpaa}$$

$$y = \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi \cdot 1}{3} = \frac{5\pi}{9} > \frac{\pi}{2} \quad \text{ei kelpaa}$$

2 p. (yht. 11 p.)

Vastaus: $y = \frac{\pi}{9}$ tai $y = \frac{4\pi}{9}$ tai $y = \frac{2\pi}{9}$. 1 p. (yht. 12 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

4. Integraali (12 p.)

Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ arvo $f(x)$ on luvun x kokonaislukuosa. Esimerkiksi $f(1) = 1$, $f(\frac{11}{5}) = 2$ ja $f(\pi) = 3$. Laske

$$\int_0^{10} f(x) dx.$$

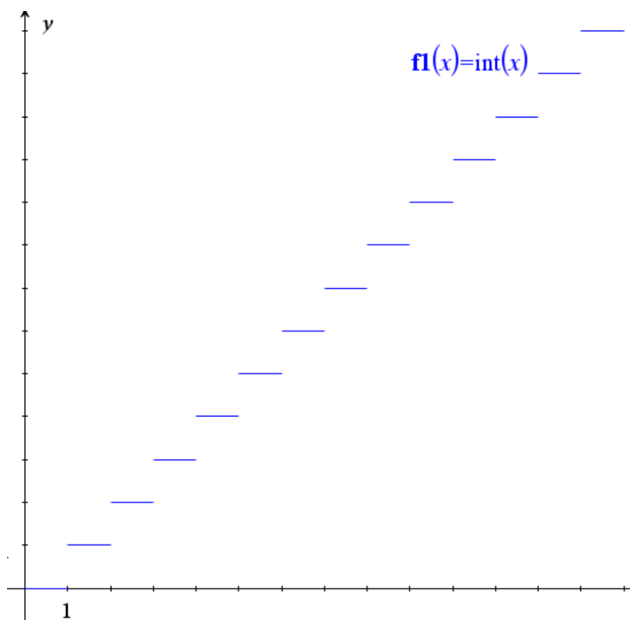
Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Integraalin

$$\int_0^{10} f(x) dx$$

arvo on funktion $f(x)$ ja x -akselin rajoittama pinta-ala välillä $0 \leq x \leq 10$. 2 p. (yht. 2 p.)
Piirretään kuvaaja $y = f(x)$ pinta-alan laskemisen avuksi.



2 p. (yht. 4 p.)

Havaitaan, että pinta-ala koostuu suorakulmioista, 2 p. (yht. 6 p.) joiden leveys on 1.
2 p. (yht. 8 p.) Lasketaan pinta-ala.

$$A = 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 9 \quad \text{2 p. (yht. 10 p.)}$$
$$= 45 \quad \text{2 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: 45

Pisteytyksestä:

- Selitys, että integraali on kuvaajan ja vaaka-akselin väliin jäävä pinta-ala 2 p.
- Pinta-alan muodostumisen selitys joko sanallisesti tai kuvaajan avulla 2 p.
- Pinta-alan muodostaminen suorakulmioista 2 p.
- Suorakulmioiden leveyden päättely oikein 2 p.
- Pinta-alan lausekkeen muodostaminen 2 p.
- Oikea vastaus 2 p.

Ratkaisuvaihtoehto 2

$$\begin{aligned}
\int_0^{10} f(x) \, dx &= \int_0^1 f(x) \, dx + \int_1^2 f(x) \, dx + \int_2^3 f(x) \, dx + \int_3^4 f(x) \, dx \\
&\quad + \int_4^5 f(x) \, dx + \int_5^6 f(x) \, dx + \int_6^7 f(x) \, dx + \int_7^8 f(x) \, dx \\
&\quad + \int_8^9 f(x) \, dx + \int_9^{10} f(x) \, dx \\
&= \int_0^1 0 \, dx + \int_1^2 1 \, dx + \int_2^3 2 \, dx + \int_3^4 3 \, dx \\
&\quad + \int_4^5 4 \, dx + \int_5^6 5 \, dx + \int_6^7 6 \, dx + \int_7^8 7 \, dx \\
&\quad + \int_8^9 8 \, dx + \int_9^{10} 9 \, dx \quad (6 \text{ p. (yht. 6 p.)}) \\
&= 0 + \int_1^2 x + \int_2^3 2x + \int_3^4 3x + \int_4^5 4x + \int_5^6 5x + \int_6^7 6x + \int_7^8 7x + \int_8^9 8x + \int_9^{10} 9x \quad (2 \text{ p. (yht. 8 p.)}) \\
&= (2 - 1) + (2 \cdot 3 - 2 \cdot 2) + (3 \cdot 4 - 3 \cdot 3) + (4 \cdot 5 - 4 \cdot 4) + (5 \cdot 6 - 5 \cdot 5) \\
&\quad + (6 \cdot 7 - 6 \cdot 6) + (7 \cdot 8 - 7 \cdot 7) + (8 \cdot 9 - 8 \cdot 8) + (9 \cdot 10 - 9 \cdot 9) \quad (2 \text{ p. (yht. 10 p.)}) \\
&= 45 \quad (2 \text{ p. (yht. 12 p.)})
\end{aligned}$$

Vastaus: 45

Pisteytyksestä:

- Integraalin lausekkeen muodostaminen tehtävänannon tietojen perusteella 6 p.

- Integraalin laskeminen oikein 4 p.
- Oikea vastaus 2 p.

Ratkaisuvaihtoehto 3

$$\begin{aligned}\int_0^{10} f(x) \, dx &= \sum_{k=0}^9 \int_k^{k+1} f(x) \, dx && \text{4 p. (yht. 4 p.)} \\&= \sum_{k=0}^9 \int_k^{k+1} k \, dx \\&= \sum_{k=0}^9 \left[kx \right]_k^{k+1} \\&= \sum_{k=0}^9 k(k+1) - k \cdot k \\&= \sum_{k=0}^9 k^2 + k - k^2 \\&= \sum_{k=0}^9 k && \text{4 p. (yht. 8 p.)} \\&= \frac{9 \cdot 10}{2} \quad (\text{aritmeettinen summa}) && \text{2 p. (yht. 10 p.)} \\&= 45 && \text{2 p. (yht. 12 p.)}\end{aligned}$$

Vastaus: 45

Pisteytyksestä:

- Integraalin lausekkeen muodostaminen summan avulla 4 p.
- Lausekkeen sieventäminen 4 p.
- Oikea vastaus 4 p.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

5. Summan arviointi (12 p.)

1. Osoita, että $\frac{k-1}{k2^k+1} < \frac{1}{2^k}$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k . (4 p.)
2. Osoita, että $\sum_{k=2}^n \frac{k-1}{k2^k+1} < \frac{1}{2}$ kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 2$. (8 p.)

Ratkaisu.

5.1.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Tässä, ja tämänlaisissa tehtävissä, kannattaa aloittaa lopputuloksesta, eli tehtävänannon todeksi osoitettavaa epäyhtälöä muokkaamalla. Näin tekemällä saat oivaltaa, miten haluttuun lopputulokseen päästään.

$$\begin{aligned}
 \frac{k-1}{k \cdot 2^k + 1} &< \frac{1}{2^k} \quad || \cdot (k \cdot 2^k + 1) \\
 \frac{k-1}{\cancel{k \cdot 2^k + 1}} \cdot \cancel{(k \cdot 2^k + 1)} &< \frac{1}{2^k} \cdot (k \cdot 2^k + 1) \\
 k-1 &< \frac{k \cdot 2^k + 1}{2^k} \quad || \cdot (2^k) \\
 k-1 \cdot (2^k) &< \frac{k \cdot 2^k + 1}{\cancel{2^k}} \cdot \cancel{(2^k)} \\
 k \cdot 2^k - 2^k &< k \cdot 2^k + 1 \quad || - k \cdot 2^k \\
 -2^k &< 1
 \end{aligned}$$

Näin saatu epäyhtälö on varmasti tosi, sillä toisella puolella on negatiivinen luku ja toisella puolella positiivinen luku.

