

LYHYT

MATEMATIIKKA

YO-MALLIVASTAUKSET

SYKSY 2024

SUOMEN KATTAVIMMAT MALLIVASTAUKSET

Kaikkien lukiolaisten ja
lukion opettajien
ilmaiseen käyttöön.

67 % LÄÄKETIETEEN ALOITUSPAIKOISTA

Mafyn opiskelijat veivät
67% lääketieteen
pääsykoepaikoista
2024.

60 % PK-SEUDUN LUKIOLAISISTA

opiskelee Mafynetillä
yo-kirjoituksiin.

Mafy

PALVELUITAMME OVAT

- Mafynetti-oppimissovellus
- Lääketieteen valmennuskurssit
- Diplomi-insinööri- ja tietojenkäsittelytieteen valmennuskurssit
- Kauppatieteen valmennuskurssit
- Ylioppilaskirjoituksiin valmistavat kertauskurssit

MALLIVASTAUKSET LAATII MAFYN OPPIMATERIAALITIIMI

Tiimi kehittää lukion oppimateriaaleja. Mallivastausten tekemiseen osallistuivat Timo Kalinainen, Saija Ojala, Sampsa Kurvinen ja Matti Virolainen.

KÄYTTÖEHDOT

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafy.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty.

Lukion opettajana voit käyttää tätä dokumenttia oppimateriaalina lukion kursseillasi. Nämä mallivastaukset ovat Mafy Oy:n omaisuutta.

Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	5
Ratkaisu tehtävään 3	8
Ratkaisu tehtävään 4	12
Ratkaisu tehtävään 5	15
Ratkaisu tehtävään 6	18
Ratkaisu tehtävään 7	27
Ratkaisu tehtävään 8	32
Ratkaisu tehtävään 9	35
Ratkaisu tehtävään 10	38
Ratkaisu tehtävään 11	43

Malliratkaisut päivitetty 20. tammikuuta 2025 klo. 10:56.

1. Arjen matematiikkaa (12 p.)

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Jokaisen osatehtävän vastaus on kokonaisluku.

1.1 Laske. (2 p.)

Suklaapatukat maksavat yksittäin 2 euroa, mutta kolmen patukan pakkauksen saa 4 eurolla. Kymmenen suklaapatukkaa maksaa halvimillaan euroa.

1.2 Laske. (2 p.)

Juna lähtee Oulusta kello 9.48 ja on perillä Helsingissä kello 15.25. Junamatkan kesto on ^{1 p.} tuntia ja ^{1 p.} minuuttia.

1.3 Laske. (2 p.)

Reseptin mukaan kuuteen annokseen pannacottaa tarvitaan $1\frac{1}{2}$ desilitraa maitoa. Yhdestä litrasta maitoa saa annosta.

1.4 Laske. (3 p.)

Harrin palkka on 4 200 euroa kuukaudessa. Hänen palkastaan vähennetään 24 % ennakonpidätystä ja 9 % pakollisia eläke- ja työttömyysvakuutusmaksuja. Harrin nettopalkka euron tarkkuudella on euroa.

1.5 Laske. (3 p.)

Alma maksaa kuukaudessa 12 euron ennakkomaksun vedenkäytöstään. Kuuden kuukauden välein isännöitsijä lähettää todelliseen kulutukseen perustuvan tasaaslaskun, jossa on huomioitu jo maksetut ennakkomaksut. Tammi-kesäkuussa Alman veden kulutus oli $17,012 \text{ m}^3$, ja veden hinta on 4,63 euroa/ m^3 . Alman tammi-kesäkuun tasaaslaskun loppusumma kokonaisiksi euroiksi pyöristettynä on euroa.

Ratkaisu.**1.1 Laske. (2 p.)**

Suklaapatukat maksavat yksittäin 2 euroa, mutta kolmen patukan pakkauksen saa 4 eurolla. Kymmenen suklaapatukkaa maksaa halvimillaan euroa.

2 p. (yht. 2 p.)

Kymmenen suklaapatukkaa voidaan ostaa ostamalla kolme kolmen patukan pakkausta ja lisäksi yksi yksittäinen patukka. Kolme kolmen patukan pakkausta maksaa yhteensä

$$4 \text{ €/kpl} \cdot 3 \text{ kpl} = 12 \text{ €}$$

Lisätään tähän yksittäinen patukka:

$$12 \text{ €} + 2 \text{ €} = 14 \text{ €}.$$

1.2 Laske. (2 p.)

Juna lähtee Oulusta kello 9.48 ja on perillä Helsingissä kello 15.25. Junamatkan kesto on ^{1 p.} tuntia ja ^{1 p.} minuuttia.

Lähtöaika: 09:48

Saapumisaika: 15:25

Huomataan, että aikaa kuluu 12 minuuttia, kunnes kello on 10:00. Tämän jälkeen kuluu 5 tuntia, että kello on 15:00. Tämän jälkeen kuluu vielä 25 minuuttia, että kello on 15:25. Yhteensä aikaa kuluu siis 5 tuntia ja 37 minuuttia.

1.3 Laske. (2 p.)

Reseptin mukaan kuuteen annokseen pannacottaa tarvitaan $1\frac{1}{2}$ desilitraa maitoa. Yhdestä litrasta maitoa saa annosta.

Merkintä $1\frac{1}{2}$ tarkoittaa "yksi kokonainen ja yksi puolikas" eli kuuteen annokseen tarvitaan siis 1,5 dl maitoa. Yhteen annokseen pannacotta tarvitaan tällöin

$$\frac{1,5 \text{ dl}}{6 \text{ annosta}} = 0,25 \text{ dl/annos}$$

Yksi litra vastaa 10 desilitraa. Näin ollen 10 dl maitoa saa valmistettua

$$\frac{10 \text{ dl}}{0,25 \text{ dl/annos}} = 40 \text{ annosta}.$$

1.4 Laske. (3 p.)

Harrin palkka on 4 200 euroa kuukaudessa. Hänen palkastaan vähennetään 24 % ennakonpidätystä ja 9 % pakollisia eläke- ja työttömyysvakuutusmaksuja. Harrin nettopalkka euron tarkkuudella on 2 814 euroa. 3 p. (yht. 9 p.)

Lasketaan ensin ennakonpidätyksen osuus:

$$24\% \cdot 4\,200 \text{ €} = 0,24 \cdot 4\,200 \text{ €} = 1\,008 \text{ €}$$

Lasketaan pakollisten eläke- ja työttömyysvakuutusmaksujen osuus:

$$9\% \cdot 4\,200 \text{ €} = 0,09 \cdot 4\,200 \text{ €} = 378 \text{ €}$$

Vähennetään molemmat vähennykset Harrin palkasta:

$$4\,200 \text{ €} - 1\,386 \text{ €} = 2\,814 \text{ €}$$

Harrin nettopalkka on siis 2 814 €.

Huomaa! YTL:n alustavien hyvän vastauksen piirteiden (luettu 26.9.2024) mukaan myös virheellisestä vastauksesta 2 905 € saa yhden pisteen.

1.5 Laske. (3 p.)

Alma maksaa kuukaudessa 12 euron ennakkomaksun vedenkäytöstään. Kuuden kuukauden välein isännöitsijä lähettää todelliseen kulutukseen perustuvan tasaaslaskun, jossa on jo huomioitu maksetut ennakkomaksut. Tammi-kesäkuussa Alman veden kulutus oli $17,012 \text{ m}^3$, ja veden hinta on $4,63 \text{ euroa/m}^3$. Alman tammi-kesäkuun tasaaslaskun loppusumma kokonaisiksi euroiksi pyöristettynä on 7 euroa. 3 p. (yht. 12 p.)

Lasketaan ensin vedenkäytön kokonaiskustannukset:

$$17,012 \text{ m}^3 \cdot 4,63 \text{ €/m}^3 = 78,76556 \text{ €}$$

Alma on maksanut ennakkomaksuja kuuden kuukauden ajalta:

$$12 \text{ €/kk} \cdot 6 \text{ kk} = 72 \text{ €}$$

Lasketaan tasaaslaskun loppusumma:

$$78,76556 \text{ €} - 72 \text{ €} = 6,76556 \text{ €} \approx 7 \text{ €}$$

Alman tammi-kesäkuun tasaaslaskun loppusumma on siis 7 euroa.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

2. Yhtälö ja kolmio (12 p.)

1. Ratkaise yhtälö $x^2 + 14 = 9x$. (4 p.)
2. Suora $y = -2x + 6$ rajaa positiivisten x - ja y -akselien kanssa suorakulmaisen kolmion. Määritä tämän kolmion pinta-ala ja hypotenuusan pituus. (8 p.)

Ratkaisu.

1. Yhtälö $x^2 + 14 = 9x$ on toisen asteen yhtälö.

Siirretään kaikki termit yhtäsuuruusmerkin vasemmalle puolelle, jotta yhtälö saadaan toisen asteen yhtälön yleiseen muotoon $ax^2 + bx + c = 0$:

$$\begin{aligned}x^2 + 14 &= 9x & || - 9x \\x^2 - 9x + 14 &= 0\end{aligned}$$

Sovelletaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nyt $a = 1$, $b = -9$, ja $c = 14$. Sijoitetaan lukuarvot ratkaisukaavaan:

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14}}{2 \cdot 1} \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2}$$

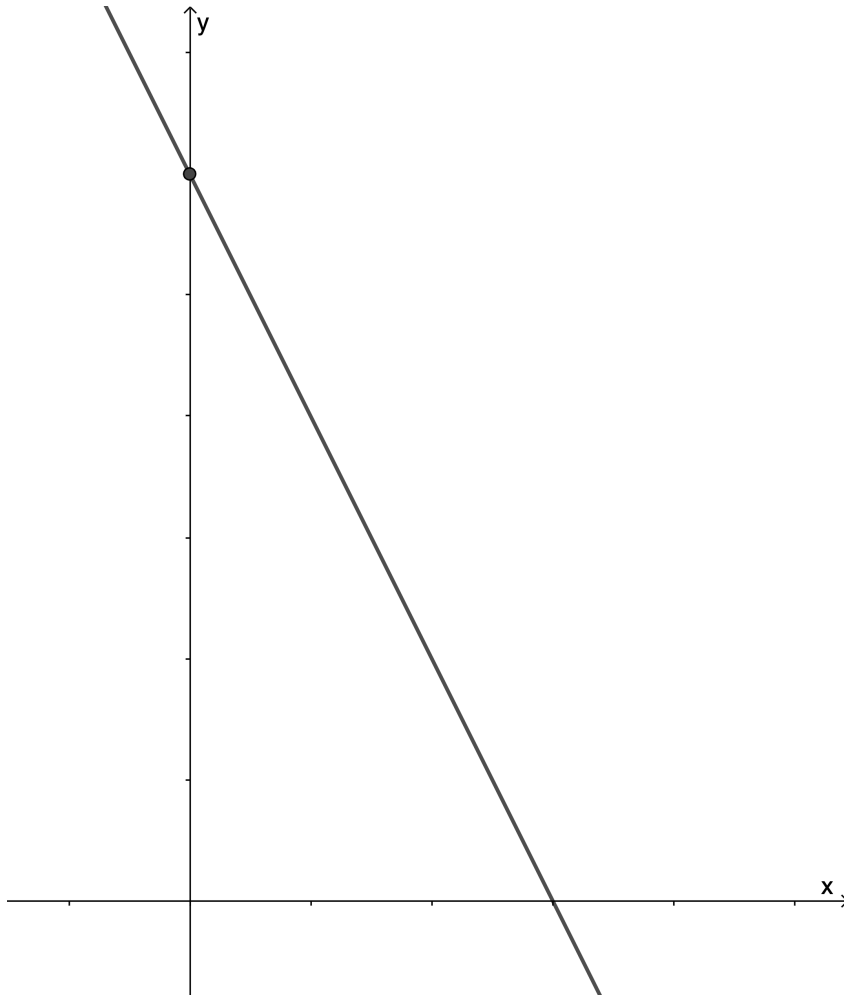
$$x = \frac{9+5}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{9-5}{2}$$

$$x = \frac{14}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{4}{2}$$

$$x = 7 \quad \text{tai} \quad x = 2 \quad \text{2 p. (yht. 4 p.)}$$

Vastaus: Yhtälön ratkaisut ovat $x = 7$ ja $x = 2$.

