



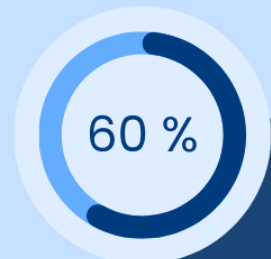
MAFYN YO-MALLIVASTAUKSET
KEVÄT 2024

PITKÄ MATEMATIIKKA



Lääkikseen kevään 2023 pääsykokeella
päässeistä 67% oli opiskellut Mafynetillä.

Jopa 60 % pk-seudun lukiolaisista
opiskelee Mafynetillä yo-kirjoituksiin!





Mallivastaukset laatii
Mafyn oppimateriaalitiimi,
joka kehittää lukion
oppimateriaaleja.

Mallivastausten
tekemiseen osallistuivat
Sakke Suomalainen, Tuulia
Tokola, Linnea Tokola,
Jaakko Alasuvanto ja Matti
Virolainen.

PALVELUITAMME OVAT

- MAFYNETTI-OPPIMISSOVELLUS
- LÄÄKETIETEEN VALMENNUSKURSSIT
- DI-VALMENNUSKURSSIT
- KAUPPATIETEEN VALMENNUSKURSSIT
- YLIOPPILASKIRJOITUKSIIN VALMISTAVAT
KERTAUSKURSSIT.

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafy.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty.

Lukion matematiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukion kursseillasi. Nämä mallivastaukset ovat Mafy Oy:n omaisuutta.

Mafynetti

<https://mafy.fi/yhteydenotto>

Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	9
Ratkaisu tehtävään 3	12
Ratkaisu tehtävään 4	19
Ratkaisu tehtävään 5	22
Ratkaisu tehtävään 6	24
Ratkaisu tehtävään 7	29
Ratkaisu tehtävään 8	31
Ratkaisu tehtävään 9	38
Ratkaisu tehtävään 10	40
Ratkaisu tehtävään 11	42
Ratkaisu tehtävään 12	51
Ratkaisu tehtävään 13	55

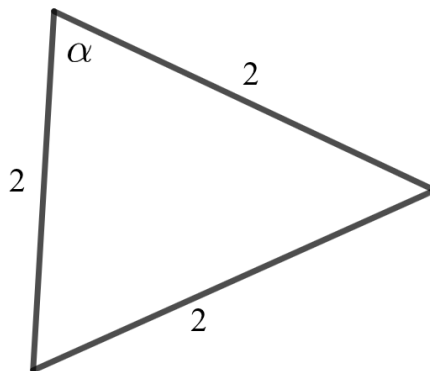
Malliratkaisut päivitetty 7. tammikuuta 2025 klo. 13:06.

1. Kulmanmetsästys (12 p.)

Määritä kuviin merkityt tuntemattomat kulmat asteen tarkkuudella.

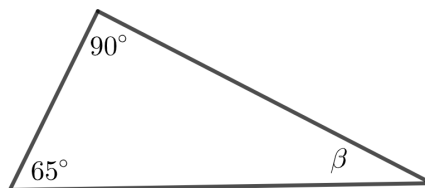
Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Jokaisen kohdan vastaus on kokonaisluku.

1.1 Määritä kulma α . (2 p.)



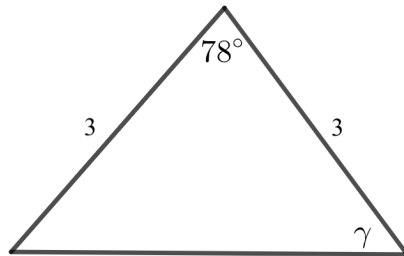
$\alpha =$ astetta

1.2 Määritä kulma β . (2 p.)



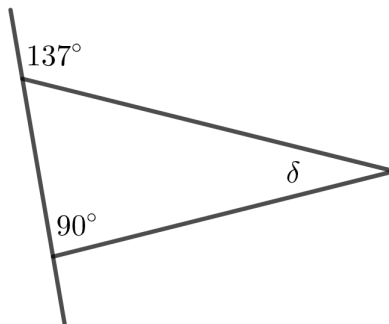
$\beta =$ astetta

1.3 Määritä kulma γ . (2 p.)



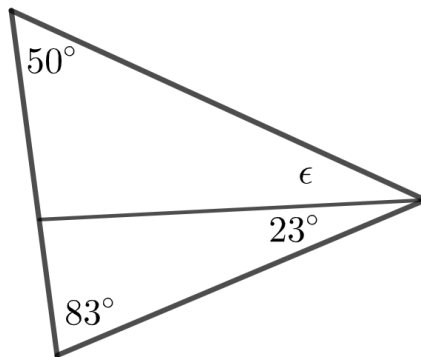
$\gamma =$ astetta

1.4 Määritä kulma δ . (2 p.)



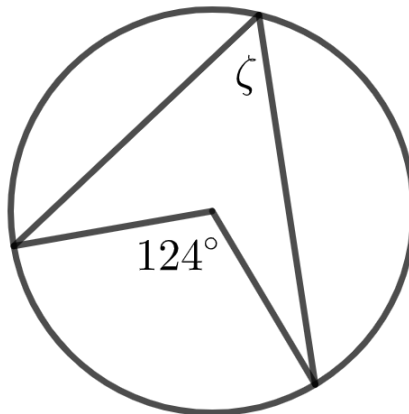
$\delta =$ astetta

1.5 Määritä kulma ϵ . (2 p.)



$\epsilon =$ astetta

1.6 Määritä kulma ζ . (2 p.)



$\zeta =$ astetta

Ratkaisu.**Vastaukset.**1.1 60 2 p. (yht. 2 p.)1.2 25 2 p. (yht. 4 p.)1.3 51 2 p. (yht. 6 p.)1.4 47 2 p. (yht. 8 p.)1.5 24 2 p. (yht. 10 p.)1.6 62 2 p. (yht. 12 p.)**Näin vastauksiin päädyttiin:**