Aloitetaan varmasti todesta epäyhtälöstä

$$-2^k < 1 \quad || + k \cdot 2^k \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

$$k \cdot 2^k - 2^k < k \cdot 2^k + 1 \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

Muokataan seuraavaksi näin saatua epäyhtälöä

$$k \cdot 2^k - 2^k < k \cdot 2^k + 1 \quad || : 2^k (> 0)$$

$$k - 1 < \frac{k \cdot 2^k + 1}{2^k} \quad || : (k \cdot 2^k + 1) (> 0)$$

$$\frac{k - 1}{k \cdot 2^k + 1} < \frac{1}{2^k} \quad \text{2 p. (yht. 4 p.)}$$

Nyt saatiin osoitettua se, mitä tehtävässä pitikin.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Arvioidaan tehtävänannon epäyhtälön vasenta puolta ylöspäin.

$$\frac{k - 1}{k2^k + 1} < \frac{k - 1}{k2^k} \quad \text{nimittäjä pienenee, luku kasvaa} \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)}$$

$$< \frac{k}{k2^k} \quad \text{osoittaja kasvaa, luku kasvaa} \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

$$= \frac{1}{2^k} \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Näin saatiin osoitettua, että tehtävänannon epäyhtälö pätee.

5.2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Aiemman tehtävän nojalla kaikille positiivisille kokonaisluvuille k pätee myös

$$\frac{k - 1}{k \cdot 2^k + 1} < \frac{1}{2^k} \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

Joten summalle pätee vastaavasti

$$\sum_{k=2}^n \frac{k-1}{k \cdot 2^k + 1} < \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k} \quad (2 \text{ p. (yht. 7 p.)})$$

Epäyhtälön oikea puoli on geometrinen summa, eli

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \quad (3 \text{ p. (yht. 10 p.)})$$

Summassa on yhteensä $n-1$ termiä, sillä sen ensimmäinen termi saadaan, kun $k=2$ ja viimeinen termi kun $k=n$. Ensimmäinen termi on $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

Arvioimalla ja sitten sieventämällä saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} &< \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)}) \\ &= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Yhdistämällä saadut tulokset voidaan näyttää, että

$$\sum_{k=2}^n \frac{k-1}{k \cdot 2^k + 1} < \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=2}^n \frac{k-1}{k \cdot 2^k + 1} < \frac{1}{2}, \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

eli se, mitä pitikin.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Aiemman tehtävän nojalla kaikille kokonaisluvuille k pätee myös

$$\frac{k-1}{k \cdot 2^k + 1} < \frac{1}{2^k}. \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

Joten summalle pätee vastaavasti

$$\sum_{k=2}^n \frac{k-1}{k \cdot 2^k + 1} < \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k}. \quad \text{2 p. (yht. 7 p.)}$$

Epäyhtälön oikea puoli on geometrinen summa. Geometrinen summa on osasumma geometrisesta sarjasta.

Varmasti siis

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k} < \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k} \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $n \geq 2$. Lasketaan epäyhtälön oikea puoli geometrisen sarjan kaavalla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \quad \text{3 p. (yht. 11 p.)}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Yhdistämällä saadut tulokset voidaan näyttää, että

$$\sum_{k=2}^n \frac{k-1}{k \cdot 2^k + 1} < \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k} < \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$$
$$\sum_{k=2}^n \frac{k-1}{k \cdot 2^k + 1} < \frac{1}{2}, \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $n \geq 2$, eli juurikin se, mitä piti osoittaa.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

6. Veteen putoava kivi (12 p.)

Mallinnetaan veteen pudonneen kiven aiheuttamia aaltoja funktiolla $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, missä $f(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, kun $(x, y) \neq (0, 0)$, ja $f(0, 0) = 1$.

1. Etsi kaksi muuta pistettä, joissa funktion arvo on sama kuin pisteessä $(3, 4)$. (6 p.)
2. Osoita, että jokaiselta xy -tason suoralta löytyy funktion nollakohta. (6 p.)

Ratkaisu.

6.1.

$$f(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

kun $(x, y) \neq (0, 0)$, ja $f(0, 0) = 1$.

Lausekkeesta huomataan, että funktion arvo on sama kaikissa pisteissä, joissa lausekkeen $x^2 + y^2$ arvo on sama. 1 p. (yht. 1 p.) Pisteelle $(3, 4)$ tämä arvo on $3^2 + 4^2 = 25$ 2 p. (yht. 3 p.). Huomataan, että esimerkiksi pisteissä $(4, 3)$ 1 p. (yht. 4 p.) ja $(5, 0)$ 1 p. (yht. 5 p.) lausekkeen $x^2 + y^2$ arvo on myös 25, sillä $4^2 + 3^2 = 25$ ja $5^2 + 0^2 = 25$ 1 p. (yht. 6 p.).

Vastaus: $(4, 3)$ ja $(5, 0)$.

Vastaukseksi kelpaavat myös mitkä vain muut kaksi pistettä, joissa funktion f arvo on sama kuin pisteessä $(3, 4)$.

- 6.2. Funktion $f(x, y)$ arvo on nolla, eli kyseessä on funktion f nollakohta, kun osoittaja $\sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ on nolla. Tällöin

$$\sin(\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \pi n \quad (n \text{ on kokonaisluku})$$

$$x^2 + y^2 = (\pi n)^2 \quad \text{2 p. (yht. 8 p.)}$$

Tämä yhtälö kuvaa ympyrää, jonka keskipiste on origo ja säde on πn , missä n on mikä vain (epänegatiivinen) kokonaisluku. Koska n voi olla kuinka suuri kokonaisluku hyvänsä, mille vain xy -tason suoralle löytyy sellainen n , että suora leikkaa πn -säteisen origokeskisen ympyrän 2 p. (yht. 10 p.). Näin ollen myös miltä tahansa xy -tason suoralta löytyy funktion $f(x,y)$ nollakohta 2 p. (yht. 12 p.).

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

7. Geometrinen juoksuharjoittelu (12 p.)

Aineisto:

7. A [Kuva: Juoksureitti](#)

Matematiikan opettaja testasi älykelloaan juoksulenkillä. Tuloksena oli 5,85 kilometrin pituinen reitti, joka on esitetty kuvassa [7.A](#). Opettaja haluaa arvioida reitin sisälle jäävien kaupunginosien pinta-alaa. Hän mallintaa reittiä kolmiona, jonka sivujen pituuksien suhteet ovat $6 : 7 : 9$ ja jonka piiri on 5,85 km.

1. Määritä mallikolmion suurin kulma asteina neljän merkitsevän numeron tarkkuudella. (6 p.)
2. Määritä mallikolmion pinta-ala hehtaareina. (6 p.)

Ratkaisu.

7.1.

Ratkaisuvaihtoehto 1:

Kolmion piiri on 5,85 (km), ja sivujen suhteet ovat $6 : 7 : 9$. Lasketaan ensin sivujen todelliset pituudet.

Olkoon kolmion sivujen pituudet a , b ja c siten, että

$$a : b : c = 6 : 7 : 9. \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

Piiri on $a + b + c = 5,85$. Sivujen suhteiden perusteella voidaan merkitä:

$$a = 6k, \quad b = 7k, \quad c = 9k$$

missä k on vakio. Ratkaistaan k .

$$6k + 7k + 9k = 5,85$$

$$22k = 5,85$$

$$k = \frac{5,85}{22}$$

Lasketaan sivujen todelliset pituudet:

$$a = 6 \cdot \frac{5,85}{22} = 1,59545 \dots$$

$$b = 7 \cdot \frac{5,85}{22} = 1,86136 \dots$$

$$c = 9 \cdot \frac{5,85}{22} = 2,39318 \dots$$

Suurin kulma on pisimmän sivun c kanssa vastakkainen kulma. Muodostetaan kosinilauseen avulla yhtälö ja ratkaistaan kysytty kulma γ .

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) \quad \text{3 p. (yht. 4 p.)}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}$$

$$\cos(\gamma) = 0,047619 \dots$$

$$\gamma = 87,27059 \dots^\circ \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

$$\gamma \approx 87,27^\circ \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

Pisteytyksestä: Kosinilauseesta saa pisteet vain, jos ainoa tuntematon siinä on kysytty kulma.