2. Piirretään tilanteesta kuva. Suoran vakiotermi on 6 on positiivinen, joten suora leikkaa y -akselin pisteessä $(0, 6)$. Suoran kulmakerroin -2 on negatiivinen, joten suora on laskeva. Suora leikkaa siis x -akselin pisteessä, jonka x -koordinaatti on positiivinen, ja näin suora muodostaa suorakulmaisen kolmion positiivisten koordinaattiakselien kanssa.



Kuvaa ei vaadita ratkaisussa.

Määritetään suoran ja x -akselin leikkauspiste. Kun $y = 0$, saadaan:

$$0 = -2x + 6$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

2 p. (yht. 6 p.)

Suora leikkaa x -akselin pisteessä $(3, 0)$.

Määritetään suoran ja y -akselin leikkauspiste. Sijoitetaan x :n paikalle 0, jolloin saadaan

$$y = -2 \cdot 0 + 6 = 6. \quad (2 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

Suora leikkaa y -akselin pisteessä $(0, 6)$.

Suorakulmaisen kolmion kanta a on siis 3 ja korkeus h on 6. Lasketaan pinta-ala.

Pinta-alan kaava on

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

missä a on kolmion kanta ja h kolmion korkeus. Sijoitetaan lukuarvot.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9 \quad (2 \text{ p. (yht. 10 p.)})$$

Kolmion pinta-ala on siis 9.

Hypotenuusan pituus saadaan Pythagoraan lauseella:

$$c = \sqrt{3^2 + 6^2} \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)})$$

$$c = \sqrt{9 + 36}$$

$$c = \sqrt{45} \quad (1 \text{ p. (yht. 12 p.)})$$

$$c = \sqrt{9 \cdot 5}$$

$$c = 3\sqrt{5}$$

Vastaus: Kolmion pinta-ala on 9 ja hypotenuusa $\sqrt{45}$.

Neliöjuurilauseke voidaan vielä pitkän matematiikan tiedoilla sieventää muotoon

$$c = \sqrt{45}$$

$$c = \sqrt{9 \cdot 5}$$

$$c = 3\sqrt{5}.$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

3. Juomalaseja mainoksessa (12 p.)

Aineisto:

3. A [Kuva: Esimerkkimuodostelma](#)

Mainostoimisto suunnittelee astianpesuaineen mainosvideon. Tuottajan ajatuksena on asettaa suuri määrä juomalaseja kolmion muotoiseen kuvioon kuvan [3.A](#) mukaisesti. Ensimmäisellä rivillä on yksi lasi, toisella rivillä kaksi, kolmannella rivillä kolme ja niin edelleen siten, että seuraavalla rivillä on aina yksi lasi enemmän kuin edellisellä rivillä.

1. Kuinka monta juomalasia on kymmenellä ensimmäisellä lasirivillä yhteensä? (3 p.)
2. Määritä lauseke juomalasiin kokonaismäärälle, kun lasirivejä on n kappaletta. (4 p.)
3. Kuinka monta lasiriviä on 3 916 juomalasin muodostelmassa? (5 p.)

Ratkaisu.

1.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Kuvasta nähdään, että juomalasiin määrä kasvaa aina yhdellä, kun siirrytään yksi rivi alemmas. Ensimmäisellä rivillä on yksi lasi, toisella rivillä kaksi lasia, kolmannella kolme lasia ja niin edelleen.

Juomalasiin määrä kymmenellä ensimmäisellä rivillä on yhteensä

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$
$$= 55. \quad \text{2 p. (yht. 3 p.)}$$

Vastaus: Kymmenellä ensimmäisellä rivillä on yhteensä 55 juomalasia.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Kuvasta nähdään, että juomalasien määrä kasvaa aina yhdellä, kun siirrytään yksi rivi alemmas. Ensimmäisellä rivillä on yksi lasi, toisella rivillä kaksi lasia, kolmannella kolme lasia ja niin edelleen.

Riveillä olevien juomalasien määrä noudattaa aritmeettista lukujonoa, jossa ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1$ ja erotusluku $d = 1$. Lasketaan tämän jonon kymmenes jäsen.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$a_{10} = 1 + 9 \cdot 1$$

$$= 10 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

Lasketaan kymmenen ensimmäisen rivin juomalasien määrä aritmeettisen summan avulla. Ensimmäinen yhteenlaskettava on ensimmäisellä rivillä olevien lasien määrä $a_1 = 1$ ja viimeinen yhteenlaskettava kymmenennellä rivillä olevien lasien määrä $a_{10} = 10$. Yhteenlaskettavia on kymmenen kappaletta.

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{1 + 10}{2} \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

$$= 5 \cdot 11$$

$$= 55$$

Vastaus: Kymmenellä ensimmäisellä rivillä on yhteensä 55 juomalasia. 1 p. (yht. 3 p.)

2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Kullakin rivillä on aina yhtä monta juomalasia kuin rivin numero osoittaa. Kun lasirivejä on n kappaletta, niin lasien kokonaismäärä on

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n. \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Tämä lauseke on aritmeettinen summa. Sievennetään se aritmeettisen summan kaavalla.

$$\begin{aligned}
 S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \\
 &= n \cdot \frac{1 + n}{2} \quad (2 \text{ p. (yht. 6 p.)}) \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \quad (1 \text{ p. (yht. 7 p.)})
 \end{aligned}$$

Vastaus: Juomalasien kokonaismäärä on $\frac{n(n+1)}{2}$, kun rivejä on n kappaletta.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Kuvasta nähdään, että juomalasien määrä kasvaa aina yhdellä, kun siirrytään yksi rivi alemmas. Riveillä olevien juomalasien määrä noudattaa aritmeettista lukujonoa, jossa erotusluku on $d = 1$ ja ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$. (2 p. (yht. 5 p.))

Muodostetaan tämän lukujonon yleinen jäsen eli selvitetään, kuinka monta juomalasia on rivillä n .

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot d \\
 &= 1 + (n - 1) \cdot 1 \\
 &= 1 + n - 1 \\
 &= n
 \end{aligned}$$

Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 1$ ja viimeinen yhteenlaskettava on $a_n = n$. Yhteenlaskettavia on n kappaletta. Muodostuu siis summa

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n.$$

Muodostetaan juomalasien yhteismäärän lauseke aritmeettisen summan kaavalla. Kun lasirivejä on n kappaletta, juomalasien kokonaismäärä on

$$\begin{aligned}
 S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \\
 &= n \cdot \frac{1 + n}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \quad (2 \text{ p. (yht. 7 p.)})
 \end{aligned}$$

Vastaus: Juomalasien kokonaismäärä on $\frac{n(n+1)}{2}$, kun rivejä on n kappaletta.

3. Juomalaseja on yhteensä $S_n = 3916$. Toisaalta kohdassa 3.2 muodostettiin lauseke juomalasien kokonaismäärälle

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ratkaistaan yhtälöstä lasirivien määrä n .

$$S_n = 3916$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = 3916 \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)} \quad \| \cdot 2$$

$$n(n+1) = 7832$$

$$n^2 + n = 7832$$

$$n^2 + n - 7832 = 0$$

Ratkaistaan yhtälö toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \| x = n, a = 1, b = 1, c = -7832$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7832)}}{2 \cdot 1} \quad \text{2 p. (yht. 10 p.)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{31\,329}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm 177}{2}$$

$$n = \frac{-1 + 177}{2} \quad \text{tai} \quad n = \frac{-1 - 177}{2}$$

$$n = 88 \quad \text{tai} \quad n = -89 \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

Rivien määrä ei voi olla negatiivinen, joten $n = 88$.

Vastaus: Muodostelmassa on 88 riviä. 1 p. (yht. 12 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

4. Kuulantyyöntö (12 p.)

Ryan Crouserin 18.2.2023 työntämän huipputuloksen perusteella on mallinnettu kuulantyyntönnön tulosta metreinä polynomifunktiolla

$$f(x) = -0,0126x^2 + 1,07x + 0,630,$$

kun muuttuja $0 \leq x \leq 60$ on työntönnön suuntakulma asteina (vaakatasosta mitattuna). Määritä derivaattaa käyttämällä suurimpaan työntötulokseen johtava työntökulma asteen sadasosan tarkkuudella ja sitä vastaava työntötulos yhden senttimetrin tarkkuudella.

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Tässä ratkaisussa käytetään apuna toisen asteen polynomifunktion kuvaajan muotoa.

Annettu funktio on toisen asteen polynomi

$$f(x) = -0,0126x^2 + 1,07x + 0,630,$$

jossa toisen asteen termin kerroin (luku $-0,0126$) on negatiivinen. 1 p. (yht. 1 p.) Siten funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. 1 p. (yht. 2 p.)

Koska funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, on derivaatan nollakohdan nimenomaan maksimikohta. Työntötulos on suurin kyseisessä maksimikohdassa.

1 p. (yht. 3 p.)

Derivoidaan funktio f .

$$\begin{aligned} f'(x) &= D(-0,0126x^2 + 1,07x + 0,630) \\ &= -0,0126 \cdot 2x + 1,07 + 0 \\ &= -0,0252x + 1,07 \end{aligned}$$

4 p. (yht. 7 p.)

Pisteytyksestä: Jos yritetty derivoida 1 p., aste oikein 1 p. ja 1 p./oikea termi. Jos derivaatta ei ole ensimmäisen asteen polynomi, muista kohdista ei voi ansaita pisteitä.

Ratkaistaan derivaatan nollakohta.

$$-0,0252x + 1,07 = 0 \quad (1 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

$$-0,0252x = -1,07 \quad || : (-0,0252)$$

$$x = 42,460 \dots \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

Funktio f saa siis suurimman arvonsa kohdassa $x = 42,460 \dots$, joten työntötulos on suurin, kun työnnön suuntakulma on $42,460 \dots^\circ \approx 42,46^\circ$. (1 p. (yht. 10 p.)

Lasketaan suurin työntötulos. Sijoitetaan alkuperäiseen funktioon f muuttujan arvo $x = 42,460 \dots$

$$\begin{aligned} f(42,460 \dots) &= -0,0126 \cdot 42,460 \dots^2 + 1,07 \cdot 42,460 \dots + 0,630 \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)}) \\ &= 23,346 \dots \end{aligned}$$

Pisin työntötulos on $23,346 \dots \text{ m} \approx 23,35 \text{ m}$. (1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus:

Suurimpaan työntötulokseen johtava työntökulma on $42,46^\circ$ astetta, ja sitä vastaava työntötulos on $23,35 \text{ m}$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Perustelutapa 2: Derivaatan arvon merkin tutkiminen

Tässä ratkaisussa derivaatan merkit määritetään testipisteiden avulla.

Derivoidaan funktio f .

$$\begin{aligned} f'(x) &= D(-0,0126x^2 + 1,07x + 0,630) \\ &= -0,0126 \cdot 2x + 1,07 + 0 \\ &= -0,0252x + 1,07 \quad (4 \text{ p. (yht. 4 p.)}) \end{aligned}$$

Pisteytyksestä: Jos yritetty derivoida 1 p., aste oikein 1 p. ja 1 p./oikea termi. Jos derivaatta ei ole ensimmäisen asteen polynomi, pisteiden kertyminen päättyy tähän.