1.1 Kolmion kaikkien sivujen pituus on 2. Kolmio on siis tasasivuinen. Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat 60 asteen suuruiset. Kulman α suuruus on siis 60 astetta.

1.2 Kolmion kulmien summa on 180 astetta. Lasketaan kulman β suuruus:

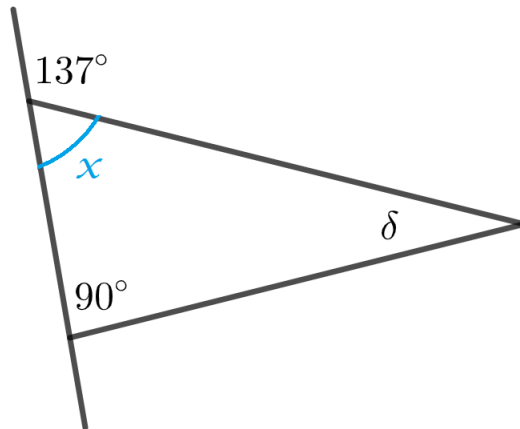
$$\begin{aligned}180^\circ &= 90^\circ + 65^\circ + \beta \\ \beta &= 180^\circ - 90^\circ - 65^\circ \\ &= 25^\circ\end{aligned}$$

Siis $\beta = 25$ astetta.

1.3 Kolmion kahden sivun pituudet ovat 3. Kolmio on siis tasakylkinen ja yhtä pitkien sivujen eli kolmion kylkien välinen kulma on kolmion huippukulma (jonka suuruus on kuvan mukaan 78°). Kolmion muut kulmat ovat kantakulmia ja ne ovat keskenään yhtä suuret. Kolmion vasen alakulma on siis yhtä suuri kuin kysytty kulma γ . Kolmiossa on siis kaksi kulmaa, joiden suuruus on kysytty γ . Kolmion kulmien summasta saadaan

$$\begin{aligned}180^\circ &= 78^\circ + \gamma + \gamma \\ 2\gamma &= 180^\circ - 78^\circ \\ 2\gamma &= 102^\circ \quad || : 2 \\ \gamma &= 51^\circ\end{aligned}$$

Eli $\gamma = 51$ astetta.



1.4 Kolmion vasemmassa yläkulmassa on kulma x , joka on 137° :een kulman vieruskulma. Vieruskulmien summa on aina 180 astetta. Ratkaistaan kulma x :

$$180^\circ = 137^\circ + x$$

$$x = 180^\circ - 137^\circ$$

$$x = 43^\circ$$

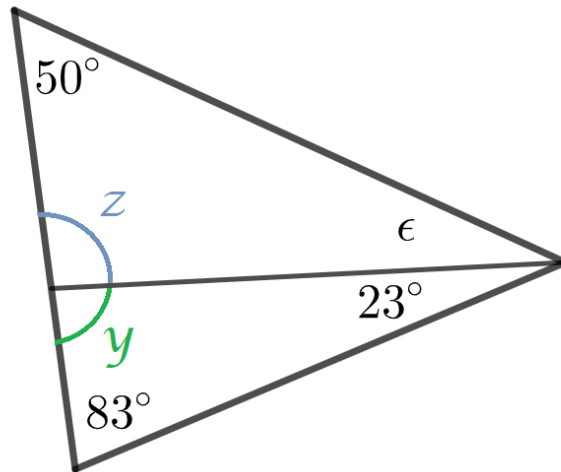
Koska kolmion kulmien summa on 180 astetta, voidaan laskea kulman δ suuruus:

$$180^\circ = 90^\circ + 43^\circ + \delta$$

$$\delta = 180^\circ - 90^\circ - 43^\circ$$

$$= 47^\circ$$

Siis $\delta = 47$ astetta.



1.5

Ratkaisuvaihtoehto 1

Kolmion kulmien summa on 180 astetta. Lasketaan kulman ϵ suuruus:

$$\begin{aligned}180^\circ &= 50^\circ + 83^\circ + 23^\circ + \epsilon \\ \epsilon &= 180^\circ - 50^\circ - 83^\circ - 23^\circ \\ &= 24^\circ\end{aligned}$$

Eli $\epsilon = 24$ astetta.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Kolmion kulmien summa on 180 astetta. Lasketaan kuvassa olevan alemman kolmion vasemman yläkulman y suuruus:

$$\begin{aligned}180^\circ &= 83^\circ + 23^\circ + y \\ y &= 180^\circ - 83^\circ - 23^\circ \\ y &= 74^\circ\end{aligned}$$

Ylemmän kolmion vasen alakulma z on kulman y vieruskulma. Ratkaistaan kulma z :

$$180^\circ = 74^\circ + z$$

$$z = 180^\circ - 74^\circ$$

$$z = 106^\circ$$

Ylemmän kolmion kulmien summa on 180 astetta. Kulman ϵ suuruus on siis

$$180^\circ = 50^\circ + 106^\circ + \epsilon$$

$$\epsilon = 180^\circ - 50^\circ - 106^\circ$$

$$= 24^\circ$$

Eli $\epsilon = 24$ astetta.