Vastaus: Mallikolmion suurin kulma on $87,27^\circ$.

Ratkaisuvaihtoehto 2:

Yhdenmuotoisten kolmioiden perusteella opettajan lenkkireitin kolmion suurin kulma on yhtä suuri kuin sellaisen kolmion, jonka sivujen pituudet ovat 6, 7 ja 9.

1 p. (yht. 1 p.)

Olkoon

$$a = 6$$

$$b = 7$$

$$c = 9$$

Sovelletaan kosinilauseetta. Suurin kulma on pisimmän sivun c kanssa vastakainen kulma. Muodostetaan kosinilauseeseen avulla yhtälö ja ratkaistaan kysytty kulma γ .

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) \quad \text{3 p. (yht. 4 p.)}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{9^2 - 6^2 - 7^2}{-2 \cdot 6 \cdot 7}$$

$$\cos(\gamma) = 0,047619 \dots$$

$$\gamma = 87,27059 \dots^\circ \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

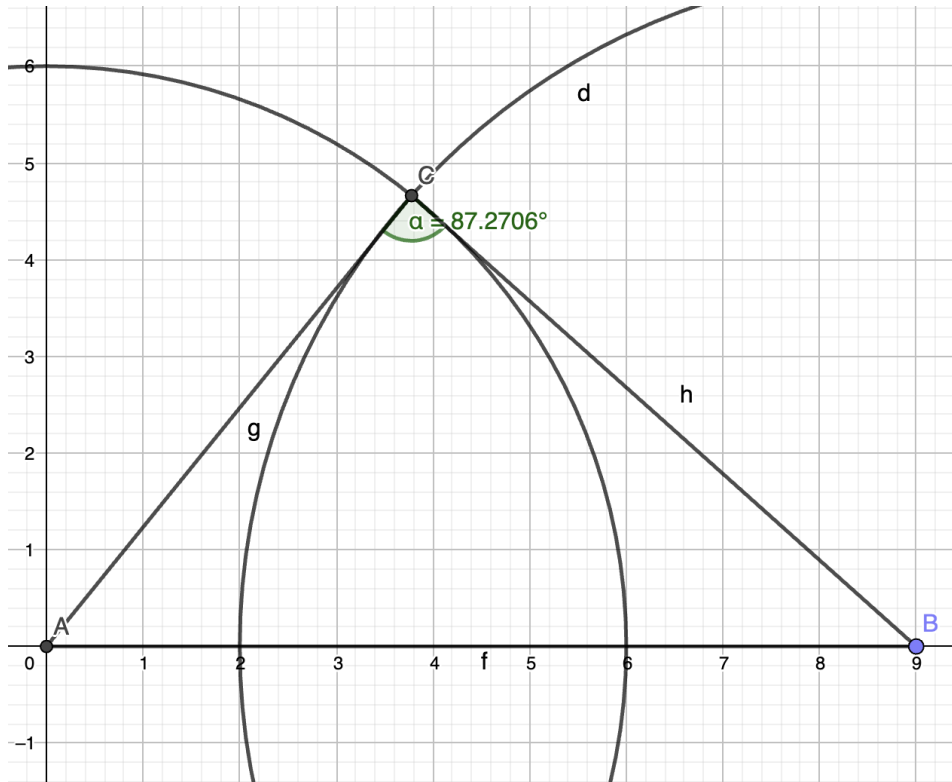
$$\gamma \approx 87,27^\circ \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

Pisteytyksestä: Kosinilauseesta saa pisteet vain, jos ainoa tuntematon siinä on kysytty kulma.

Vastaus: Mallikolmion suurin kulma on $87,27^\circ$.

Ratkaisuvaihtoehto 3:

Piirretään mallikuva esim. GeoGebralla. Piirretään ensin jana, jonka pituus on 9. Tämän jälkeen piirretään janan alkupisteeseen 6-säteinen ympyrä ja päätepisteeseen 7-säteinen ympyrä. Ympyröiden leikkauspisteeseen muodostuu kolmion kolmas kärki. Suurin kulma on pisintä sivua vastaava kulma. 1 p. (yht. 1 p.)
Mitataan kulmat kulmanmittaustyökalulla.



3 p. (yht. 4)

Kulmaksi mitataan $87,2706^\circ$ 1 p. (yht. 5 p.) $\approx 87,27^\circ$.

Vastaus: Mallikolmion suurin kulma on $87,27^\circ$. 1 p. (yht. 6 p.)

Pisteytyksestä:

- Tutkittu pisimmän sivun vastaista kulmaa 1 p.
- Piirretty kuva järkevällä tavalla 3 p.
- Pyöristämätön arvo oikein 1 p.
- Vastaus sopivalle tarkkuudelle pyöristettynä 1 p.

7.2.

Ratkaisuvaihtoehto 1:

Kahden lyhyemmän sivun pituudet ja niiden välinen kulma ovat edellisen kohdan perusteella

$$a = 1,59545 \dots$$

$$b = 1,86136 \dots$$

$$\gamma = 87,27059 \dots^\circ$$

2 p. (yht. 8 p.)

Lasketaan mallikolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2}ab \sin(\gamma)$$

1 p. (yht. 9 p.)

$$= 1,483176 \dots \text{ (km}^2\text{)}$$

1 p. (yht. 10 p.)

Yksi neliökilometri on

$$1 \text{ km}^2 = (10^3 \text{ m})^2 = 10^6 \text{ m}^2$$

ja yksi hehtaari on

$$1 \text{ ha} = (100 \text{ m})^2 = 10^4 \text{ m}^2.$$

Yksi neliökilometri on siis

$$1 \text{ km}^2 = \frac{10^6 \text{ m}^2}{10^4 \text{ m}^2} \text{ ha} = 100 \text{ ha.}$$

Täten mallikolmion pinta-ala hehtaareina on

$$A = 1,483176 \dots \cdot 100 \text{ ha}$$

$$= 148,3176 \dots \text{ ha}$$

1 p. (yht. 11 p.)

$$\approx 148 \text{ ha}$$

1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Mallikolmion pinta-ala on 148 hehtaaria.

Ratkaisuvaihtoehto 2:

Kolmion piiri ja kolmion sivujen pituudet edellisen kohdan perusteella ovat

$$p = 5,85 \text{ (km)}$$

$$a = 1,59545 \dots$$

$$b = 1,86136 \dots$$

$$c = 2,39318 \dots$$

2 p. (yht. 8 p.)

Lasketaan pinta-ala Heronin kaavalla.

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

1 p. (yht. 9 p.)

missä s on puolet kolmion piiristä eli

$$s = \frac{5,85 \text{ (km)}}{2}.$$

Pinta-alaksi saadaan

$$A = \sqrt{\frac{5,85}{2} \left(\frac{5,85}{2} - 1,59545 \dots \right) \left(\frac{5,85}{2} - 1,86136 \dots \right) \left(\frac{5,85}{2} - 2,39318 \dots \right)}$$

$$A = 1,483176 \dots \text{ (km}^2\text{)}$$

1 p. (yht. 10 p.)

Yksi neliökilometri on

$$1 \text{ km}^2 = (10^3 \text{ m})^2 = 10^6 \text{ m}^2$$

ja yksi hehtaari on

$$1 \text{ ha} = (100 \text{ m})^2 = 10^4 \text{ m}^2.$$

Yksi neliökilometri on siis

$$1 \text{ km}^2 = \frac{10^6 \text{ m}^2}{10^4 \text{ m}^2} \text{ ha} = 100 \text{ ha}.$$

Täten mallikolmion pinta-ala hehtaareina on

$$A = 1,483176 \dots \cdot 100 \text{ ha}$$

$$= 148,3176 \dots \text{ ha}$$

1 p. (yht. 11 p.)