Ratkaistaan derivaatan nollakohta.

$$-0,0252x + 1,07 = 0 \quad (1 \text{ p. (yht. 5 p.)})$$

$$-0,0252x = -1,07 \quad || : (-0,0252)$$

$$x = 42,460 \dots \quad (1 \text{ p. (yht. 6 p.)})$$

Tarkastellaan derivaatan merkkiä ennen ja jälkeen derivaatan nollakohdan $x = 42,460 \dots$

Kun $x = 30$:

$$f'(30) = -0,0252 \cdot 30 + 1,07 = 0,314. \quad (1 \text{ p. (yht. 7 p.)})$$

Tässä kohdassa derivaatta on positiivinen.

Kun $x = 50$:

$$f'(50) = -0,0252 \cdot 50 + 1,07 = -0,19. \quad (1 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

Tässä kohdassa derivaatta on negatiivinen.

Koska derivaatta vaihtaa merkkiä positiivisesta negatiiviseksi derivaatan nollakohdassa $x = 42,460 \dots$, derivaatan nollakohta on maksimikohta. (1 p. (yht. 9 p.)

Ratkaisussa voidaan myös tehdä kulkukaavio, mutta se ei ole välttämätöntä.

Funktio f saa siis suurimman arvonsa kohdassa $x = 42,460 \dots$, joten työntötulos on suurin, kun työnnon suuntakulma on $42,460 \dots^\circ \approx 42,46^\circ$. (1 p. (yht. 10 p.)

Lasketaan suurin työntötulos. Sijoitetaan alkuperäiseen funktioon f muuttujan arvo $x = 42,460 \dots$

$$\begin{aligned} f(42,460 \dots) &= -0,0126 \cdot 42,460 \dots^2 + 1,07 \cdot 42,460 \dots + 0,630 \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)}) \\ &= 23,346 \dots \end{aligned}$$

Pisin työntötulos on $23,346 \dots \text{ m} \approx 23,35 \text{ m}$. (1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus:

Suurimpaan työntötulokseen johtava työntökulma on $42,46^\circ$ astetta, ja sitä vastaava työntötulos on $23,35 \text{ m}$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

5. Lainojen vertailu (12 p.)

Naava ja Silmu ottavat kumpikin 9 000 euron lainan. Naavan laina on tasalyhennyslaina ja Silmun laina on annuiteettilaina. Kummankin lainan vuotuinen korkokanta on 5 % ja laina-aika 3 vuotta. He lyhentävät lainojaan kerran vuodessa. Kumman viimeinen maksuerä on suurempi?

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Tarkastellaan ensin Naavan tasalyhennyslainaa.

Naavan laina on tasalyhennyslaina, joten lainan pääomaa lyhennetään yhtä monta euroa jokaisessa maksuerässä. Maksuerien määrä on 3, joten kunkin erän lyhennyksen suuruus on

$$\text{lyhennys per erä} = \frac{9\,000\text{ €}}{3} = 3\,000\text{ €}.$$

3 p. (yht. 3 p.)

Korko maksetaan jäljellä olevasta lainapääomasta. Lasketaan Naavan lainan viimeisen erän korko jäljellä olevasta lainapääomasta eli 3 000 eurosta. Viimeisessä erässä korkoa kertyy yhden vuoden ajalta.

$$\text{viimeisen erän korko} = 3\,000 \cdot 0,05 = 150\text{ €}$$

1 p. (yht. 4 p.)

Lasketaan Naavan lainan viimeinen maksuerä. Maksuerä on lyhennyksen ja koron summa.

$$3\,000\text{ €} + 150\text{ €} = 3\,150\text{ €}.$$

1 p. (yht. 5 p.)

Tarkastellaan sitten Silmun annuiteettilainaa.

Silmun laina on annuiteettilaina, jossa maksuerä pysyy samana koko laina-ajan. Maksuerä lasketaan annuiteettilainan kaavalla:

$$A = Kq^n \cdot \frac{1 - q}{1 - q^n}$$

Lainapääoma on $K = 9\,000\text{ €}$.

Koska korkokanta on $5\% = 0,05$, niin korkotekijä on $q = 1 + 0,05 = 1,05$.

Maksuerien määrä on $n = 3$.

Sijoitetaan lukuarvot kaavaan:

$$\begin{aligned} A &= 9\,000 \text{ €} \cdot 1,05^3 \cdot \frac{1 - 1,05}{1 - 1,05^3} \quad (4 \text{ p. (yht. 9 p.)}) \\ &= 3304,877 \dots \text{ €} \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)}) \\ &\approx 3304,88 \text{ €} \end{aligned}$$

Pisteytyksestä: Oikeasta lainapääomasta 1 p., oikeasta korkokertoimesta 1 p., oikeasta osoittajasta 1 p. ja oikeasta nimittäjästä 1 p.

Koska Silmun laina on annuiteettilaina, niin tämä on jokaisen – myös viimeisen – maksuerän suuruus.

Naavan ja Silmun lainojen vertailu:

Naavan viimeinen maksuerä on 3 150 € ja Silmun viimeinen maksuerä on 3 304,88 €. Silmun viimeinen maksuerä on suurempi kuin Naavan. (2 p. (yht. 12 p.))

Vastaus: Silmun viimeinen maksuerä on suurempi kuin Naavan.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Tasalyhennyslainassa lainapääomaa lyhennetään yhtä monta euroa jokaisessa maksuerässä, joten lainapääoma pienenee tasaisesti. (1 p. (yht. 1 p.)) Korkoa sen sijaan maksetaan joka kerta euroina mitattuna eri määrä, sillä korko maksetaan jäljellä olevasta lainapääomasta. Koron määrä siis pienenee ajan myötä, kun jäljellä oleva lainapääoma pienenee. (2 p. (yht. 3 p.)) Koska lyhennys pysyy samana ja koron määrä vähenee, niin tasalyhennyslainan jokainen maksuerä on edellistä pienempi. (2 p. (yht. 5 p.))

Annuiteettilainassa taas maksuerä pysyy vakiona koko laina-ajan. (2 p. (yht. 7 p.)) Vaikka myös annuiteettilainassa koron määrä pienenee ajan kuluessa, niin tämä kompensoidaan sillä, että lyhennystä kasvatetaan vastaavalla määrällä.

Ajan kuluessa maksuerä siis pienenee tasalyhennyslainassa ja pysyy samana annuiteettilainassa. (2 p. (yht. 9 p.)) Kokonaisuudessaan pankille maksettu määrä on samaa suuruusluokkaa molemmissa lainamuodoissa, vaikkakin hieman suurempi annuiteettilainassa kuin tasalyhennyslainassa. Tämä on hinta siitä, että heti laina-ajan alussa ei jouduta maksamaan yhtä suuria maksueriä kuin tasalyhennyslainassa. Tästä

johtuen viimeinen maksuerä on annuiteettilainassa suurempi kuin tasalyhennyslainassa. 1 p. (yht. 10 p.)

Naavalla on tasalyhennyslaina ja Silmulla annuiteettilaina, joten Silmun lainan viimeinen maksuerä on suurempi kuin Naavan. 2 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Silmun viimeinen maksuerä on suurempi kuin Naavan.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

6. Jakaumia, kuvaajia ja todennäköisyyksiä (12 p.)

Aineisto:

6. A [Kuva: Onnistumistodennäköisyyksiä prosentteina](#)

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 2–3 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluaakaan jättää tehtävää arvoستavaksi, poista vastauksesi valitsemalla pudotusvalikosta tyhjä rivi.

6.1 Yhdistä seuraaviin väitteisiin sopiva onnistumistodennäköisyyden jakauma kuvasta [6.A](#). Heitetään kerran kahta noppaa ja tavoitteena on saada (6 p.)

kummankin nopan silmäluvuksi parillinen. ^{2 p.}

silmälukujen tuloksi parillinen luku. ^{2 p.}

silmälukujen summa, joka ei ole kolmella jaollinen. ^{2 p.}

Kaikissa vastauslaatikoissa vaihtoehdot ovat: "Jakauma 1", "Jakauma 2", "Jakauma 3", "Jakauma 4", "Jakauma 5".

6.2 Korttipakassa on neljä maata, joista kussakin kortit numeroilla 2–10. Pakasta nostetaan kaksi korttia ilman takaisinpanoa. (6 p.)

Mikä on todennäköisyys sille, että kummankin kortin numero on parillinen?

^{3 p.}

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $\frac{1}{4}$ ", " $\frac{1}{2}$ ", " $\frac{17}{72}$ ", " $\frac{25}{54}$ ", " $\frac{5}{18}$ ", "ei mikään ylläolevista".

Mikä on todennäköisyys sille, että korttien numeroiden tulo on parillinen?

^{3 p.}

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $\frac{1}{4}$ ", " $\frac{17}{21}$ ", " $\frac{18}{36}$ ", " $\frac{3}{4}$ ", " $\frac{5}{6}$ ", " $\frac{65}{81}$ ", "ei mikään ylläolevista".

Ratkaisu.

6.1 Jakauma 1 2 p. (yht. 2 p.)

Jakauma 3 2 p. (yht. 4 p.)

Jakauma 4 2 p. (yht. 6 p.)

Perustelut: Ratkaistaan jokaisen alakohdan onnistumistodennäköisyys ja valitaan sen jälkeen oikea jakauma aineistosta.

Tavoitteena on saada kummankin nopan silmäluvuksi parillinen.

Nopanheitot ovat toisistaan riippumattomia. Yhden nopanheiton tulos ei siis vaikuta toisen nopan tulokseen. Kumpikin noppa voi antaa parittoman silmäluvun (1, 3, tai 5) tai parillisen silmäluvun (2, 4 tai 6). Parillisen ja parittoman silmäluvun todennäköisyydet yhdellä nopalla ovat siis yhtä suuret, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ kummallekin. Tehtävässä heitetään kahta noppaa, joiden molempien pitää antaa parillinen silmäluku, jotta tilanne tulkitaan onnistumiseksi. Todennäköisyys voidaan laskea riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännöllä:

$$\begin{aligned} P(\text{molemmat parillisia}) \\ &= P(\text{Nopan 1 silmäluku on parillinen}) \\ &\quad \cdot P(\text{Nopan 2 silmäluku on parillinen}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \\ &= 0,25 = 25 \% \end{aligned}$$

Onnistumisen todennäköisyys on siis 25 % ja epäonnistumisen todennäköisyys on silloin 75 %. Vastaus on siis Jakauma 1.

Tavoitteena on saada silmälukujen tuloksi parillinen luku.

Nopanheitot ovat toisistaan riippumattomia. Yhden nopanheiton tulos ei siis vaikuta toisen nopan tulokseen. Kumpikin noppa voi antaa parittoman silmäluvun (1, 3, tai 5) tai parillisen silmäluvun (2, 4 tai 6).