- 1.6 Kuvaan merkitty 124 asteen kulma on ympyrän keskuskulma. (Tämä ei käy varmuudella ilmi kuvasta, koska ei ole kerrottu, että kulman kärki on nimenomaan ympyrän keskipisteessä. Tehtävä ei kuitenkaan ratkea ilman, että oletetaan kulman olevan nimenomaan keskuskulma.) Kulman kärki on siis ympyrän keskipisteessä ja kulman kyljet rajaavat ympyrän kehältä kaaren. Kysytty kulma ζ puolestaan on tätä samaa kaarta vastaava kehäkulma eli kulma, jonka kärki on ympyrän kehällä ja jonka kyljet rajaavat ympyrän kehältä saman kaaren kuin 124 asteen keskuskulma. Kehäkulmalauseen perusteella tällaisen kehäkulman ζ suuruus on täsmälleen puolet sitä vastaavan keskuskulman suuruudesta. Eli $\zeta = \frac{124^\circ}{2} = 62^\circ$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

2. Polynomi (12 p.)

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Jokaisen kohdan vastaus on kokonaisluku.

1. Laske polynomin $p(x) = 12x^3 + 4x$ arvo kohdassa $x = 2$.

 (3 p.)

2. Laske polynomin $p(x) = 12x^3 + 4x$ derivaatan arvo kohdassa $x = 1$.

 (3 p.)

3. Laske määrätty integraali $\int_1^2 (12x^3 + 4x) dx$.

 (3 p.)

4. Määritä neljännen asteen termin kerroin polynomissa $(12x^3 + 4x)^2$.

 (3 p.)**Ratkaisu.**

1. 104 3 p. (yht. 3 p.)

Polynomin arvo tietyllä x :n arvolla lasketaan sijoittamalla x :n arvo polynomin lausekkeeseen x :n paikalle.

$$p(x) = 12x^3 + 4x$$

$$p(2) = 12 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2$$

$$p(2) = 12 \cdot 8 + 8 = 13 \cdot 8 = 104$$

2. 40 3 p. (yht. 6 p.)

Derivoidaan polynomi $p(x) = 12x^3 + 4x$ käyttämällä derivointisääntöjä

$$D x = 1$$

$$D k f(x) = k D f(x)$$

$$D x^n = n x^{n-1}$$

$$p'(x) = 12 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 1$$

$$p'(x) = 36x^2 + 4$$

Lasketaan derivaatan arvo kohdassa $x = 1$ edellisen kohdan tapaan sijoittamalla $x:n$ paikalle luku 1.

$$p'(1) = 36 \cdot 1^2 + 4$$

$$p'(1) = 40$$

3. 51 3 p. (yht. 9 p.)

Lasketaan integraali käyttämällä integrointikaavoja

$$\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

$$\int (kf(x)) \, dx = k \int f(x) \, dx$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

$$\int_1^2 (12x^3 + 4x) \, dx$$

$$= \int_1^2 12x^3 \, dx + \int_1^2 4x \, dx$$

$$= 12 \int_1^2 x^3 \, dx + 4 \int_1^2 x \, dx$$

$$= 12 \int_1^2 \left(\frac{x^4}{4} \right) + 4 \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} \right)$$

$$= 12 \left(\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right) + 4 \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right)$$

$$= 51$$

4. 96

3 p. (yht. 12 p.)

Tutkitaan polynomia avaamalla sulut. Kyseessä on binomin neliö, joten käytetään muistikaavaa $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$\begin{aligned}(12x^3 + 4x)^2 &= (12x^3)^2 + 2 \cdot (12x^3) \cdot (4x) + (4x)^2 \\&= 12^2 x^6 + 2 \cdot 12 \cdot 4x^4 + 4^2 x^2 \\&= 144x^6 + 96x^4 + 16x^2\end{aligned}$$

Neljännän asteen termi on se, missä x :n potenssi on 4, eli tässä tapauksessa $96x^4$. Muuttujan edessä oleva kerroin 96 on kyseisen termin kerroin.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

3. Itseisarvoyhtälöitä (12 p.)

Ratkaise algebrallisesti tai geometrisesti seuraavat yhtälöt.

1. $|y + 3| = |y + 5|$. (6 p.)

2. $|x| + |x - 5| = 7$. (6 p.)

Ratkaisu.

1.

Ratkaisuvaihtoehto 1:

Yhtälö

$$|y + 3| = |y + 5|$$

on tosi, kun joko yhtälö $y + 3 = y + 5$ tai yhtälö $y + 3 = -(y + 5)$ on tosi.

2 p. (yht. 2 p.)

$$y + 3 = y + 5 \quad || - y$$

$$3 = 5$$

Tämä yhtälö on epätosi riippumatta y :n arvosta, eli sillä ei ole ratkaisua.