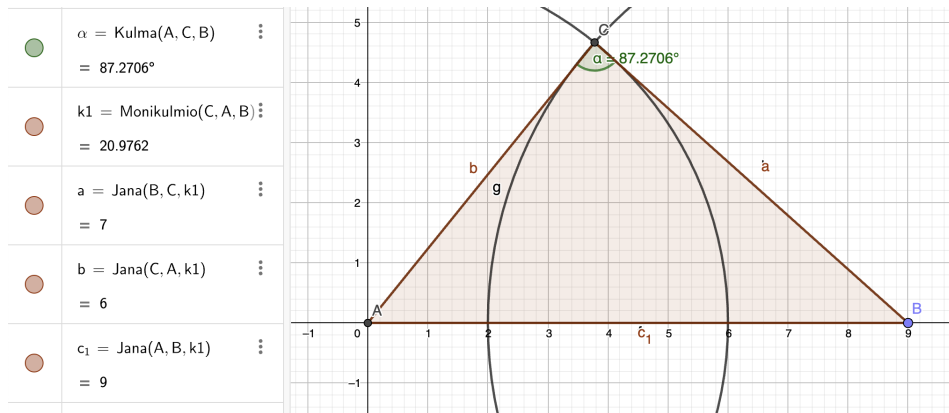
$$\approx 148 \text{ ha}$$

1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Mallikolmion pinta-ala on 148 hehtaaria.

Ratkaisuvaihtoehto 3:

Mitataan kolmion pinta-ala GeoGebralla.



Pinta-alaksi tulee 20,9762 ... yksikköä. 1 p. (yht. 7 p.)

Kuvan kolmion piiri on

$$p = 6 + 7 + 9 = 22 \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

ja tämä vastaa todellista kolmiota, jonka piiri on 5,85 (km). Näin ollen yksi pituusyksikkö kuvassa on

$$\frac{5,85 \text{ km}}{22} \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

ja siten yksi pinta-alayksikkö on

$$\left(\frac{5,85 \text{ km}}{22} \right)^2.$$

Todellinen pinta-ala on siis

$$20,9762 \dots \cdot \left(\frac{5,85(\text{ km})}{22} \right)^2 = 1,48317 \dots \text{ km}^2 \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

Yksi neliökilometri on

$$1 \text{ km}^2 = (10^3 \text{ m})^2 = 10^6 \text{ m}^2$$

ja yksi hehtaari on

$$1 \text{ ha} = (100 \text{ m})^2 = 10^4 \text{ m}^2.$$

Yksi neliökilometri on siis

$$1 \text{ km}^2 = \frac{10^6 \text{ m}^2}{10^4 \text{ m}^2} \text{ ha} = 100 \text{ ha}.$$

Täten mallikolmion pinta-ala hehtaareina on

$$\begin{aligned} A &= 1,483176 \dots \cdot 100 \text{ ha} \\ &= 148,3176 \dots \text{ ha} \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)} \\ &\approx 148 \text{ ha} \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)} \end{aligned}$$

Vastaus: Mallikolmion pinta-ala on 148 hehtaaria.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

8. Tikanheitto (12 p.)

Aineisto:

8. A [Kuva: Tikkataulu](#)

Ympyränmuotoisen tikkataulun keskellä on 10 pisteen arvoinen keskiympyrä, jonka säde on 2 cm. Sen ympärillä on 9 pisteen arvoinen rengas, jonka leveys on 2 cm. Tämän renkaan ympärillä on samanlevyinen 8 pisteen rengas, sen ympärillä samanlevyinen 7 pisteen rengas ja niin edelleen uloimpaan 1 pisteen renkaaseen saakka. Tikkataulussa on siis yhteensä 10 aluetta ja koko taulun säde on 20 cm, katso kuva [8.A](#).

1. Osoita laskemalla, että parillisten pistemäärien alueiden yhteenlaskettu pinta-ala on $180\pi \text{ cm}^2$. (4 p.)
2. Katri heittää tikkaa siten, että hän varmasti osuu tauluun, mutta voi osua mihin tahansa taulun kohtaan samalla todennäköisyydellä. Millä todennäköisyydellä Katrin tulos on parillinen, kun hän heittää kolme tikkaa ja niiden pisteet lasketaan yhteen? (8 p.)

Ratkaisu.

8.1. Tikkataulun parillisten pistealueiden säteet (senttimetreinä) ja pinta-alat (neliösenttimetreinä) ovat seuraavat:

- 10 pisteen keskimäinen ympyrä, säde 2:

$$A_{10} = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$$

- 8 pisteen rengas, ulkosäde 6 ja sisäsäde 4:

$$A_8 = \pi \cdot 6^2 - \pi \cdot 4^2 = 36\pi - 16\pi = 20\pi$$

- 6 pisteen rengas, ulkosäde 10 ja sisäsäde 8:

$$A_6 = \pi \cdot 10^2 - \pi \cdot 8^2 = 100\pi - 64\pi = 36\pi$$

- 4 pisteen rengas, ulkosäde 14 ja sisäsäde 12:

$$A_4 = \pi \cdot 14^2 - \pi \cdot 12^2 = 196\pi - 144\pi = 52\pi$$

- 2 pisteen rengas, ulkosäde 18 ja sisäsäde 16:

$$A_2 = \pi \cdot 18^2 - \pi \cdot 16^2 = 324\pi - 256\pi = 68\pi$$

2 p. (yht. 2 p.)

Yhteenlaskettu pinta-ala:

$$A_{\text{parilliset}} = 4\pi + 20\pi + 36\pi + 52\pi + 68\pi = 180\pi$$

neliösenttimetriä.

2 p. (yht. 4 p.)

8.2. Koko taulun pinta-ala (neliösenttimetreinä) on

$$A_{\text{kok}} = \pi \cdot 20^2 = 400\pi.$$

1 p. (yht. 5 p.)

Näin ollen parittomien pistealueiden yhteenlaskettu pinta-ala (neliösenttimetreinä) on

$$\begin{aligned} A_{\text{parittomat}} &= A_{\text{kok}} - A_{\text{parilliset}} \\ &= 400\pi - 180\pi \\ &= 220\pi. \end{aligned}$$

1 p. (yht. 6 p.)

Tehtävänannon mukaan Katri osuu yhtä todennäköisesti mihin vain kohtaan tikkataulua, ja osuu varmasti tikkatauluun. Näin ollen yhdellä heitolla parittoman ja parillisen pistemäärän todennäköisyydet ovat

$$\begin{aligned} P_{\text{pariton}} &= \frac{220\pi}{400\pi} = \frac{11}{20} \\ P_{\text{parillinen}} &= \frac{180\pi}{400\pi} = \frac{9}{20}. \end{aligned}$$

1 p. (yht. 7 p.)

Kolmen tikanheiton yhteenlaskettu pistemäärä on parillinen, jos ja vain jos kaikki kolme tikkaa osuvat parillisten pisteiden alueille tai täsmälleen kaksi tikoista osuu parittomien pisteiden alueille. 1 p. (yht. 8 p.) Tämän voi päätellä siitä, että kahden parittoman luvun summa on aina parillinen, mistä seuraa, että jos kokonaislukujen summassa on parillinen määrä parittomia lukuja, summa on parillinen, ja jos summassa on pariton määrä parittomia lukuja, summa on pariton.

Kyseessä on toistokoe. Todennäköisyys saada parillinen summa pisteitä kolmella tikalla on siis

$$\begin{aligned} P &= P(3 \text{ parillista}) + P(1 \text{ parillinen ja } 2 \text{ paritonta}) \\ &= \binom{3}{3} P_{\text{parillinen}}^3 \cdot P_{\text{pariton}}^0 \quad \boxed{1 \text{ p. (yht. 9 p.)}} + \binom{3}{1} P_{\text{parillinen}}^1 \cdot P_{\text{pariton}}^2 \quad \boxed{2 \text{ p. (yht. 11 p.)}} \\ &= 1 \cdot \left(\frac{9}{20}\right)^3 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{9}{20} \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^2 \\ &= \frac{999}{2000} \\ &= 0,4995 \quad \boxed{1 \text{ p. (yht. 12 p.)}} \end{aligned}$$

Vastaus: Kolmen tikan yhteenlaskettu tulos on parillinen todennäköisyydellä 0,4995.