Ratkaisuvaihtoehto 1

Taulukoidaan silmälukujen tulot ja lasketaan niistä parillisten tulojen lukumäärät. Taulukoinnin voi tehdä esim. suttupaperille tai käyttää jonkin toisen tehtävän vastaustilaa muistiinpanotilana:

Noppa 2 →

Noppa 1 ↓	1	2	3	4	5	6
1	1	<u>2</u>	3	<u>4</u>	5	<u>6</u>
2	<u>2</u>	<u>4</u>	<u>6</u>	<u>8</u>	<u>10</u>	<u>12</u>
3	3	<u>6</u>	9	<u>12</u>	15	<u>18</u>
4	<u>4</u>	<u>8</u>	<u>12</u>	<u>16</u>	<u>20</u>	<u>24</u>
5	5	<u>10</u>	15	<u>20</u>	25	<u>30</u>
6	<u>6</u>	<u>12</u>	<u>18</u>	<u>24</u>	<u>30</u>	<u>36</u>

Yllä olevassa taulukossa parilliset tulot on alleviivattu. Parillisia tuloja on yhteensä 27 kappaletta. Yhteensä tuloja on 36 eli todennäköisyys sille, että kahden silmäluvun tulo on parillinen on $\frac{27}{36} = 0,75 = 75\%$. Vastaavasti silmälukujen tulo on pariton todennäköisyydellä 25 %. Oikea vastaus on siis Jakauma 3.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Kahden parillisen luvun tulo on aina parillinen. Parillisen ja parittoman luvun tulo on aina parillinen. Kahden parittoman luvun tulo on aina pariton. Kahden nopan silmäluvun tulo on siis pariton ainoastaan siinä tapauksessa, että kummankin nopan silmäluku on pariton. Kuten edellisessä alakohdassa, todennäköisyys sille, että kummankin nopan silmäluku on pariton saadaan riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännöllä:

$$\begin{aligned}
 &P(\text{molemmat parittomia}) \\
 &= P(\text{Nopan 1 silmäluku on pariton}) \\
 &\quad \cdot P(\text{Nopan 2 silmäluku on pariton}) \\
 &= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \\
 &= \frac{9}{36} \\
 &= \frac{1}{4} \\
 &= 0,25 = 25\%
 \end{aligned}$$

Eli todennäköisyys sille, että silmälukujen tulo on pariton on siis 25 %. Todennäköisyys sille, että silmälukujen tulo on parillinen on siis 75 %. Oikea vastaus on siis Jakauma 3.

Tavoitteena on saada silmälukujen summa, joka ei ole kolmella jaollinen.

Taulukoidaan silmälukujen summat ja lasketaan niistä kolmella jaollisten summien lukumäärä. Taulukoinnin voi tehdä esim. suttupaperille tai käyttää jonkin toisen tehtävän vastaustilaa muistiinpanotilana:

		Noppa 2 →					
Noppa 1 ↓		1	2	3	4	5	6
1		2	<u>3</u>	4	5	<u>6</u>	7
2		<u>3</u>	4	5	<u>6</u>	7	8
3		4	5	<u>6</u>	7	8	<u>9</u>
4		5	<u>6</u>	7	8	<u>9</u>	10
5		<u>6</u>	7	8	<u>9</u>	10	11
6		7	8	<u>9</u>	10	11	<u>12</u>

Kolmella jaollisia summia on siis yhteensä 12 kappaletta. Yhteensä summia on 36 kappaletta, eli summia, jotka eivät ole kolmella jaollisia on siis 24 kappaletta. Todennäköisyys sille, että silmälukujen summa ei ole kolmella jaollinen on siis $\frac{24}{36} = \frac{2}{3} = 0,666 \dots \approx 67\%$. Vastaus on siis Jakauma 4.

6.2 ei mikään ylläolevista

3 p. (yht. 9 p.)

$\frac{17}{21}$

3 p. (yht. 12 p.)

Perustelut:

Mikä on todennäköisyys sille, että kummankin kortin numero on parillinen?

Jokaisessa maassa on viisi parillista korttia (2, 4, 6, 8 ja 10) sekä neljä paritonta (3, 5, 7 ja 9). Pakassa on neljä maata, joten parillisia kortteja on $4 \cdot 5 = 20$ ja parittomia kortteja on $4 \cdot 4 = 16$. Kortteja on pakassa yhteensä 36 kappaletta.

Ensimmäinen kortti on siis parillinen todennäköisyydellä $\frac{20}{36}$. Kun pakasta nostetaan toinen kortti, pakassa on enää 35 korttia, joista 19 on parillisia. Toinen kortti on siis parillinen todennäköisyydellä $\frac{19}{35}$. Kummankin kortin numero on

siis parillinen todennäköisyydellä

$$\begin{aligned} P &= \frac{20}{36} \cdot \frac{19}{35} \\ &= \frac{20 \cdot 19}{36 \cdot 35} \\ &= \frac{4 \cdot 5 \cdot 19}{4 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7} \\ &= \frac{19}{9 \cdot 7} \\ &= \frac{19}{63} = 0,301\,587\dots \end{aligned}$$

Vastausvaihtoehdot ovat

$$\frac{1}{4} = 0,25$$

$$\frac{1}{2} = 0,50$$

$$\frac{17}{72} = 0,236\,111\dots$$

$$\frac{25}{54} = 0,462\,962\dots$$

$$\frac{5}{18} = 0,277\,777\dots$$

Oikea todennäköisyys ei siis ole mikään vastausvaihtoehdoista.

Mikä on todennäköisyys sille, että korttien numeroiden tulo on parillinen?

Ratkaisuvaihtoehto 1

Kahden parillisen luvun tulo on aina parillinen. Parillisen ja parittoman luvun tulo on aina parillinen. Kahden parittoman luvun tulo on aina pariton. Kahden kortin numeroiden tulo on siis parillinen, jos molemmat tai ainakin toinen korteista on parillinen. Lasketaan todennäköisyydet näille tilanteille. Edellisen kohdan perusteella todennäköisyys sille, että kummankin kortin luku on parillinen on $\frac{19}{63}$.

Lasketaan seuraavaksi todennäköisyys sille, että ensimmäinen kortti on parillinen ja toinen on pariton. Ensimmäinen kortti on parillinen todennäköisyydellä $\frac{20}{36}$. Kun pakasta nostetaan toinen kortti, pakassa on enää 35 korttia, joista 16 on parittomia. Toinen kortti on siis pariton todennäköisyydellä $\frac{16}{35}$. Todennäköisyys sille, että ensimmäinen kortti on parillinen ja toinen ei ole on:

$$\begin{aligned} P(\text{parillinen ja pariton}) &= P(\text{Kortti 1 on parillinen}) \\ &\quad \cdot P(\text{Kortti 2 on pariton}) \\ &= \frac{20}{36} \cdot \frac{16}{35} \\ &= \frac{20 \cdot 16}{36 \cdot 35} \\ &= \frac{4 \cdot 5 \cdot 16}{4 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7} \\ &= \frac{16}{9 \cdot 7} \\ &= \frac{16}{63} \end{aligned}$$

Lasketaan seuraavaksi todennäköisyys tilanteelle, missä ensimmäinen kortti on pariton ja toinen kortti on parillinen. Todennäköisyys sille, että ensimmäinen kortti on pariton on $\frac{16}{36}$. Kun pakasta nostetaan toinen kortti, pakassa on enää 35 korttia, joista 20 on parillisia. Toinen kortti on siis parillinen todennäköisyydellä $\frac{20}{35}$. Todennäköisyys sille, että ensimmäinen kortti on pariton ja toinen kortti on

parillinen on siis:

$$\begin{aligned} P(\text{pariton ja parillinen}) &= P(\text{Kortti 1 on pariton}) \\ &\quad \cdot P(\text{Kortti 2 on parillinen}) \\ &= \frac{16}{36} \cdot \frac{20}{35} \\ &= \frac{16 \cdot 20}{36 \cdot 35} \\ &= \frac{16 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7} \\ &= \frac{16}{9 \cdot 7} \\ &= \frac{16}{63} \end{aligned}$$

Lasketaan lopuksi yhteen tilanteiden "molemmat kortit parillisia" , "ensimmäinen parillinen ja toinen pariton" sekä "ensimmäinen pariton ja toinen parillinen" todennäköisyydet:

$$\begin{aligned} P(\text{korttien tulo on parillinen}) &= P(\text{molemmat parillisia}) + P(\text{parillinen ja pariton}) \\ &\quad + P(\text{pariton ja parillinen}) \\ &= \frac{19}{63} + \frac{16}{63} + \frac{16}{63} \\ &= \frac{19 + 16 + 16}{63} \\ &= \frac{51}{63} \\ &= \frac{17 \cdot 3}{21 \cdot 3} \\ &= \frac{17}{21} = 0,809\,523\dots \end{aligned}$$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Ratkaistaan tehtävä vastatapahtuman avulla. Jos korttien numeroiden tulo ei ole parillinen, sen on oltava pariton. Kahden parillisen luvun tulo on aina parillinen. Parillisen ja parittoman luvun tulo on aina parillinen. Kahden parittoman luvun tulo on aina pariton. Kahden kortin numeroiden tulo on siis pariton, jos molemmat kortit ovat parittomia.

Kun ensimmäinen kortti nostetaan pakasta, pakassa on yhteensä 36 korttia, joista 16 kappaletta on parittomia. Todennäköisyys sille, että ensimmäinen kortti on pariton, on siis $\frac{16}{36}$.

Kun toinen kortti nostetaan pakasta, pakassa on enää 35 korttia, joista 15 kappaletta on parittomia. Todennäköisyys sille, että toinenkin kortti on pariton, on siis $\frac{15}{35}$.

Jotta molemmat kortit olisivat parittomia, täytyy molempien edellä kuvattujen tilanteiden tapahtua. Niiden yhteinen todennäköisyys voidaan siis laskea kertolaskulla:

$$\begin{aligned} P(\text{korttien tulo on pariton}) &= P(\text{Kortti 1 on pariton}) \\ &\quad \cdot P(\text{Kortti 2 on pariton}) \\ &= \frac{16}{36} \cdot \frac{15}{35} \\ &= \frac{16 \cdot 15}{36 \cdot 35} \\ &= \frac{4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7} \\ &= \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 7} \\ &= \frac{12}{63} \end{aligned}$$

Yllä laskettu tilanne, missä korttien numeroiden tulo on pariton on vastatapahtuma tapahtumalle "Korttien numeroiden tulo on parillinen". Tämän tapahtuman

todennäköisyys on siis

$$\begin{aligned}P(\text{korttien tulo on parillinen}) &= 1 - P(\text{korttien tulo on pariton}) \\&= \frac{63}{63} - \frac{12}{63} \\&= \frac{63 - 12}{63} \\&= \frac{51}{63} \\&= \frac{17 \cdot 3}{21 \cdot 3} \\&= \frac{17}{21} = 0,809\,523\dots\end{aligned}$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

7. Piparkakkurasiat (12 p.)

Aineisto:

7. A [Kuva: Rasiat eri kuvakulmista](#)

Joulun piparkakut pakataan kolmeen erikokoiseen ympyräpohjaiseen peltirasiaan, jotka näkyvät kuvassa [7.A](#).

- Suurimman rasian ympärysmitta on 78,5 cm ja korkeus on 10,0 cm.
- Keskimmäisen rasian säde on 1,5 cm pienempi ja korkeus 1,0 cm pienempi kuin suurimman rasian.
- Pienimmän rasian säde on 2,5 cm pienempi ja korkeus 1,0 cm pienempi kuin keskimmäisen rasian.

Laske rasioiden yhteistilavuus desilitran tarkkuudella.

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Lasketaan erikseen kunkin rasian tilavuus. Rasiat ovat muodoltaan suoria ympyrälieriöitä, joiden tilavuus lasketaan kaavalla:

$$V = \pi r^2 h$$

missä r on pohjan säde ja h on korkeus.

Lasketaan suurimman rasian tilavuus. Suurimman rasian ympärysmitta on $p = 78,5$ cm. Lasketaan tämän avulla pohjan säde r_1 .

$$p = 2\pi r_1$$

$$78,5 \text{ cm} = 2\pi r_1 \quad || : 2\pi$$

$$r_1 = \frac{78,5 \text{ cm}}{2\pi}$$

$$r_1 = 12,493 \dots \text{ cm}$$

2 p. (yht. 2 p.)