2 p. (yht. 4 p.)

$$y + 3 = -(y + 5)$$

$$y + 3 = -y - 5 \quad || + y$$

$$2y + 3 = -5 \quad || - 3$$

$$2y = -8 \quad || : 2$$

$$y = -4$$

2 p. (yht. 6 p.)

Vastaus: $y = -4$

Ratkaisuvaihtoehto 2:

Käytetään hyödyksi itseisarvon geometrista tulkintaa. Itseisarvo

$$|y + 3| = |y - (-3)|$$

on luvun y etäisyys luvusta -3 , ja vastaavasti itseisarvo

$$|y + 5| = |y - (-5)|$$

on luvun y etäisyys luvusta -5 . Näin ollen yhtälön

$$|y + 3| = |y + 5|$$

ratkaisut ovat lukuja, joiden etäisyys luvusta -3 on sama kuin luvusta -5 . 2 p. (yht. 2 p.)

Luku -4 toteuttaa tämän ehdon, joten ratkaisu on $y = -4$. 2 p. (yht. 4 p.) Muita ratkaisuja ei ole, sillä kaikki muut luvut ovat eri etäisyydellä luvusta -3 ja luvusta -5 .

2 p. (yht. 6 p.)

Vastaus: $y = -4$

Ratkaisuvaihtoehto 3:

Yhtälössä

$$|y + 3| = |y + 5|$$

molemmat puolet ovat itseisarvoina epänegatiivisia, joten korottamalla yhtälö puolittain neliöön saadaan yhtäpitävä yhtälö. 1 p. (yht. 1 p.)

$$|y + 3|^2 = |y + 5|^2$$

$$(y + 3)^2 = (y + 5)^2$$

$$y^2 + 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2 = y^2 + 2 \cdot y \cdot 5 + 5^2$$

$$y^2 + 6y + 9 = y^2 + 10y + 25 \quad || - y^2$$

$$6y + 9 = 10y + 25 \quad || - 6y$$

$$9 = 4y + 25 \quad || - 25$$

$$-16 = 4y \quad \text{3 p. (yht. 4 p.)} \quad || : 4$$

$$-4 = y$$

$$y = -4 \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)}$$

Vastaus: $y = -4$

Ratkaisuvaihtoehto 4:

Ratkaistaan yhtälö osissa tarkastelemalla eri välejä $y < -5$, $-5 \leq y < -3$ ja $y \geq -3$ erikseen. 2 p. (yht. 2 p.) Aloitetaan tarkastelemalla tilannetta $y < -5$. Tällöin $|y + 3| = -(y + 3) = -y - 3$ ja $|y + 5| = -(y + 5) = -y - 5$, joten yhtälöstä tulee

$$\begin{aligned} -y - 3 &= -y - 5 & || + y \\ -3 &= -5 \end{aligned}$$

Yhtälö on epätosi, joten välillä $y < -5$ ei ole ratkaisuja. 2 p. (yht. 4 p.)

Tarkastellaan sitten väliä $-5 \leq y < -3$. Tällöin $|y + 3| = -(y + 3) = -y - 3$ ja $|y + 5| = y + 5$, joten yhtälöstä tulee

$$\begin{aligned} -y - 3 &= y + 5 & || + y \\ -3 &= 2y + 5 & || - 5 \\ -8 &= 2y & || : 2 \\ -4 &= y \\ y &= -4 \end{aligned}$$
1 p. (yht. 5 p.)

Löydetty ratkaisu on tarkasteltavalla välillä, joten se todella on alkuperäisen yhtälön ratkaisu. Tarkastellaan vielä lopuksi tilannetta $y \geq -3$. Tällöin $|y + 3| = y + 3$ ja $|y + 5| = y + 5$, joten yhtälöstä tulee

$$\begin{aligned} y + 3 &= y + 5 & || - y \\ 3 &= 5 \end{aligned}$$

Yhtälö on epätosi, joten välillä $y \geq -3$ ei ole ratkaisuja. 1 p. (yht. 6 p.)

Vastaus: $y = -4$

2.

Ratkaisuvaihtoehto 1:

Käytetään hyödyksi itseisarvon geometrista tulkintaa. Itseisarvo

$$|x| = |x - 0|$$

on luvun x etäisyys nolasta, ja vastaavasti itseisarvo

$$|x - 5|$$

on luvun x etäisyys luvusta 5. Näin ollen yhtälön ratkaisu on sellainen luku x , jonka etäisyyden nolasta ja etäisyyden luvusta 5 summa on 7. (2 p. (yht. 8 p.))

Kun x on välin $[0, 5]$ ulkopuolella, yllä mainittujen etäisyyksien summa on kaksi kertaa luvun x etäisyys lähempään luvusta 0 ja 5 plus 5. Tästä voidaan päätellä, että ollakseen ratkaisu, luvun x etäisyyden lähempään luvusta 0 ja 5 täytyy olla 1, sillä tällöin etäisyyksien summaksi tulee 7. Tästä voidaan päätellä, että ratkaisut ovat $x = -1$ ja $x = 6$. (2 p. (yht. 10 p.))

Muita ratkaisuja välin $[0, 5]$ ulkopuolella ei ole. Kun x on välillä $[0, 5]$, sen etäisyyden nolasta ja etäisyyden luvusta 5 summa on 5, joten ratkaisu ei voi olla välillä $[0, 5]$. (2 p. (yht. 12 p.))