Pisteytyksestä:

- Määritetty parittoman alueen pinta-ala oikein 2 p.
- Määritetty parittomalle ja parilliselle alueelle osumisen todennäköisyydet oikein 1 p.
- Löydetty oikeat tapahtumat: kaikki parillisia tai kaksi paritonta ja yksi parillinen 1 p.
- Muodostettu lauseke kokonaistodennäköisyydelle tai laskettu eri vaihtoehtojen todennäköisyydet erikseen 3 p.
- Oikea vastaus järkevällä tarkkuudella 1 p.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

9. Jaksollisuus (12 p.)

Funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jaksollinen, jos on olemassa sellainen $L > 0$, että sen kuvaaja pysyy samana, kun sitä siirretään L yksikköä vaakasuorassa suunnassa. Tämä ominaisuus voidaan esittää myös ehdolla $f(x + L) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Pienin tällainen luku L on funktion perusjakso.

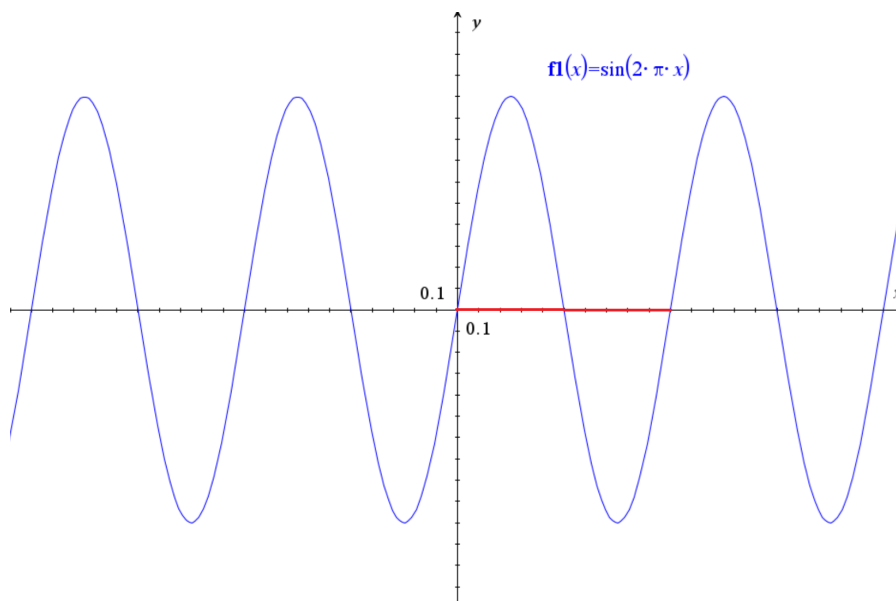
Piirrä jokaisessa osatehtävässä funktion kuvaaja omaan koordinaatistoonsa. Anna vastauksena funktion perusjakso sekä kuvaaja, johon on merkitty perusjakson mitainen osa x -akselia.

1. $f(x) = \sin(2\pi x)$ (4 p.)
2. $g(x) = |\sin(\pi x) + \sin(2\pi x)|$ (4 p.)
3. Anna esimerkki jaksollisesta funktiosta $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jonka perusjakso on 4. (4 p.)

Ratkaisu.

Huomaa! Merkintä $f: A \rightarrow B$ tarkoittaa, että funktion f määrittelyjoukko on A ja maalijoukko on B . Funktio $f: A \rightarrow B$ on siis määritelty kaikilla joukon A alkioilla, ja sen saamat arvot kuuluvat joukkoon B , mutta sen ei tarvitse saada kaikkia joukon B arvoja. Tehtävän tapauksessa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tarkoittaa siis funktiota, joka on määritelty kaikilla reaaliluvuilla ja jonka arvot ovat reaalilukuja.

9.1.

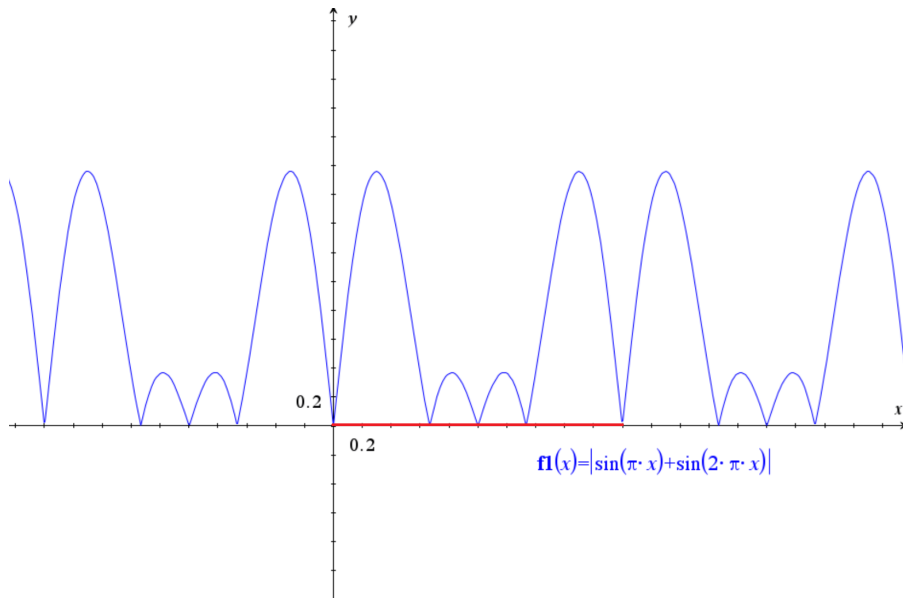


3 p. (yht. 3 p.)

Funktion perusjakso on 1.

1 p. (yht. 4 p.)

9.2.



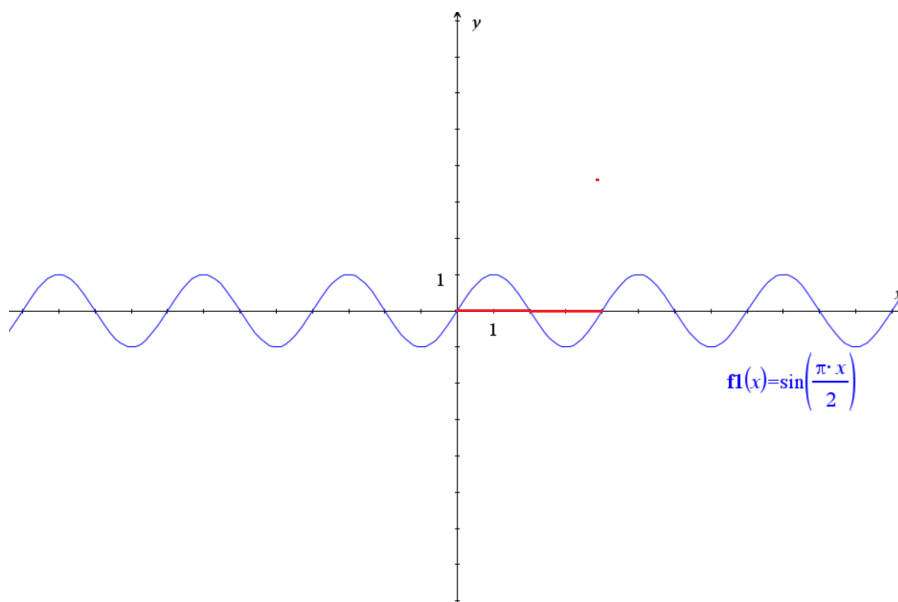
3 p. (yht. 7 p.)

Funktion perusjakso on 2.

1 p. (yht. 8 p.)

9.3. Esimerkiksi käy funktio

$$h(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$



3 p. (yht. 11 p.)

Funktio h on jaksollinen ja sen perusjakso on 4. 1 p. (yht. 12 p.)