Suurimman rasian pohjan säde on siis $r_1 = 12,493 \dots \text{ cm}$. Suurimman rasian korkeus on $10,0 \text{ cm}$. Lasketaan suurimman rasian tilavuus.

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi r_1^2 h_1 \\ V_1 &= \pi \cdot (12,493 \dots \text{ cm})^2 \cdot 10 \text{ cm} \\ &= 4903,762 \dots \text{ cm}^3 \quad \text{2 p. (yht. 4 p.)} \end{aligned}$$

Keskimmäisen rasian säde on $1,5 \text{ cm}$ pienempi kuin suurimman rasian säde. Keskimmäisen rasian säde on

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 - 1,5 \text{ cm} \\ &= 12,493 \dots \text{ cm} - 1,5 \text{ cm} \\ &= 10,993 \dots \text{ cm.} \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)} \end{aligned}$$

Vastaavasti keskimmäisen rasian korkeus on $1,0 \text{ cm}$ pienempi kuin suurimman rasian. Keskimmäisen rasian korkeus on:

$$h_2 = 10,0 \text{ cm} - 1,0 \text{ cm} = 9,0 \text{ cm.} \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

Lasketaan keskimmäisen rasian tilavuus.

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi r_2^2 h_2 \\ &= \pi \cdot (10,993 \dots \text{ cm})^2 \cdot 9,0 \text{ cm} \\ &= 3417,253 \dots \text{ cm}^3 \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)} \end{aligned}$$

Pienimmän rasian säde on $2,5 \text{ cm}$ pienempi kuin keskimmäisen rasian. Pienimmän rasian säde on

$$\begin{aligned} r_3 &= r_2 - 2,5 \text{ cm} \\ &= 10,993 \dots \text{ cm} - 2,5 \text{ cm} \\ &= 8,493 \dots \text{ cm.} \end{aligned}$$

Pienimmän rasian korkeus on $1,0 \text{ cm}$ pienempi kuin keskimmäisen rasian. Pienimmän rasian korkeus on

$$h_3 = 9,0 - 1,0 = 8,0 \text{ cm.}$$

Lasketaan pienimmän rasian tilavuus.

$$\begin{aligned} V_3 &= \pi r_3^2 h_3 \\ &= \pi \cdot (8,493 \dots \text{ cm})^2 \cdot 8,0 \text{ cm} \\ &= 1813,134 \dots \text{ cm}^3 \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)} \end{aligned}$$

Lasketaan yhteen kaikkien rasioiden tilavuudet:

$$\begin{aligned} V_{\text{yhteensä}} &= V_1 + V_2 + V_3 \\ &= 4903,762 \dots \text{ cm}^3 + 3417,253 \dots \text{ cm}^3 + 1813,134 \dots \text{ cm}^3 \\ &= 10\,134,150 \dots \text{ cm}^3 \quad \text{2 p. (yht. 10 p.)} \end{aligned}$$

Muutetaan tilavuus desilitroiksi.

$$\begin{aligned} V_{\text{yhteensä}} &= 10\,134,150 \dots \text{ cm}^3 \\ &= 10,1341 \dots \text{ dm}^3 \quad || 1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l} \\ &= 10,1341 \dots \text{ l} \\ &= 101,341 \dots \text{ dl} \\ &\approx 101 \text{ dl} \quad \text{2 p. (yht. 12 p.)} \end{aligned}$$

Vastaus: Rasioiden yhteenlaskettu tilavuus on noin 101 dl.

Pisteytyksestä: Vastauksen voi antaa myös muodossa 10,1 l.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Rasiat ovat muodoltaan suoria ympyrälieriöitä, joiden tilavuus lasketaan kaavalla:

$$V = \pi r^2 h$$

missä r on pohjan säde ja h on korkeus.

Suurimman rasian ympäröysmitta on $p = 78,5 \text{ cm}$. Lasketaan tämän avulla pohjan säde r_1 .

$$\begin{aligned} p &= 2\pi r_1 \\ 78,5 \text{ cm} &= 2\pi r_1 \quad || : 2\pi \\ r_1 &= \frac{78,5 \text{ cm}}{2\pi} \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)} \\ r_1 &= 12,493 \dots \text{ cm} \end{aligned}$$

Suurimman rasian pohjan säde on siis $r_1 = 12,493 \dots \text{ cm}$.

Keskimmäisen rasian säde on 1,5 cm pienempi kuin suurimman rasian säde. Keskimmäisen rasian säde on

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 - 1,5 \text{ cm} \\ &= 12,493 \dots \text{ cm} - 1,5 \text{ cm} \\ &= 10,993 \dots \text{ cm.} \end{aligned}$$

1 p. (yht. 3 p.)

Pienimmän rasian säde on 2,5 cm pienempi kuin keskimmäisen rasian. Pienimmän rasian säde on

$$\begin{aligned} r_3 &= r_2 - 2,5 \text{ cm} \\ &= 10,993 \dots \text{ cm} - 2,5 \text{ cm} \\ &= 8,493 \dots \text{ cm.} \end{aligned}$$

1 p. (yht. 4 p.)

Keskimmäisen rasian korkeus on 1,0 cm pienempi kuin suurimman rasian. Keskimmäisen rasian korkeus on:

$$h_2 = 10,0 \text{ cm} - 1,0 \text{ cm} = 9,0 \text{ cm.}$$

1 p. (yht. 5 p.)

Pienimmän rasian korkeus on 1,0 cm pienempi kuin keskimmäisen rasian. Pienimmän rasian korkeus on siis:

$$h_3 = 9,0 \text{ cm} - 1,0 \text{ cm} = 8,0 \text{ cm.}$$

1 p. (yht. 6 p.)

Lasketaan rasioiden yhteinen tilavuus:

$$\begin{aligned} V_{\text{yhteensä}} &= V_1 + V_2 + V_3 \\ &= \pi r_1^2 h_1 + \pi r_2^2 h_2 + \pi r_3^2 h_3 \\ &= \pi \cdot (12,493 \dots \text{ cm})^2 \cdot 10,0 \text{ cm} + \pi \cdot (10,993 \dots \text{ cm})^2 \cdot 9,0 \text{ cm} \\ &\quad + \pi \cdot (8,493 \dots \text{ cm})^2 \cdot 8,0 \text{ cm} \\ &= 4903,762 \dots \text{ cm}^3 + 3417,253 \dots \text{ cm}^3 + 1813,134 \dots \text{ cm}^3 \\ &= 10\,134,150 \dots \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

1 p. (yht. 7 p.)

1 p. (yht. 8 p.)

1 p. (yht. 9 p.)

1 p. (yht. 10 p.)

Muutetaan tilavuus desilitroiksi.

$$\begin{aligned}V_{\text{yhteensä}} &= 10\,134,150 \dots \text{ cm}^3 \\&= 10,1341 \dots \text{ dm}^3 \quad || 1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l} \\&= 10,1341 \dots \text{ l} \\&= 101,341 \dots \text{ dl} \\&\approx 101 \text{ dl} \quad \text{2 p. (yht. 12 p.)}\end{aligned}$$

Vastaus: Rasioiden yhteenlaskettu tilavuus on noin 101 dl.

Pisteytyksestä: Vastauksen voi antaa myös muodossa 10,1 l.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

8. Moottoritien kustannukset (12 p.)

Helsingin Sanomat kirjoitti 20.6.1972:

Suomen suurin tietyö jyrää maiseman halki Helsingistä Lahteen. Leveimmillään kuusikaistainen Lahden moottoritie maksaa noin 320 miljoonaa markkaa, yli 3 markkaa millimetri.

Vuonna 2018 valmistuneessa tiehankkeessa Haminasta Vaalimaalle kulkevan 32 kilometrin pituisen moottoritieosuuden hinta oli 550 miljoonaa euroa. Tässä tehtävässä eri vuosien kustannuksia verrataan käyttämällä "Aku Ankka -indeksiä", joka perustuu seuraavaan tietoon: Aku Ankka -lehden irtonumero maksoi 0,80 markkaa vuonna 1972 ja 3,50 euroa vuonna 2018.

Mitkä olivat Helsinki-Lahti-moottoritien kustannukset vuoden 2018 rahassa?

Kuinka monta prosenttia kalliimpi Hamina-Vaalimaa-moottoritie oli kilometriä kohti kuin Helsinki-Lahti-moottoritie rahan arvon muutos huomioiden?

Ratkaisu.

Ensimmäinen kysymys: *Mitkä olivat Helsinki-Lahti-moottoritien kustannukset vuoden 2018 rahassa?*

Lasketaan "Aku Ankka -indeksin" avulla muuntokerroin vuoden 1972 markan ja vuoden 2018 euron välillä. Vuonna 1972 Aku Ankka -lehden hinta oli 0,80 mk ja vuonna 2018 se oli 3,50 €, joten muuntokerroin on

$$\frac{3,50}{0,80} = 4,375. \quad \text{3 p. (yht. 3 p.)}$$

Kun siirrytään vuoden 1972 rahasta vuoden 2018 rahaan, pitää rahamäärä kertoa luvulla 4,375. Jos siirrytään toiseen suuntaan, pitää rahamäärä jakaa luvulla 4,375.

Helsinki-Lahti-moottoritien kustannukset olivat vuonna 1972 yhteensä 320 000 000 mk. Muutetaan tämä summa vastaamaan vuoden 2018 euroja:

$$320\,000\,000 \cdot 4,375 = 1\,400\,000\,000 \quad \text{3 p. (yht. 6 p.)}$$

Siis Helsinki-Lahti-moottoritien kustannukset vuoden 2018 rahassa olivat 1 400 000 000 € = 1,4 mrd. €.

Toinen kysymys: *Kuinka monta prosenttia kalliimpi Hamina-Vaalimaa-moottoritie oli kilometriä kohti kuin Helsinki-Lahti-moottoritie rahan arvon muutos huomioiden?*

Hamina-Vaalimaa-moottoritien kokonaiskustannukset olivat 550 000 000 € ja pituus 32 kilometriä. Lasketaan Hamina-Vaalimaa-moottoritien kustannukset kilometriä kohti.

$$\frac{550\,000\,000\text{ €}}{32\text{ km}} = 17\,187\,500\text{ €/km} \quad (2\text{ p. (yht. 8 p.)})$$

Helsinki-Lahti-moottoritiestä annettiin tieto, että se maksoi yli 3 mk millimetriä kohti. Koska 1 km = 1 000 000 mm, niin Helsinki-Lahti-moottoritie maksoi kilometriä kohti yli

$$1\,000\,000 \cdot 3\text{ mk} = 3\,000\,000\text{ mk.} \quad (1\text{ p. (yht. 9 p.)})$$

Muutetaan tämä rahamäärä vuoden 2018 rahaksi:

$$3\,000\,000 \cdot 4,375\text{ €} = 13\,125\,000\text{ €} \quad (1\text{ p. (yht. 10 p.)})$$

Siis Helsinki-Lahti-moottoritie maksoi yli 13 125 000 €/km. *Laskun saa tehdä niin, että ajattelee hinnan olleen täsmälleen 13 125 000 €/km, eli tehtävänannon sanan "yli" saa jättää huomiotta.*

Lasketaan, kuinka monta prosenttia kalliimpi olisi ollut kilometri Hamina-Vaalimaa-moottoritietä verrattuna kilometriin Helsinki-Lahti-moottoritietä, jos Helsinki-Lahti-moottoritien kilometrihintaa olisi ollut täsmälleen 13 125 000 €.

$$\begin{aligned} & \frac{17\,187\,500 - 13\,125\,000}{13\,125\,000} \quad (1\text{ p. (yht. 11 p.)}) \\ &= \frac{4\,062\,500}{13\,125\,000} \\ &= 0,309523\dots \\ &= 30,952\dots \% \\ &\approx 31\% \quad (1\text{ p. (yht. 12 p.)}) \end{aligned}$$

Koska Helsinki-Lahti-moottoritien kilometrihintaa oli kuitenkin suurempi kuin 13 125 000 €, niin hintojen prosentuaalinen ero ei ole aivan näin suuri. Siis Hamina-Vaalimaa-moottoritie oli kilometriä kohti alle 31 % kalliimpi kuin Helsinki-Lahti-moottoritie, kun rahan arvon muutos huomioidaan. Tätä yli- ja alle-sanojen huomiointia ei vaadita.