Vastaus: $x = -1$ tai $x = 6$.

Ratkaisuvaihtoehto 2:

Ratkaistaan yhtälö osissa tarkastelemalla eri välejä $x < 0$, $0 \leq x < 5$ ja $x \geq 5$ erikseen. (2 p. (yht. 8 p.)) Aloitetaan tarkastelemalla tilannetta $x < 0$. Tällöin $|x| = -x$ ja $|x - 5| = -(x - 5) = -x + 5$, joten yhtälöstä tulee

$$|x| + |x - 5| = 7$$

$$-x + (-x + 5) = 7$$

$$-2x + 5 = 7 \quad || -5$$

$$-2x = 2 \quad || : (-2)$$

$$x = -1 \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

Löydetty ratkaisu on tarkasteltavalla välillä, joten se todella on alkuperäisen yhtälön ratkaisu. Tarkastellaan seuraavaksi väliä $0 \leq x < 5$. Tällöin $|x| = x$ ja $|x - 5| = -(x - 5) = -x + 5$, joten yhtälöstä tulee

$$\begin{aligned}|x| + |x - 5| &= 7 \\ x + (-x + 5) &= 7 \\ 5 &= 7\end{aligned}$$

Tämä yhtälö on epätosi riippumatta muuttujan x arvosta, joten välillä $0 \leq x < 5$ ei ole ratkaisuja. 2 p. (yht. 11 p.) Tarkastellaan vielä lopuksi tilannetta $x \geq 5$. Tällöin $|x| = x$ ja $|x - 5| = x - 5$, joten yhtälöstä tulee

$$\begin{aligned}|x| + |x - 5| &= 7 \\ x + x - 5 &= 7 \\ 2x - 5 &= 7 \quad || + 5 \\ 2x &= 12 \quad || : 2 \\ x &= 6\end{aligned}$$
1 p. (yht. 12 p.)

Löydetty ratkaisu on tarkasteltavalla välillä, joten se todella on alkuperäisen yhtälön ratkaisu.

Vastaus: $x = -1$ tai $x = 6$

Ratkaisuvaihtoehto 3:

Kirjoitetaan yhtälö toiseen muotoon.

$$\begin{aligned}|x| + |x - 5| &= 7 \\ |x - 5| &= 7 - |x|\end{aligned}$$

Yllä olevan yhtälön vasemmalla puolella on vain itseisarvolauseke, joten yhtälön vasen puoli on ei-negatiivinen. Jos $|x| > 7$, niin yhtälön oikea puoli on negatiivinen, jolloin yhtälöllä ei ole ratkaisua. Jos taas $|x| \leq 7$ eli $-7 \leq x \leq 7$,

niin myös oikea puoli on ei-negatiivinen. 1 p. (yht. 7 p.) Tutkitaan yhtälöä tilanteessa $-7 \leq x \leq 7$. Korotetaan yhtälön molemmat puolet toiseen.

$$|x - 5|^2 = (7 - |x|)^2$$

$$(x - 5)^2 = 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot |x| + |x|^2$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = 49 - 14|x| + x^2$$

$$x^2 - 10x + 25 = 49 - 14|x| + x^2 \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)} \quad \parallel - x^2$$

$$-10x + 25 = 49 - 14|x| \quad \parallel - 25$$

$$-10x = 49 - 25 - 14|x|$$

$$-10x = 24 - 14|x| \quad \parallel + 14|x| + 10x$$

$$14|x| = 10x + 24$$

Yllä olevan yhtälön vasemmalla puolella on positiivinen vakio kertaa itseisarvolauseke, joten vasen puoli on ei-negatiivinen. Tutkitaan, millä ehdolla oikea puoli on ei-negatiivinen.

$$10x + 24 \geq 0$$

$$10x \geq -24 \quad \parallel : 10$$

$$x \geq \frac{-24}{10}$$

$$x \geq -\frac{12}{5} \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

$$x \geq -2,4$$

Ratkaisua ei ole, jos $x < -\frac{12}{5}$. Oletetaan, että $-\frac{12}{5} \leq x \leq 7$ ja korotetaan yhtälön molemmat puolet toiseen.

$$(14|x|)^2 = (10x + 24)^2$$

$$14^2|x|^2 = (10x)^2 + 2 \cdot 10x \cdot 24 + 24^2$$

$$196x^2 = 100x^2 + 480x + 576 \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)} \quad \parallel - 100x^2 - 480x - 576$$

$$96x^2 - 480x - 576 = 0 \quad \parallel : 96$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0 \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

$$1x^2 + (-5)x + (-6) = 0$$

Ratkaistaan yhtälö toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisukaavalla.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad || a = 1, b = -5, c = -6$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x = \frac{5+7}{2} \text{ tai } x = \frac{5-7}{2}$$

$$x = \frac{12}{2} \text{ tai } x = \frac{-2}{2}$$

$$x = 6 \text{ tai } x = -1$$

Saadut ratkaisut toteuttavat ehdon $-\frac{12}{5} \leq x \leq 7$, joten ne ovat yhtälön ratkaisut.