Huomaa! Esimerkiksi käy mikä vain jaksollinen funktio $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jonka perusjakso on 4.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

10. Ohjelmakoodi ja tekijät (12 p.)

Aineisto:

10. A [Teksti: Papun koodi](#)

Papu yritti selvittää positiivisen kokonaisluvun alkutekijät. Tähän tarkoitukseen hän kirjoitti Python-koodin, joka on esitetty tekstissä [10.A](#). Koodissa #-merkkiä seuraava teksti on kommentti, joka ei vaikuta ohjelman toimintaan. Papu ajoi ohjelman muutujan n eri alkuarvoilla. Hän huomasi, että toisinaan ohjelma toimi virheettömästi ja tulosti luvun n alkutekijät, toisinaan se tulosti muitakin lukuja.

Osatehtävissä 10.1 ja 10.2 vastauksesta täytyy ilmetä käytetty alkuarvo ja ohjelman tuloste.

1. Anna esimerkki luvun n alkuarvosta, jolle ohjelma tulostaa listan, joka sisältää vain luvun n alkutekijöitä. (3 p.)
2. Anna esimerkki luvun n alkuarvosta, jolle ohjelma tulostaa muitakin kuin luvun n alkutekijöitä. (3 p.)
3. Selitä, miksi ohjelma ei aina toimi niin kuin Papu oli tarkoittanut. (6 p.)

Huomaa, että tehtävässä annettua ohjelmakoodia voi ajaa koeympäristön ohjeiden Ohjelmointi-välilehdellä. Siellä on myös Python-kielen käskyjen selityksiä.

Ratkaisu.

10.1. Alkuarvolla $n = 6$ ohjelma tulostaa listan luvun alkutekijöistä.

Ohjelmakoodin tuloste on tällöin

Python 3 -ohjelmakoodi:

```
1 n=6 # korvaa x tutkittavalla luvulla
2 m=n
3 while n>1: # toista niin kauan kuin n>1
4     for a in range(2,m+1): # a käy läpi arvot 2,
5         if n%a==0: # jos n modulo a on nolla
6             print(a) # tulosta luvun a arvo
7             n=n/a
```

Suorita ohjelma

Kopioi leikepöydälle

Tulosteet / virheet:

```
2
3
```

Ohjelman ajamista ei vaadita ratkaisuun. Riittää, että vastauksessa on mainittu alkuarvo ja lueteltu täsmällisesti, mitä ohjelma tulostaa.

Luvun 6 alkulukuhajotelma on $2 \cdot 3$, joten ohjelman tuloste on oikea.

3 p. (yht. 3 p.)

Alkutekijät ovat luvun n tekijöitä ja alkulukuja. Esimerkkejä sopivaksi luvuksi n , jonka alkulukuhajotelman algoritmi tulostaa oikein on äärettömän monta. Ohjelma toimii oikein, jos syötetty luku on

- alkuluku
- luku, jonka alkulukuhajotelmassa mikään alkuluku ei esiinny kolmesti
- luku, jonka alkulukuhajotelmassa korkeintaan yksi alkuluku esiintyy kahdesti.

10.2. Alkuarvolla $n = 8$ ohjelma tulostaa muitakin kuin luvun alkutekijöitä.

Ohjelmakoodin tuloste on tällöin

Python 3 -ohjelmakoodi:

```
1 n=8 # korvaa x tutkittavalla luvulla
2 m=n
3 while n>1: # toista niin kauan kuin n>1
4     for a in range(2,m+1): # a käy läpi arvot 2,
5         if n%a==0: # jos n modulo a on nolla
6             print(a) # tulosta luvun a arvo
7             n=n/a
```

Suorita ohjelma

Kopioi leikepöydälle

Tulosteet / virheet:

```
2
4
```

Luvun 8 alkulukuhajotelma olisi $2 \cdot 2 \cdot 2$, joten ohjelma ei tässä tapauksessa tulostanut vain luvun 8 alkutekijöitä vaan luvun 2 lisäksi luvun 4, joka ei ole alkuluku. 3 p. (yht. 6 p.)

Myös tähän kohtaan on olemassa ääretön määrä esimerkkejä. Ohjelma ei toimi oikein, jos syötetun luvun alkulukuhajotelmassa

- jokin alkuluku esiintyy kolmesti
- vähintään kaksi alkulukua esiintyy kahdesti.

10.3. Papun ohjelmakoodi ei toimi oikein, sillä sen tulostamat luvut eivät ole aina alkulukuja. 3 p. (yht. 9 p.) Algoritmi käy läpi järjestyksessä kokonaislukuja eikä aloita alusta yhden alkutekijän löytymisen jälkeen. Jos luvun n tekijöinä esiintyy alkulukujen lisäksi niiden tuloja (eli jokin alkuluku esiintyy alkulukuhajotelmassa kolmesti tai vähintään kaksi alkulukua esiintyy kahdesti), ohjelmakoodi tulostaa tämän tulon, joka on kyllä luvun n tekijä, mutta ei alkuluku. 3 p. (yht. 12 p.)

Esimerkiksi luvun 8 tapauksessa ohjelma aloittaa laskemalla $8/2$, jonka jakojäännös on nolla, joten ohjelma tulostaa luvun 2. Nyt uusi $n = 8/2 = 4$. Ohjelma jatkaa for-silmukkaa. Uusi jakaja on luku 3. Jakojäännös ei ole nolla, joten

ohjelma siirtyy eteenpäin for-silmukassa, n on edelleen 4. Seuraavaksi $a:n$ arvo on myös 4, joten jakojäännös laskusta $4/4$ on nolla. Ohjelma tulostaa $a:n$, joka nyt oli 4.

Ohjelmakoodi voitaisiin korjata esimerkiksi lisäämällä if-lauseen loppuun komento "break". Tällöin ohjelmakoodi aloittaa tekijöiden etsimisen (eli for-silmukan) aina luvusta 2 löydettyään uuden alkutekijän.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

11. Paraabelialueita (12 p.)

Aineisto:

11. A [Kuva: Alueiden leikkaus](#)

Tarkastellaan tasojoukkoa P_0 , jonka alareuna on x -akselin jana $[-1, 1]$ ja yläreuna paraabelin kaari $y = 1 - x^2$, $-1 \leq x \leq 1$. Arvoilla $a > 0$ määritellään uusi joukko P_a siirtämällä joukkoa P_0 vaakasuorassa suunnassa oikealle etäisyyden a verran. Olkoon $L_a = P_0 \cap P_a$ joukkojen P_0 ja P_a leikkaus eli yhteinen osa. Kuvassa [11.A](#) on esimerkkinä tapaus $a = 0,75$.

1. Määritä joukon $L_{0,75}$ pinta-ala. (4 p.)
2. Olkoon a sellainen parametrin arvo, että joukon L_a pinta-ala on puolet joukon P_0 pinta-alasta. Tämä arvo a on erään kolmannen asteen yhtälön ratkaisu. Määritä tämä yhtälö ja ratkaise siitä parametrin a likiarvo kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella. (8 p.)

Ratkaisu.

- 11.1. Joukon P_0 määrittävä paraabeli on $y = 1 - x^2$. Joukon $P_{0,75}$ määrittävä paraabeli saadaan, kun paraabelia $y = 1 - x^2$ siirretään oikealle $0,75$ verran. Näin ollen joukon $P_{0,75}$ määrittävä paraabeli on $y = 1 - (x - 0,75)^2$. 1 p. (yht. 1 p.)

Uuden paraabelin yhtälön voi päätellä tutkimalla, mitä tapahtuu, jos lausekkeeseen $f(x)$ laitetaan x :n paikalle $(x - a)$. Tällöin uuden funktion kuvaajan yhtälö on muotoa

$$y = f(x - a).$$

Tämä funktio $f(x - a)$ saa saman arvon kohdassa $x = a$ kuin funktio $f(x)$ saa kohdassa $x = 0$, sillä $f(a - a) = f(0)$. Vastaavasti $f(x - a)$ saa saman arvon kohdassa $x = 2a$ kuin $f(x)$ saa kohdassa $x = a$, sillä $f(2a - a) = f(a)$, ja niin edelleen. Huomataan siis, että $f(x - a)$ saa aina saman arvon kuin $f(x)$ silloin,

kun $f(x - a)$:n tapauksessa x -koordinaatti on a :n verran suurempi. Näin ollen voidaan päätellä, että kuvaaja $y = f(x - a)$ saadaan, kun siirretään kuvaajaa $y = f(x)$ oikealle a :n verran.