Vastaus:

Helsinki-Lahti-moottoritien kustannukset vuoden 2018 rahassa olivat 1,4 mrd. €.

Hamina-Vaalimaa-moottoritie oli kilometriä kohti alle 31 % kalliimpi kuin Helsinki-Lahti-moottoritie, kun rahan arvon muutos huomioidaan.

Vastauksesta saa jättää pois sanan "alle".

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

9. Perusteltu binomijakauma (12 p.)

Noppaa heitetään kuusi kertaa. Todennäköisyys saada silmäluku 6 täsmälleen neljä kertaa on binomitodennäköisyyden kaavan mukaan

$$\binom{6}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{15552} \approx 0,00804.$$

Selitä käytetty kaava ja kaikki siinä esiintyvät osat, eli perustele binomitodennäköisyyden kaava tässä tilanteessa.

Ratkaisu.

Binomitodennäköisyyden kaava on

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

missä n on toistojen lukumäärä, k on onnistumisten lukumäärä ja p on onnistumistodennäköisyys yksittäisessä tapahtumassa. Tehtävän tilanteessa siis toistoja on yhteensä 6 kpl ja onnistumisella tarkoitetaan nopanheiton silmälukua kuusi. Onnistumisten lukumäärä on 4. Lisäksi on laskettu yksittäisen onnistumisen todennäköisyys ($p = \frac{1}{6}$) ja sen vastatapahtuman todennäköisyys.

Tehtävän tilanteessa binomitodennäköisyyden kaavassa on kolme tekijää: ensimmäisenä binomikerroin $\binom{6}{4}$, tämän jälkeen tekijä $\left(\frac{1}{6}\right)^4$ ja lopuksi tekijä $\left(\frac{5}{6}\right)^2$. Aloitetaan binomitodennäköisyyden kaavan perustelu keskimmäisestä tekijästä.

Tekijä $\left(\frac{1}{6}\right)^4$ on kuvaa todennäköisyyttä saada neljällä heitolla täsmälleen neljä kuutosta. 2 p. (yht. 2 p.) Todennäköisyys saada silmäluku 6 yhdellä heitolla on $\frac{1}{6}$ 1 p. (yht. 3 p.)

, sillä suotuisia tuloksia (nopan silmäluku on kuusi) on täsmälleen yksi kappale ja kaikkia mahdollisia lopputuloksia on kuusi kappaletta (silmäluvut yksi, kaksi, kolme, neljä, viisi ja kuusi). Todennäköisyyden määritelmä on suotuisten tapahtumien lukumäärä jaettuna kaikkien tapahtumien lukumäärällä eli todennäköisyys saada yhdellä heitolla silmäluku kuusi on $\frac{1}{6}$.

Yllä olevassa tekijässä neljäs potenssi tulee riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännöstä. Jotta saadaan neljä kuutosta, pitää tapahtuma "saadaan silmäluku kuusi" tapahtua neljä kertaa. Nopanheitot ovat toisistaan riippumattomia (eli yhden nopanheiton tulos ei vaikuta seuraavaan heittoon), joten todennäköisyys tilanteelle "saadaan silmäluku kuusi" JA "saadaan silmäluku kuusi" on yksittäisen kuutosen toden-

näköisyyksien tulo. Kuutosta pitää nyt saada neljä, joten

$$\begin{aligned}
 P(\text{saadaan 4 kuutosta neljällä heitolla}) \\
 &= P(\text{saadaan kuutonen}) \cdot P(\text{saadaan kuutonen}) \cdot \\
 &\quad P(\text{saadaan kuutonen}) \cdot P(\text{saadaan kuutonen}) \\
 &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \\
 &= \left(\frac{1}{6}\right)^4
 \end{aligned}$$

Tekijä $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ on todennäköisyys sille, että nopalla saadaan mikä tahansa muu silmäluku kuin kuusi kahdella heitolla. Luku $\frac{5}{6}$ on todennäköisyys sille, että yksittäisellä heitolla ei saada silmälukua kuusi. 1 p. (yht. 4 p.) Kuten edellä, muita silmälukuja kuin kuusi pitää saada kaksi kappaletta. Tämä todennäköisyys on $\left(\frac{5}{6}\right)^2$. 2 p. (yht. 6 p.)

Yllä olevat todennäköisyydet eivät ota mitään kantaa tapahtumien järjestykseen. Todennäköisyys tilanteelle, missä neljällä ensimmäisellä heitolla saadaan neljä kuutosta ja sen jälkeen kahdella heitolla mitkä tahansa silmäluvut paitsi kuutokset, voidaan laskea kertolaskulla:

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \quad \text{2 p. (yht. 8 p.)}$$

Tehtävän tilanteessa ei kuitenkaan ole väliä sillä, missä järjestyksessä kuutokset ja muut silmäluvut saadaan. **Silmälukusarjat**

6	6	6	6	*	*
6	6	6	*	6	*
6	6	6	*	*	6

jne.

ovat kaikki aivan yhtä hyviä.

Binomikaavan ensimmäinen tekijä, binomikerroin $\binom{6}{4}$, kertoo kaikkien sopivien silmälukusarjojen lukumäärän. 2 p. (yht. 10 p.) Toisin sanoen tämä kertoo, kuinka monella eri tavalla kuudella nopanheitolla voidaan saada täsmälleen neljä kuutosta ja kaksi muuta silmälukua. 2 p. (yht. 12 p.)

Binomitodennäköisyyden kaava tehtävän tilanteessa koostuu siis tekijöistä "todennäköisyys saada täsmälleen neljä kuutosta" $\left(\frac{1}{6}\right)^4$, "todennäköisyys saada täsmälleen

kaksi silmälukua, jotka eivät ole kuutosia" $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ sekä tekijästä "kaikkien käypien järjestysten lukumäärä" $\binom{6}{4}$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

10. Terminen talvi (18 p.)

Aineisto:

10. A [Teksti: Termisen talven määritelmä ja esimerkki](#)
10. B [Taulukko: Keskilämpötilat Enontekiön Kilpisjärven Saanan havaintoasemalta aikaväliltä 1.9.2021–30.11.2021](#)

Valitse osatehtävissä 10.1–10.2 oikea vaihtoehto. Näitä vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 1–2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p. Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvosteltavaksi, poista vastauksesi valitsemalla pudotusvalikosta tyhjä rivi.

Tarkastellaan Saanan havaintoaseman lämpötiloja taulukosta [10.B](#) käyttäen tekstin [10.A](#) käsitteitä. Teksti on Ilmatieteen laitoksen termisiä vuodenaikoja koskeva esitys kokonaisuudessaan. Tehtävän ratkaisua varten täytyy tekstistä hakea itse tarvittavat tiedot.

10.1 Valitse oikea vaihtoehto. (2 p.)

Syyskuun korkein päivän keskilämpötila asteen tarkkuudella oli ¹ p. celsiusastetta, ja se saavutettiin ¹ p.

Ensimmäisen vastauslaatikon vaihtoehdot: ""–5", "–4", "–3", "–2", "–1", "0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9", "10".

Toisen vastauslaatikon vaihtoehdot: "1.9.", "2.9.", "3.9.", "4.9.", "5.9.", "6.9.", "7.9.", "8.9.", "9.9.", "10.9.", "11.9.", "12.9.", "13.9.", "14.9.", "15.9.", "16.9.", "17.9.", "18.9.", "19.9.", "20.9.", "21.9.", "22.9.", "23.9.", "24.9.", "25.9.", "26.9.", "27.9.", "28.9.", "29.9.", "30.9.".

10.2 Valitse oikea vaihtoehto. (2 p.)

Syyskuun keskilämpötila asteen tarkkuudella oli celsiusastetta.

Vastauslaatikon vaihtoehdot: ""–5", "–4", "–3", "–2", "–1", "0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9", "10".

10.3 Kirjoita osatehtävien 10.3.1 ja 10.3.2 vastaukset vastauskenttään. (14 p.)

10.3.1 Piirrä pylväsdiagrammi päivittäisistä keskilämpötiloista. (4 p.)

10.3.2 Määritä lämpösumman avulla, milloin terminen talvi alkoi Saanalla vuonna 2021. (10 p.)

Ratkaisu.

10.1 Perusteluja ei vaadita. Näin vastaukset saadaan:

Määritetään syyskuun korkein päivän keskilämpötila. Alla on käytetty LibreOffice Calcin toimintoa =MAKS(), joka etsii halutuista soluista suurimman arvon.

	A	B	C	D	E	F
1	Vuosi	Kuukausi	Päivämäärä	Ilman lämpötila (Celsiusastetta)		Syyskuun korkein
2	2021	9	1	0,5		=MAKS(D2:D31)
3	2021	9	2	0,2		
4	2021	9	3	-1,1		
5	2021	9	4	-0,8		
6	2021	9	5	1,8		

	A	B	C	D	E	F
1	Vuosi	Kuukausi	Päivämäärä	Ilman lämpötila (Celsiusastetta)		Syyskuun korkein
2	2021	9	1	0,5		7,3
3	2021	9	2	0,2		
4	2021	9	3	-1,1		
5	2021	9	4	-0,8		
6	2021	9	5	1,8		

Suurin arvo voidaan etsiä myös lukemalla taulukosta syyskuun arvot ja katso-
malla, mikä niistä on suurin.

Syyskuun korkein päivän keskilämpötila on $7,3^{\circ}\text{C} \approx 7^{\circ}\text{C}$, joka saavutettiin
27.9.

Vastaus: Syyskuun korkein päivän keskilämpötila on 7°C 1 p. (yht. 1 p.), joka saa-
vutettiin 27.9. 1 p. (yht. 2 p.)

10.2 Perusteluja ei vaadita. Näin vastaus saadaan:

Lasketaan syyskuun keskilämpötila taulukkolaskentaohjelmalla. Käytetään toi-
mintoa =KESKIARVO().