Vastaus: $x = -1$ tai $x = 6$ 1 p. (yht. 12 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

4. Laskuvarjohyppääjä (12 p.)

Mallinnetaan laskuvarjohyppääjän putoamisnopeutta funktiolla

$$v(t) = 80 \frac{e^{t/4} - 1}{e^{t/4} + 1},$$

kun aikaa t mitataan sekunneissa hyppäyshetkestä $t = 0$ alkaen ja nopeuden yksikkö on metriä sekunnissa.

Johda derivaattakaava

$$D(8 \ln(e^{t/4} + 1) - t) = \frac{e^{t/4} - 1}{e^{t/4} + 1}.$$

Määritä hyppääjän ensimmäisen 20 sekunnin aikana putoama matka, joka saadaan integraalista

$$h = \int_0^{20} v(t) dt.$$

Ratkaisu.

Johdetaan kysytty derivaattakaava.

$$\begin{aligned} D(8 \ln(e^{\frac{t}{4}} + 1) - t) &= D(8 \ln(e^{\frac{t}{4}} + 1)) - D t \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)} \\ &= 8 D \ln(e^{\frac{t}{4}} + 1) - 1 \end{aligned}$$

Käytetään sisäfunktion derivaatan kaavaa $D f(g(t)) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$. Tässä $f(t) = \ln(t)$ ja $g(t) = e^{\frac{t}{4}} + 1$.

$$\begin{aligned} &= 8 \cdot \frac{1}{e^{\frac{t}{4}} + 1} \cdot D(e^{\frac{t}{4}} + 1) - 1 \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)} \\ &= 8 \cdot \frac{1}{e^{\frac{t}{4}} + 1} \cdot (D e^{\frac{t}{4}} + D 1) - 1 \end{aligned}$$

Käytetään sisäfunktion derivaatan kaavaa $D f(g(t)) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$. Tässä $f(t) = e^t$ ja $g(t) = \frac{t}{4}$.

$$= 8 \cdot \frac{1}{e^{\frac{t}{4}} + 1} \cdot \left(e^{\frac{t}{4}} \cdot D \frac{t}{4} + 0 \right) - 1$$

$$\begin{aligned}
 &= 8 \cdot \frac{1}{e^{\frac{t}{4}} + 1} \cdot \left(e^{\frac{t}{4}} \cdot \frac{1}{4} \right) - 1 \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)} \\
 &= \frac{2e^{\frac{t}{4}}}{e^{\frac{t}{4}} + 1} - 1 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}
 \end{aligned}$$

Lavennetaan termi -1 luvulla $e^{\frac{t}{4}} + 1$, jotta saadaan termien nimittäjät samoiksi.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2e^{\frac{t}{4}}}{e^{\frac{t}{4}} + 1} - \frac{e^{\frac{t}{4}} + 1}{e^{\frac{t}{4}} + 1} \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)} \\
 &= \frac{2e^{\frac{t}{4}} - (e^{\frac{t}{4}} + 1)}{e^{\frac{t}{4}} + 1} \\
 &= \frac{2e^{\frac{t}{4}} - e^{\frac{t}{4}} - 1}{e^{\frac{t}{4}} + 1} \\
 &= \frac{e^{\frac{t}{4}} - 1}{e^{\frac{t}{4}} + 1} \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}
 \end{aligned}$$

Määritetään kysytty matka integraalin avulla.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{20} v(t) \, dt &= \int_0^{20} 80 \frac{e^{\frac{t}{4}} - 1}{e^{\frac{t}{4}} + 1} \, dt \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)} \\
 &= 80 \int_0^{20} \frac{e^{\frac{t}{4}} - 1}{e^{\frac{t}{4}} + 1} \, dt
 \end{aligned}$$

Käytetään edellä johdettua derivaattakaavaa.

$$= 80 \int_0^{20} \left(8 \ln \left(e^{\frac{t}{4}} + 1 \right) - t \right) dt \quad \text{2 p. (yht. 9 p.)}$$

$$= 80 \left[\left(8 \ln \left(e^{\frac{20}{4}} + 1 \right) - 20 \right) - \left(8 \ln \left(e^{\frac{0}{4}} + 1 \right) - 0 \right) \right] \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

$$= 80 (8 \ln(e^5 + 1) - 20 - 8 \ln(2))$$

$$= 1160,68 \dots \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

$$\approx 1200 \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: Hyppääjän putoama matka on noin 1200 metriä.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

5. Lämpötilaruudukko (12 p.)

Aineisto:

5. A [Taulukko: Lämpötiloja](#)

Lämpötilajakaumaa voidaan mallintaa ruudukolla, jossa ruudussa oleva luku on kyseisen ruudun lämpötila celsiusasteina. Lämpötilat noudattavat seuraavaa keskiarvoperiaatetta: jokaisen ruudun lämpötila on neljän naapuriruudun lämpötilan keskiarvo. Ruudut ovat naapuriruutuja, jos niillä on yhteinen sivu.

Tässä tehtävässä tutkitaan taulukon [5.A](#) tilannetta. Siinä esimerkiksi lämpötila 15 toteuttaa keskiarvoperiaatteen mukaisen yhtälön

$$\frac{0 + 10 + 20 + 30}{4} = 15.$$

Muodosta ruudukon tuntemattomille lämpötiloille x ja y keskiarvoperiaatteen mukaiset yhtälöt ja ratkaise ne.

Ratkaisu.