Siirretyn paraabelin yhtälön voi päätellä tämän tehtävän tapauksessa myös tutkimalla paraabelin nollakohtia. Alkuperäisen paraabelin nollakohdat ovat

$$1 - x^2 = 0$$

$$x = \pm 1.$$

Paraabelin yhtälö nollakohtamuodossa olisi tällöin

$$y = -(x - 1)(x + 1)$$

Kun paraabelia siirretään oikealle a :n verran, kumpikin nollakohta siirtyy myös oikealle. Uudet nollakohdat ovat siis

$$-1 + a \quad \text{ja} \quad 1 + a.$$

Nyt uuden paraabelin yhtälö nollakohtamuodossa on

$$y = -(x - (-1 + a))(x - (1 + a))$$

$$y = -(x + 1 - a)(x - 1 - a)$$

$$y = -(x^2 - x - ax + x - 1 + a - ax + a + a^2)$$

$$y = -(x^2 - 2ax - 1 + a^2) \quad || \text{muistikaava } a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$y = -(x^2 - 2ax + a^2 - 1)$$

$$y = -((x - a)^2 - 1)$$

$$y = 1 - (x - a)^2.$$

Yhteisen alueen vasen reuna on kohdassa $x = -1 + 0,75 = -0,25$ ja oikea reuna on kohdassa $x = 1$. Alueen pinta-ala voidaan laskea kahdessa osassa: paraabelin $y = 1 - (x - 0,75)^2$ ja x -akselin rajoittama pinta-ala vasemmas- ta reunasta paraabelien leikkauspisteen kohdalle ja paraabelin $y = 1 - x^2$ ja x -akselin rajoittama pinta-ala paraabelien leikkauspisteen kohdalta oikeaan reunaan.

Ratkaistaan leikkauspisteen x -koordinaatti laskinohjelman avulla.

$$1 - x^2 = 1 - (x - 0,75)^2$$

$$x = 0,375$$

1 p. (yht. 2 p.)

Yhteisen alueen pinta-ala on siis

$$A_{0,75} = \int_{-0,25}^{0,375} 1 - (x - 0,75)^2 dx + \int_{0,375}^1 1 - x^2 dx = \frac{475}{768} \quad (2 \text{ p. (yht. 4 p.)})$$

Huomaa! Jos laskinohjelma ei anna vastausta tarkkana arvona, vaihda desimaaliluvut murtoluvuiksi: $-0.25 = -1/4$, $0.375 = 3/8$ ja $0.75 = 3/4$.

Pinta-alan voi laskea myös laskemalla vain toisen ylläolevista integraaleista ja päättämällä symmetrian avulla, että integraalien arvot ovat samat, joten yhteisen alueen pinta-ala on kaksi kertaa yhden integraalin arvo.

Vastaus: Joukon $L_{0,75}$ pinta-ala on $\frac{475}{768}$.

- 11.2. Lasketaan joukon P_0 pinta-ala, eli käyrän $y = 1 - x^2$ ja x -akselin rajaama pinta-ala välillä $-1 \leq x \leq 1$.

$$A_0 = \int_{-1}^1 1 - x^2 dx = \frac{4}{3} \quad (1 \text{ p. (yht. 5 p.)})$$

Alueen L_a vasen reuna on kohdassa $x = -1 + a$ ja oikea reuna kohdassa $x = 1$. Vastaavasti kuin kohdassa 11.1, alueen L_a pinta-ala voidaan laskea kahdessa osassa: paraabelin $y = 1 - (x - a)^2$ ja x -akselin rajoittama pinta-ala vasemmasta reunasta paraabelien leikkauspisteen kohdalle ja paraabelin $y = 1 - x^2$ ja x -akselin rajoittama pinta-ala paraabelien leikkauspisteen kohdalta oikeaan reunaan.

Ratkaistaan leikkauspisteen x -koordinaatti laskinohjelman avulla.

$$1 - x^2 = 1 - (x - a)^2$$

$$x = \frac{a}{2} \quad (1 \text{ p. (yht. 6 p.)})$$

Muodostetaan lauseke alueen L_a pinta-alalle.

$$A_a = \int_{-1+a}^{\frac{a}{2}} 1 - (x - a)^2 dx + \int_{\frac{a}{2}}^1 1 - x^2 dx \quad (1 \text{ p. (yht. 7 p.)})$$

$$= \frac{a^3}{12} - a + \frac{4}{3} \quad (1 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

Tehtävänannon mukaan L_a :n pinta-ala on puolet P_0 :n pinta-alasta, joten saadaan yhtälö

$$\frac{a^3}{12} - a + \frac{4}{3} = \frac{\frac{4}{3}}{2} \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

$$\frac{a^3}{12} - a + \frac{2}{3} = 0 \quad \text{2 p. (yht. 11 p.)}$$

Laskinohjelma antaa yhtälön ratkaisuksi

$$a = -3,75877 \dots$$

$$a = 0,69459 \dots$$

$$a = 3,0641 \dots$$

Tehtävänannon mukaan $a > 0$ ja toisaalta, jos $a > 2$, yhteisen alueen pinta-ala olisi nolla. Näin ollen ainoastaan $a = 0,69459 \dots \approx 0,695$ käy vastaukseksi.

1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Yhtälö on $\frac{a^3}{12} - a + \frac{2}{3} = 0$ ja kysytty arvo on 0,695.

Huomaa! Myös kohdassa 2 voi hyödyntää yhteisen alueen symmetriaa ja muodostaa yhtälön vain yhden integraalin avulla.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

12. Bézier-käyriä (12 p.)

Aineisto:

12. A [Teksti ja animaatio: Bézier-käyrän määritelmä](#)

Bézier-käyriä käytetään tietokoneavusteisessa suunnittelussa (CAD), joka on vektorigrafiikan tärkeä sovelluskohde. Bézier-käyrä määritetään niin sanottujen ohjauspisteiden avulla, kuten tekstissä [12.A](#) on kuvattu.

1. Eräs lineaarinen Bézier-käyrä koostuu pisteistä $B(t) = (4t, t + 2)$, $0 \leq t \leq 1$. Määritä tämän käyrän ohjauspisteet. (4 p.)
2. Erään toisen asteen Bézier-käyrän ohjauspisteet ovat $P_0 = (-2, 0)$, $P_1 = (0, 8)$ ja $P_2 = (2, 0)$. Määritä käyrän yhtälö muodossa $y = f(x)$. (8 p.)

Ratkaisu.

12.1. Annettu käyrä on $B(t) = (4t, t + 2)$, jossa $0 \leq t \leq 1$.

Bézier-käyrän ohjauspisteet löytyvät, kun käyrän alku- ja loppupisteet vastaavat arvoja $t = 0$ ja $t = 1$:

$$\text{Kun } t = 0, \quad B(0) = (4 \cdot 0, 0 + 2) = (0, 2) \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)}$$

$$\text{Kun } t = 1, \quad B(1) = (4 \cdot 1, 1 + 2) = (4, 3) \quad \text{2 p. (yht. 4 p.)}$$

Vastaus: Ohjauspisteet ovat $P_0 = (0, 2)$ ja $P_1 = (4, 3)$.