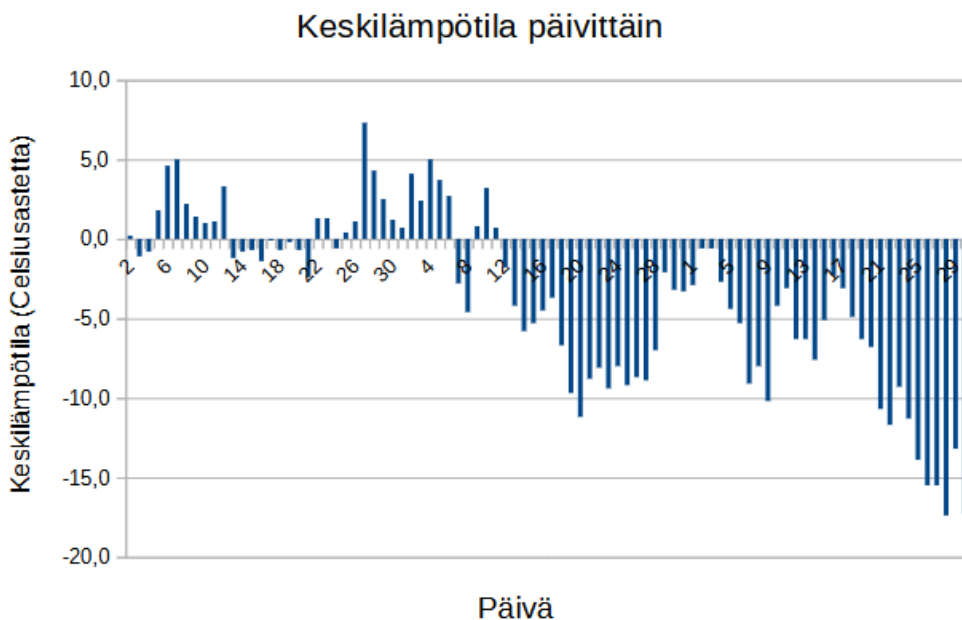
	A	B	C	D	E	F	G
1	Vuosi	Kuukausi	Päivämäärä	Ilman lämpötila (Celsiusastetta)		Syyskuun korkein	
2	2021	9	1	0,5		=MAKS(D2:D31)	
3	2021	9	2	0,2			
4	2021	9	3	-1,1		Syyskuun keskilämpötila (Celsiusastetta)	
5	2021	9	4	-0,8		=KESKIARVO(D2:D31)	
6	2021	9	5	1,8			

	A	B	C	D	E	F	G
1	Vuosi	Kuukausi	Päivämäärä	Ilman lämpötila (Celsiusastetta)	Syyskuun korkein		
2	2021	9	1	0,5		7,3	
3	2021	9	2	0,2			
4	2021	9	3	-1,1		Syyskuun keskilämpötila (Celsiusastetta)	
5	2021	9	4	-0,8		0,993333333333333	
6	2021	9	5	1,8			

Syyskuun keskilämpötila oli $0,993 \dots ^\circ\text{C} \approx 1,0 ^\circ\text{C}$.

Vastaus: Syyskuun keskilämpötila oli $1,0 ^\circ\text{C}$. 2 p. (yht. 4 p.)

- 10.3.1 Piirretään pylväsdiagrammi lämpötiloista. Vaaka-akselilla on päivät aikajärjestyksessä, ja pystyakselilta luetaan keskilämpötila celsiusasteina. Tässä ratkaisussa päivämääriin ei ole kirjoitettu kuukausia, mutta koska päivät ovat aikajärjestyksessä, ei sekaannuksen vaaraa ole. Päivät voidaan myös numeroida alusta alkaen niin, että lokakuun ensimmäinen päivä on päivä 31, lokakuun toinen päivä on päivä 32 ja niin edelleen.



4 p. (yht. 8 p.)

- 10.3.2 Lisätään taulukkoon sarake, joka näyttää lämpösumman kertymän syyskuun alusta asti.

	A	B	C	D	E	F
1	Vuosi	Kuukau	Päivämä	Ilman lämpötila (Cel	Lämpösumman kertymä (Celsiusastetta)	
2	2021	9	1	0,5	=D2	
3	2021	9	2	0,2	=E2+D3	
4	2021	9	3	-1,1	=E3+D4	
5	2021	9	4	-0,8	=E4+D5	
6	2021	9	5	1,8	=E5+D6	

	A	B	C	D	E	F
1	Vuosi	Kuukau	Päivämä	Ilman lämpötila (Cel	Lämpösumman kertymä (Celsiusastetta)	
2	2021	9	1	0,5	0,5	
3	2021	9	2	0,2	0,7	
4	2021	9	3	-1,1	-0,4	
5	2021	9	4	-0,8	-1,2	
6	2021	9	5	1,8	0,6	

4 p. (yht. 12 p.)

Määritetään lämpösumman suurin arvo LibreOffice Calcin =MAKS()-komennolla.

	A	B	C	D	E	F
1	Vuosi	Kuukau	Päivämä	Ilman lämpötila (Cel	Lämpösumman kertymä (Celsiusastetta)	
2	2021	9	1	0,5	=D2	=MAKS(E2:E92)
3	2021	9	2	0,2	=E2+D3	

	A	B	C	D	E	F
1	Vuosi	Kuukau	Päivämä	Ilman lämpötila (Cel	Lämpösumman kertymä (Celsiusastetta)	
2	2021	9	1	0,5	0,5	48,4
3	2021	9	2	0,2	0,7	

3 p. (yht. 15 p.)

Lämpösumman suurin arvo on 48,4° C, joka saavutettiin 6.10. 1 p. (yht. 16 p.) Terminen talvi alkoi siis 7.10. 2 p. (yht. 18 p.)

Suurin arvo voidaan etsiä myös lukemalla taulukosta Lämpösumma-sarakkeen arvot ja katsomalla, mikä niistä on suurin, tai piirtämällä lämpösummasta kuvaaja ja lukemalla vastaukset siitä.

Pisteytyksestä: Jos suurin arvo tehdään ilman =MAKS()-komentoa, pisteet annetaan seuraavasti:

- Lämpösumma-sarakkeesta saa 4 pistettä.

- Lämpösumman kuvaajan piirtämisestä saa 2 pistettä. Kuvaajaa ei kuitenkaan vaadita, sillä suurimman lämpösumman voi katsoa taulukosta myös ilman kuvaajaa.
- Suurimmasta lämpösummasta 48,4 astetta saa 3 pistettä, jos ei saanut vielä lämpösumman kuvaajasta pisteitä, ja 1 pisteen, jos sai jo aiemmin 2 pistettä lämpösumman kuvaajasta.
- Suurimman lämpösumman päivämäärästä 6.10. saa yhden pisteen.
- Talven alkamispäivästä 7.10. saa 2 pistettä.

Vastaus: Terminen talvi alkoi 7.10.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

11. Suhteellinen vaalitapa (18 p.)

Aineisto:

- 11. A [Taulukko: Äänestystulokset](#)
- 11. B [Teksti: D'Hondtin suhteellinen vaalitapa](#)

Kuvitteellisessa Keski-Maan vaalipiirissä on neljä puoluetta: Hobittipuolue, Ihmispuolue, Haltiapuolue ja Kääpiöpuolue. Taulukossa [11.A](#) on esitetty Keski-Maassa toimitetun vaalin äänestystulokset.

Vastaa seuraaviin kysymyksiin olettaen, että Keski-Maassa käytetään d'Hondtin suhteellista vaalitapaa, joka on kuvattu tekstissä [11.B](#).

- 11.1 Mikä oli vaalien äänestysprosentti, kun Keski-Maassa on 290 754 äänioikeutettua? (3 p.)
- 11.2 Laske kunkin ehdokkaan vertausluku. Ketkä tulevat valituiksi, kun vaalipiiristä valitaan viisi edustajaa? (5 p.)
- 11.3 Kuinka monta henkilökohtaista ääntä enemmän Pippinin olisi pitänyt saada, jotta hän olisi tullut valituksi ilman arvontaa? Oletetaan, että muiden äänimäärät eivät muutu. (5 p.)
- 11.4 Suhteellisen vaalitavan tavoite on, että edustajien paikat jakautuvat samassa suhteessa kuin puolueiden saamat äänet. Pohdi, kuinka hyvin tämä toteutui näissä vaaleissa. (5 p.)

Ratkaisu.

- 11.1 Lasketaan annetut äänet yhteen. **Äänet voidaan laskea yhteen joko suoraan taulukon arvoista tai käyttämällä taulukkolaskentaohjelmaa. Alla on esitetty äänten yhteenlasku taulukkolaskentaohjelmalla.**

	B	C	D	E
1	Puolue	Äänet		
2	Hobittipuolue	34320		
3	Hobittipuolue	11029		
4	Hobittipuolue	8867		
5	Hobittipuolue	6660		
6	Hobittipuolue	3162		
7	Ihmispuolue	61203		
8	Ihmispuolue	4650		
9	Ihmispuolue	17		
10	Haltiaapuolue	10221		
11	Haltiaapuolue	6790		
12	Haltiaapuolue	4923		
13	Kääpiöpuolue	19034		
14	Kääpiöpuolue	2589		
15		=SUMMA(C2:C14)		173465

Ääniä annettiin yhteensä 173 465. 2 p. (yht. 2 p.)

Äänioikeutettuja oli 290 754. Äänestysprosentti lasketaan jakamalla annettujen äänien määrä äänioikeutettujen määrällä.

$$\begin{aligned}
 \text{Äänestysprosentti} &= \frac{173\,465}{290\,754} \\
 &= 0,5966040 \dots \\
 &= 59,66040 \dots \% \\
 &\approx 60 \% \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}
 \end{aligned}$$

Vastaus: Äänestysprosentti oli 60.

Puoluekohtaisia äänimääriä ei ole välttämätöntä laskea vielä kohdassa 11.1, sillä niitä tarvitaan vasta kohdassa 11.2.

11.2 D'Hondtin menetelmässä kullekin ehdokkaalle lasketaan vertausluvut seuraavasti:

- Eniten ääniä saanut ehdokas saa vertausluvukseen puolueensa kokonaissäänimäärän.

- Toiseksi eniten ääniä saanut ehdokas saa vertausluvukseen puolet puolueen kokonaisäänimäärästä, kolmanneksi eniten ääniä saanut kolmasosan jne.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Tämä ratkaisuvaihtoehto on tehty hyödyntymällä taulukkolaskentaohjelmaa.

Lasketaan kunkin puolueen saama kokonaisäänimäärä ja kunkin ehdokkaan vertausluku taulukkolaskentaohjelman avulla.

	A	B	C	D	E	F
1	Ehdokas	Puolue	Äänet	Vertausluku	Puolueiden äänimäärät yht	
2	Frodo	Hobittipuolue	34320	=F2/1	Hobittipuolue	=SUMMA(C2:C6)
3	Sam	Hobittipuolue	11029	=F2/2	Ihmispuolue	=SUMMA(C7:C9)
4	Pippin	Hobittipuolue	8867	=F2/3	Haltiaapuolue	=SUMMA(C10:C12)
5	Merri	Hobittipuolue	6660	=F2/4	Kääpiöpuolue	=SUMMA(C13:C14)
6	Bilbo	Hobittipuolue	3162	=F2/5		
7	Aragorn	Ihmispuolue	61203	=F3/1		
8	Boromir	Ihmispuolue	4650	=F3/2		
9	Sauron	Ihmispuolue	17	=F3/3		
10	Galadriel	Haltiaapuolue	10221	=F4/1		
11	Legolas	Haltiaapuolue	6790	=F4/2		
12	Annatar	Haltiaapuolue	4923	=F4/3		
13	Gimli	Kääpiöpuolue	19034	=F5/1		
14	Gloin	Kääpiöpuolue	2589	=F5/2		
15	Äänet yht.		=SUMMA(C2:C14)			
16	Äänestysprosentti		=C15/290754*100			

	A	B	C	D	E	F
1	Ehdokas	Puolue	Äänet	Vertausluku	Puolueiden äänimäärät yht	
2	Frodo	Hobittipuolue	34320	64038,0	Hobittipuolue	64038
3	Sam	Hobittipuolue	11029	32019,0	Ihmispuolue	65870
4	Pippin	Hobittipuolue	8867	21346,0	Haltiaapuolue	21934
5	Merri	Hobittipuolue	6660	16009,5	Kääpiöpuolue	21623
6	Bilbo	Hobittipuolue	3162	12807,6		
7	Aragorn	Ihmispuolue	61203	65870,0		
8	Boromir	Ihmispuolue	4650	32935,0		
9	Sauron	Ihmispuolue	17	21956,7		
10	Galadriel	Haltiaapuolue	10221	21934,0		
11	Legolas	Haltiaapuolue	6790	10967,0		
12	Annatar	Haltiaapuolue	4923	7311,3		
13	Gimli	Kääpiöpuolue	19034	21623,0		
14	Gloin	Kääpiöpuolue	2589	10811,5		
15	Äänet yht.		173465			
16	Äänestysprosentti		59,6604002008571			

3 p. (yht. 6 p.)