Muodostetaan yhtälöt tehtävänannossa annetun keskiarvoperiaatteen mukaan. Aineiston taulukon mukaan x :n ruudun viereisissä ruuduissa olevista luvuista saadaan

$$x = \frac{30 + 40 + 50 + y}{4}. \quad (4 \text{ p. (yht. 4 p.)})$$

Vastaavasti luvulle y saadaan viereisen ruutujen lukuja hyödyntämällä yhtälö

$$y = \frac{60 + x + 70 + 80}{4}. \quad (4 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

Vastaavasti taulukossa olevan luvulle 30 tulee toteuttaa keskiarvoperiaate. Tästä saadaan yhtälö

$$30 = \frac{15 + 20 + x + 30}{4}. \quad (2 \text{ p. (yht. 10 p.)})$$

Ratkaistaan yllä olevista kolmesta yhtälöstä muodostettu yhtälöryhmä CAS-ohjelman solve-toiminnolla. Ohjelma antaa tuloksen, että yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. (1 p. (yht. 11 p.)

Samaan tulokseen päädytään myös käsin laskemalla. Esimerkiksi jos ratkaistaan kahden ensimmäisen yhtälön muodostama yhtälöpari, saadaan ratkaisuksi $x = 46$, $y = 64$. Tämä ratkaisu ei kuitenkaan toteuta kolmatta yhtälöä. Siis ei ole olemassa ehtoja toteuttavia lukuja x ja y . (1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Ei ole olemassa ehtoja toteuttavia lukuja x ja y .

Pisteytyksestä: Jos muodostaa kahdesta yhtälöstä yhtälöparin muodostamatta kolmatta yhtälöä ja ratkaisee yhtälöparista virheettömästi muuttujat x ja y , saa 10 pistettä. Näin saatu vastaus on kuitenkin virheellinen.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

6. Piste hukassa (12 p.)

Tason pisteen C etäisyys pisteestä $A = (5, 4)$ on $\sqrt{20}$ ja etäisyys pisteestä $B = (8, -2)$ on $\sqrt{65}$. Lisäksi pisteen C etäisyys pisteen B kautta kulkevasta, vektorin $5\vec{i} + 2\vec{j}$ suuntaisesta suorasta s on alle 7. Määritä pisteen C koordinaatit sekä pisteen C tarkka etäisyys suorasta s .

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1:

Tehtävässä tarkastellaan tason pistettä C , mutta tehtävänannossa ei tarkkaan ottaen sanota, että piste C olisi samassa tasossa kuin pisteet A ja B . Pisteet A ja B on kuitenkin esitetty kahden koordinaatin avulla, ja suoran s suuntavektori on annettu xy -koordinaatistossa yleisesti käytettyjen kantavektorien $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ avulla, joten tehtävässä on luontevaa tulkita, että tarkastellaan vain yhtä tasoa, ja tasoksi voidaan valita xy -taso.

Merkitään tuntemattoman pisteen C koordinaatteja (x_C, y_C) .

1 p. (yht. 1 p.)

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) välinen etäisyys lasketaan kaavalla

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Näin ollen pisteen C etäisyys pisteestä $A = (5, 4)$ on

$$d_{CA} = \sqrt{(x_C - 5)^2 + (y_C - 4)^2} = \sqrt{20} \quad (1)$$

ja etäisyys pisteestä $B = (8, -2)$ on

$$d_{CB} = \sqrt{(x_C - 8)^2 + (y_C + 2)^2} = \sqrt{65}. \quad (2)$$

3 p. (yht. 4 p.)

Pisteytyksestä: Jos molemmat yhtälöt on esitetty oikein, 3 p. Jos jommassa kummassa yhtälössä on puutteita, tästä kohdasta enintään 2 p.

Yhtälöistä (1) ja (2) saadaan yhtälöpari, jonka ratkaisuksi saadaan CAS-ohjelmalla

$$x_C = 1 \text{ ja } y_C = 2 \quad \text{tai} \quad x_C = 9 \text{ ja } y_C = 6.$$

2 p. (yht. 6 p.)

Muodostetaan suoran s yhtälön normaalimuoto. Suoran yhtälön normaalimuoto on

$$ax + by + c = 0, \quad (3)$$

kun suoran suuntavektori on muotoa $b\vec{i} - a\vec{j}$. Koska suoran s suuntavektori on

$$5\vec{i} + 2\vec{j} = 5\vec{i} - (-2\vec{j}),$$

kertoimen a arvoksi saadaan -2 ja kertoimen b arvoksi 5 . 1 p. (yht. 7 p.)

Kun sijoitetaan $a = -2$ ja $b = 5$ yhtälöön (3), saadaan

$$-2x + 5y + c = 0. \tag{4}$$

Koska piste B sijaitsee suoralla s , tulee sen koordinaattien toteuttaa suoran yhtälö. Sijoitetaan pisteen B koordinaatit yhtälöön (4) ja ratkaistaan vakion c arvo CAS-ohjelmalla.

$$-2 \cdot 8 + 5 \cdot (-2) + c = 0$$

$$c = 26 \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

Suoran s yhtälön normaalimuodoksi saadaan siis

$$-2x + 5y + 26 = 0. \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

Pisteen (x_0, y_0) etäisyys suorasta $ax + by + c = 0$ on

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Sijoitetaan pisteen C aiemmin ratkaistut, mahdolliset koordinaatit ja suoran s yhtälön vakiot a , b ja c yllä olevaan lausekkeeseen ja tutkitaan, kumpi vaihtoehdoista toteuttaa tehtävänannon ehdon, jonka mukaan etäisyys suorasta on pienempi kuin 7.