12.2. Annetut ohjauspisteet ovat:

$$P_0 = (-2, 0), \quad P_1 = (0, 8), \quad P_2 = (2, 0)$$

Aineiston mukaan toisen asteen Bézier-käyrän parametriyhtälö on:

$$B(t) = (1 - t)^2 P_0 + 2t(1 - t) P_1 + t^2 P_2$$

$$B(t) = (1 - t)^2 (-2, 0) + 2t(1 - t) (0, 8) + t^2 (2, 0) \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)}$$

Lasketaan x -koordinaatti:

$$\begin{aligned}x(t) &= (1-t)^2 \cdot (-2) + 2t(1-t) \cdot 0 + t^2 \cdot 2 \\&= -2(1-2t+t^2) + 2t^2 \\&= -2 + 4t - 2t^2 + 2t^2 \\&= -2 + 4t\end{aligned}$$

Lasketaan y -koordinaatti:

$$\begin{aligned}y(t) &= (1-t)^2 \cdot 0 + 2t(1-t) \cdot 8 + t^2 \cdot 0 \\&= 16t(1-t) \\&= 16t - 16t^2\end{aligned}$$

Täten Bézier-käyrän parametriyhtälö on:

$$B(t) = (-2 + 4t, 16t - 16t^2),$$

2 p. (yht. 8 p.)

kun $0 \leq t \leq 1$.

Ratkaistaan käyrän yhtälö $y = f(x)$.

$$x = -2 + 4t$$

$$y = 16t - 16t^2$$

2 p. (yht. 10 p.)

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $x = -2 + 4t$, josta ratkaistaan t :

$$x = -2 + 4t$$

$$x + 2 = 4t$$

$$t = \frac{x + 2}{4}$$

Sijoitetaan tämä t toiseen yhtälöön $y = 16t - 16t^2$:

$$\begin{aligned}y &= 16\left(\frac{x+2}{4}\right) - 16\left(\frac{x+2}{4}\right)^2 \\&= 4(x+2) - 16\left(\frac{(x+2)^2}{16}\right) \\&= 4(x+2) - (x+2)^2 \\&= 4x + 8 - (x^2 + 4x + 4) \\&= 4x + 8 - x^2 - 4x - 4 \\&= 4 - x^2.\end{aligned}$$

Laskinohjelman avulla Bézier-käyrän yhtälöksi saadaan:

$$y = 4 - x^2. \quad \text{2 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: Bézier-käyrän yhtälö on $y = 4 - x^2$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

13. Epäjatkuva funktio (12 p.)

Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & \text{kun } x \leq 1, \\ x^2 + x - 2, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$$

Jalmari on osoittanut seuraavalla tavalla, että $f'(1) = 3$.

Lasketaan funktion f erotusosamäärän toispuoleiset raja-arvot kohdassa $x = 1$. Tällöin

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 5 - (3 \cdot 1 - 5)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 3}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x - 1)}{x - 1} = 3 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2 - (1^2 + 1 - 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 3. \end{aligned}$$

Koska erotusosamäärän toispuoleiset raja-arvot ovat yhtä suuret ja niiden yhteinen arvo on 3, niin funktio f on derivoituva kohdassa $x = 1$ ja $f'(1) = 3$.

- Osoita, että f ei ole jatkuva kohdassa $x = 1$. Miksi tämä on ristiriidassa Jalmarin tuloksen kanssa? Minkä virheen Jalmari tekee todistuksessaan? (6 p.)
- Osoita, että f on monotoninen joukossa $\mathbb{R}$. (6 p.)

Ratkaisu.

- 13.1. Tutkitaan funktion f jatkuvuutta kohdassa $x = 1$. Funktio f on jatkuva kohdassa $x = 1$, jos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1).$$

Tarkastellaan vasemman- ja oikeanpuoleisia raja-arvoja erikseen:

- Kun $x \rightarrow 1^-$ (eli lähestytään arvoa 1 vasemmalta), käytetään lauseketta $f(x) = 3x - 5$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \cdot 1 - 5 = -2.$$

- Kun $x \rightarrow 1^+$ (eli lähestytään arvoa 1 oikealta), käytetään lauseketta $f(x) = x^2 + x - 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1^2 + 1 - 2 = 0.$$

Toispuoleiset raja-arvot eivät ole yhtä suuret, joten funktion raja-arvoa ei ole olemassa kohdassa $x = 1$. 1 p. (yht. 1 p.) Funktio $f(x)$ ei siis ole jatkuva kohdassa $x = 1$. 1 p. (yht. 2 p.) Tämä on ristiriidassa Jalmarin tuloksen kanssa, sillä funktion tulee olla jatkuva, jotta se voisi olla derivoituva. 2 p. (yht. 4 p.)

Jalmarin virhe oli käyttää väärää lauseketta funktion arvolle kohdassa $x = 1$ erotusosamäärän oikeanpuoleista raja-arvoa laskettaessa. 2 p. (yht. 6 p.)

Jos Jalmary ei olisi tehnyt virhettään, hänen laskunsa olisi edennyt seuraavasti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2 - (3 \cdot 1 - 5)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x}{x - 1}. \end{aligned}$$

Tällöin hän olisi saattanut huomata, ettei toispuolisista erotusosamäärän raja-arvoista tule samaa tulosta.

- 13.2. Funktio f on paloittain määritelty funktio, jonka lauseke kuvaa nousevaa suoraa, kun $x \leq 1$. Nouseva suora on kasvavan funktion kuvaaja. Tästä voisi päätellä, että funktion tulee olla kasvava koko määrittelyjoukossaan.

Funktio on monotoninen, jos se on koko määrittelyjoukossaan pelkästään kasvava tai pelkästään vähenevä. Halutaan siis näyttää todeksi joko $f(x_1) \leq f(x_2)$ tai $f(x_1) \geq f(x_2)$, kun $x_1 < x_2$, kaikilla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Tutkitaan funktion monotonisuutta kolmessa osassa.

- 1) Tutkitaan funktion f monotonisuutta, kun $x_1, x_2 \leq 1$.

$$x_1 < x_2 \quad || \cdot 3$$

$$3x_1 < 3x_2 \quad || - 5$$

$$3x_1 - 5 < 3x_2 - 5$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Saatiin näytettyä, että funktio f on aidosti kasvava, kun $x \leq 1$.

1 p. (yht. 7 p.)

Koska funktio on aidosti kasvava, se on myös kasvava.

- 2) Koska funktio f oli kasvava kohdassa 1), tutkitaan nyt funktion f kasvavuutta, kun $x_1, x_2 > 1$.

Tutkitaan funktion f lauseketta, kun $x > 1$. Lauseke kuvaa ylöspäin aukeavaa paraabelia. Toisen asteen polynomi on jatkuva ja derivoituva.

$$f(x) = x^2 + x - 2$$

$$f'(x) = 2x + 1$$

Määritetään derivaatan nollakohta ja kulkukaavio.

$$2x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Derivaatan lauseke kuvaa nousevaa suoraa. Määritetään kulkukaavio.

$$-1/2$$

$2x + 1$		
$x^2 + x - 2$		

1 p. (yht. 8 p.) Kulkukaaviosta nähdään, että tutkittava polynomifunktio on aidosti kasvava, kun $x > -\frac{1}{2}$.

Koska $1 > -\frac{1}{2}$, funktio f on myös kasvava, kun $x_2 > x_1 > 1$. 1 p. (yht. 9 p.)

- 3) Tutkitaan vielä funktion f kasvavuutta epäjatkuvuuskohdan ympärillä, eli kun $x_1 \leq 1$ ja $x_2 > 1$.

Funktio on siis kasvava, kun $x \leq 1$. Lasketaan funktion suurin arvo, kun $x \leq 1$.

$$f(1) = 3 \cdot 1 - 5 = -2$$

Tästä voidaan päätellä, että

$$f(x_1) \leq -2. \quad 1 \text{ p. (yht. 10 p.)}$$

Koska $1 < x_2$ ja koska funktio f on kasvava, kun $x > 1$, voidaan päätellä, että

$$1^2 + 1 - 2 < x^2 + x - 2$$

$$0 < x^2 + x - 2. \quad 1 \text{ p. (yht. 11 p.)}$$

Yhdistämällä nämä voidaan kirjoittaa

$$3x_1 - 5 \leq -2 < 0 < x^2 + x - 2$$

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

1 p. (yht. 12 p.)

Kohtien 1, 2 ja 3 nojalla funktio f on kasvava joukossa $\mathbb{R}$, joten se on monotoninen joukossa $\mathbb{R}$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!