Pisteytyksestä: Yllä mainitut kolme pistettä jakautuvat niin, että puolueiden kokonaisäänimäärästä saa tässä yhden pisteen (olipa ne laskettu tässä tai jo edellisessä alakohdassa), ja vertailuluvuista saa kaksi pistettä lisää.

Viisi suurinta vertauslukua on korostettu taulukkoon punaisella. Nämä ehdokkaat tulevat valituksi.

Vastaus: Valituiksi tulevat Aragorn, Frodo, Boromir, Sam ja Sauron.

2 p. (yht. 8 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 2

Lasketaan kunkin puolueen saama kokonaisäänimäärä.

$$\text{Hobittipuolue} = 34\,320 + 11\,029 + 8\,867 + 6\,660 + 3\,162 = 64\,038$$

$$\text{Ihmispuolue} = 61\,203 + 4\,650 + 17 = 65\,870$$

$$\text{Haltiaapuolue} = 10\,221 + 6\,790 + 4\,923 = 21\,934$$

$$\text{Kääpiöpuolue} = 19\,034 + 2\,589 = 21\,623$$

1 p. (yht. 4 p.)

Lasketaan kunkin ehdokkaan vertausluku.

Hobittipuolue:

Frodo saa koko hobittipuolueen äänimäärän. Sam saa puolet hobittipuolueen äänimäärästä. Pippin saa kolmasosan hobittipuolueen äänimäärästä ja niin edelleen.

Frodo: 64 038

Sam: $\frac{64\,038}{2} = 32\,019$

Pippi: $\frac{64\,038}{3} = 21\,346,$

Merri: $\frac{64\,038}{4} = 16\,009,5,$

Bilbo: $\frac{64\,038}{5} = 12\,807,6$

Ihmispuolue:

Aragorn saa koko ihmispuolueen äänimäärän. Boromir saa ihmispuolueen äänimäärästä puolet ja Sauron kolmasosan.

Aragorn: 65 870,

Boromir: $\frac{65\,870}{2} = 32\,935,$

Sauron: $\frac{65\,870}{3} = 21\,956,6666 \dots$

Haltipuolue:

Galadriel: 21 934,

Legolas: $\frac{21\,934}{2} = 10\,967,$

Annatar: $\frac{21\,934}{3} = 7311,333 \dots$

Kääpiöpuolue:

Gimli: 21 623,

Gloin: $\frac{21\,623}{2} = 10\,811,5$

2 p. (yht. 6 p.)

Vaalipiiristä valitaan viisi edustajaa siten, että valituksi tulee ne viisi, joiden vertausluvut ovat suurimmat. Valitut ehdokkaat ovat Aragorn, Frodo, Boromir, Sam ja Sauron, joilla on suurimmat vertausluvut. 2 p. (yht. 8 p.)

Alla on järjestetty ehdokkaat vertausluvun mukaan.

F	G	H	I
Ehdokas	Puolue	Äänet	Vertausluku
Aragorn	Ihmispuolue	61203	65870
Frodo	Hobittipuolue	34320	64038
Boromir	Ihmispuolue	4650	32935
Sam	Hobittipuolue	11029	32019
Sauron	Ihmispuolue	17	21956,66667
Galadriel	Haltipuolue	10221	21934
Gimli	Kääpiöpuolue	19034	21623
Pippin	Hobittipuolue	8867	21346
Merri	Hobittipuolue	6660	16009,5
Bilbo	Hobittipuolue	3162	12807,6
Legolas	Haltipuolue	6790	10967
Gloin	Kääpiöpuolue	2589	10811,5
Annatar	Haltipuolue	4923	7311,33333

Vastaus: Valituiksi tulevat Aragorn, Frodo, Boromir, Sam ja Sauron.

- 11.3 Pippin pääsisi läpi ilman arvontaa, jos hän saisi enemmän ääniä kuin Sam tai jos hobittipuolueesta tulisi valituksi kolmaskin ehdokas. 2 p. (yht. 10 p.)

Pippin pääsisi Samin ohi äänimäärässä saamalla

$$11\,029 - 8867 + 1 = 2163$$

ääntä enemmän.

1 p. (yht. 11 p.)

Pippin pääsisi läpi ilman arvontaa myös siinä tilanteessa, jos hänen vertauslukuksa olisi viidenneksi paras. Toisin sanoen Pippin pääsisi läpi, jos hobittipuolueesta tulisi valituksi kolmaskin ehdokas. **Alla on esitetty tälle tapaukselle kolme erilaista ratkaisuvaihtoehtoa.**

Ratkaisuvaihtoehto 1

Jotta hobittipuolue saisi kolmannen ehdokkaan läpi, pitäisi hobittipuolueen äänimäärän ylittää ihmispuolueen äänimäärä. **Viimeinen valituksi tullut oli ihmispuolueen Sauron.**

Hobittipuolueen äänimäärä oli 64 038 ja ihmispuolueen 65 870. Hobittipuolueen tulisi saada siis

$$65\,870 - 64\,038 + 1 = 1833$$

ääntä enemmän. 1 p. (yht. 12 p.)

Pippin tulisi valituksi, jos hän saisi vähintään 1833 ääntä lisää. 1 p. (yht. 13 p.)

Vastaus: 1833 ääntä tai enemmän

Ratkaisuvaihtoehto 2

Pippinin nykyinen vertausluku on $\frac{64\,038}{3} = 21\,346$. Viimeinen valituksi tullut on Sauron, jonka vertausluku on $\frac{65\,870}{3} = 21\,956,666 \dots$

Olkoon x Pippinin saamien lisä-äänien lukumäärä. Tällöin hänen vertauslukunsa olisi:

$$\frac{64\,038 + x}{3}$$

Vertausluvun tulee olla suurempi kuin $\frac{65\,870}{3}$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{64\,038 + x}{3} = \frac{65\,870}{3} \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

$$64\,038 + x = 65\,870$$

$$x = 1832$$

Pippinin olisi pitänyt saada yli 1832 ääntä enemmän tullakseen valituksi ilman arvontaa.

Vastaus: 1833 ääntä tai enemmän 1 p. (yht. 13 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 3

Ratkaistaan kokeilemalla, kuinka monta ääntä Pippin olisi tarvinnut lisää, jotta hänen vertailulukunsa olisi ollut suurempi kuin Sauronin vertailuluku 21956,666 ...

	A	B	C	D	E	F
25	Ehdokas	Puolue	Äänet	Vertailuluku	Puolueiden äänimäärät yht	
26	Frodo	Hobittipuolue	34320	=F26/1	Hobittipuolue	=SUMMA(C26:C30)
27	Sam	Hobittipuolue	11029	=F26/2	Ihmispuolue	=SUMMA(C31:C33)
28	Pippin	Hobittipuolue	10700	=F26/3	Haltiaapuolue	=SUMMA(C34:C36)
29	Merri	Hobittipuolue	6660	=F26/4	Kääpiöpuolue	=SUMMA(C37:C38)
30	Bilbo	Hobittipuolue	3162	=F26/5		
31	Aragorn	Ihmispuolue	61203	=F27/1		
32	Boromir	Ihmispuolue	4650	=F27/2		
33	Sauron	Ihmispuolue	17	=F27/3		
34	Galadriel	Haltiaapuolue	10221	=F28/1		
35	Legolas	Haltiaapuolue	6790	=F28/2		
36	Annatar	Haltiaapuolue	4923	=F28/3		
37	Gimli	Kääpiöpuolue	19034	=F29/1		
38	Gloin	Kääpiöpuolue	2589	=F29/2		
39	Äänet yht.		=SUMMA(C26:C38)			
40	Äänestysprosentti		=C39/290754*100			

	A	B	C	D	E	F
25	Ehdokas	Puolue	Äänet	Vertailuluku	Puolueiden äänimäärät yht	
26	Frodo	Hobittipuolue	34320	65871	Hobittipuolue	65871
27	Sam	Hobittipuolue	11029	32935,5	Ihmispuolue	65870
28	Pippin	Hobittipuolue	10700	21957	Haltiaapuolue	21934
29	Merri	Hobittipuolue	6660	16467,75	Kääpiöpuolue	21623
30	Bilbo	Hobittipuolue	3162	13174,2		
31	Aragorn	Ihmispuolue	61203	65870		
32	Boromir	Ihmispuolue	4650	32935		
33	Sauron	Ihmispuolue	17	21956,66667		
34	Galadriel	Haltiaapuolue	10221	21934		
35	Legolas	Haltiaapuolue	6790	10967		
36	Annatar	Haltiaapuolue	4923	7311,333333		
37	Gimli	Kääpiöpuolue	19034	21623		
38	Gloin	Kääpiöpuolue	2589	10811,5		
39	Äänet yht.		175298			
40	Äänestysprosentti		60,2908300487698			
41						

Jos Pippin olisi saanut 10 699 ääntä, olisi tullut arvonta. Jos hän olisi saanut 10 700 ääntä, ei arvontaa olisi tarvittu, vaan Pippin olisi valittu suoraan. Tähän hän olisi tarvinnut

$$10\,700 - 8867 = 1833$$

ääntä lisää. 2 p. (yht. 13 p.)

Vastaus: 1833 ääntä tai enemmän

11.4 Lasketaan, kuinka monta prosenttia kukin puolue sai koko äänimäärästä. Ääniä annettiin yhteensä 173 465.

$$\text{Hobittipuolue : } \frac{64\,038}{173\,465} = 0,36916 \dots = 36,916 \dots \%$$

$$\text{Ihmispuolue : } \frac{65\,870}{173\,465} = 0,37973 \dots = 37,973 \dots \%$$

$$\text{Haltipuolue : } \frac{21\,934}{173\,465} = 0,12644 \dots = 12,644 \dots \%$$

$$\text{Kääpiöpuolue : } \frac{21\,623}{173\,465} = 0,12465 \dots = 12,465 \dots \%$$

Lasketaan, kuinka monta paikkaa kukin puolue sai.

Hobittipuolue sai kaksi paikkaa viidestä.

$$\frac{2}{5} = 0,40 = 40 \%$$

Ihmispuolue sai kolme paikkaa viidestä.

$$\frac{3}{5} = 0,60 = 60 \%$$

Kääpiöpuolue ja haltipuolue eivät saaneet paikkoja.

Aineistosta voidaan tehdä esimerkiksi seuraavanlaisia havaintoja:

- Ihmispuolue sai noin 38 % äänistä, mutta 60 % valituista ehdokkaista oli ihmispuolueesta. Ihmispuole sai siis enemmän paikkoja kuin sen olisi pitänyt äänimäärän perusteella saada.
- Hobittipuolueen osalta suhteellinen vaalitapa toimi suhteellisen hyvin, sillä äänimäärän perusteella hobittipuoleen tulisi saada noin 37 % paikoista ja hobittipuolue sai 40 % paikoista.
- Haltipuolue ja kääpiöpuolue saivat kumpikin yli 10 % äänistä, mutta eivät yhtään paikkaa. Näiden kohdalla suhteellisen vaalitavan tavoite ei täyttynyt.

- Viimeinen paikka on pienestä kiinni, sillä Sauronin vertailuluku on vain hiukan korkeampi kuin Galadrielin.
- Vaikka Sauron sai hyvin vähän ääniä ja tuli silti valituksi, ei se ole tämän tehtävän kannalta ongelma, sillä piti tutkia vain, jakautuvatko edustajien paikat samassa suhteessa kuin puolueiden saamat äänet.

Pisteytyksestä: Pitää kirjoittaa vähintään kaksi aidosti erilaita havaintoa. Ensimmäisestä havainnosta saa 3 pistettä ja toisesta 2 p.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!