Jos koordinaatit ovat $(1, 2)$, etäisyys on

$$\begin{aligned} \frac{|-2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 26|}{\sqrt{29}} &= \frac{|34|}{\sqrt{29}} \\ &= \frac{34}{\sqrt{29}} \\ &\approx 6,3136 \dots < 7 \end{aligned} \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

Jos koordinaatit ovat $(9, 6)$, etäisyys on

$$\begin{aligned}\frac{|-2 \cdot 9 + 5 \cdot 6 + 26|}{\sqrt{29}} &= \frac{|38|}{\sqrt{29}} \\ &= \frac{38}{\sqrt{29}} \\ &\approx 7,0564 \dots > 7\end{aligned}$$

1 p. (yht. 11 p.)

Huomataan, että vain piste $(1, 2)$ toteuttaa annetun ehdon.

Vastaus: Piste C on $(1, 2)$ ja sen etäisyys suorasta s on $\frac{34}{\sqrt{29}}$.

1 p. (yht. 12 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 2:

Tehtävässä tarkastellaan tason pistettä C , mutta tehtävänannossa ei tarkkaan ottaen sanota, että piste C olisi samassa tasossa kuin pisteet A ja B . Pisteet A ja B on kuitenkin esitetty kahden koordinaatin avulla, ja suoran s suuntavektori on annettu xy -koordinaatistossa yleisesti käytettyjen kantavektorien $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ avulla, joten tehtävässä on luontevaa tulkita, että tarkastellaan vain yhtä tasoa, ja tasoksi voidaan valita xy -taso.

Merkitään tuntemattoman pisteen C koordinaatteja (x_C, y_C) .

1 p. (yht. 1 p.)

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) välinen etäisyys lasketaan kaavalla

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Näin ollen pisteen C etäisyys pisteestä $A = (5, 4)$ on

$$d_{CA} = \sqrt{(x_C - 5)^2 + (y_C - 4)^2} = \sqrt{20} \quad (1)$$

ja etäisyys pisteestä $B = (8, -2)$ on

$$d_{CB} = \sqrt{(x_C - 8)^2 + (y_C + 2)^2} = \sqrt{65}. \quad (2)$$

3 p. (yht. 4 p.)

Pisteytyksestä: Jos molemmat yhtälöt on esitetty oikein, 3 p. Jos jommassa kummassa yhtälössä on puutteita, tästä kohdasta enintään 2 p.

Yhtälöistä (1) ja (2) saadaan yhtälöpari, jonka ratkaisuiksi saadaan CAS-ohjelmalla

$$x_C = 1 \text{ ja } y_C = 2 \quad \text{tai} \quad x_C = 9 \text{ ja } y_C = 6.$$

2 p. (yht. 6 p.)

Muodostetaan suoran s yhtälö. Koska suoran suuntavektori on

$$5\vec{i} + 2\vec{j}$$

suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{2}{5}. \quad (1 \text{ p. (yht. 7 p.)})$$

Kun suoran kulmakerroin on k ja se kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta, sen yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Suora s kulkee pisteen $B = (8, -2)$ kautta ja sen kulmakerroin on $\frac{2}{5}$. Näin ollen suoran s yhtälöksi saadaan

$$y - (-2) = \frac{2}{5}(x - 8) \quad (1 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

$$y + 2 = \frac{2}{5}(x - 8) \quad || \cdot 5$$

$$5y + 10 = 2x - 16$$

$$-2x + 5y + 26 = 0 \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

Tarkastellaan seuraavaksi pisteen C etäisyyttä suorasta s . Pisteen (x_0, y_0) etäisyys suorasta $ax + bx + c = 0$ on

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Sijoitetaan pisteen C aiemmin ratkaistut, mahdolliset koordinaatit ja suoran s yhtälön vakiot a , b ja c yllä olevaan lausekkeeseen ja tutkitaan, kumpi vaihtoehdoista toteuttaa tehtävänannon ehdon, jonka mukaan etäisyys suorasta on pienempi kuin 7.

Jos koordinaatit ovat $(1, 2)$, etäisyys on

$$\begin{aligned} \frac{|-2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 26|}{\sqrt{29}} &= \frac{|34|}{\sqrt{29}} \\ &= \frac{34}{\sqrt{29}} \\ &\approx 6,3136 \dots < 7 \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)}) \end{aligned}$$

Jos koordinaatit ovat $(9, 6)$, etäisyys on

$$\begin{aligned}\frac{|-2 \cdot 9 + 5 \cdot 6 + 26|}{\sqrt{29}} &= \frac{|38|}{\sqrt{29}} \\ &= \frac{38}{\sqrt{29}} \\ &\approx 7,0564 \dots > 7\end{aligned}$$

1 p. (yht. 11 p.)

Huomataan, että vain piste $(1, 2)$ toteuttaa annetun ehdon.

Vastaus: Piste C on $(1, 2)$ ja sen etäisyys suorasta s on $\frac{34}{\sqrt{29}}$.

1 p. (yht. 12 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

7. Scrabble (12 p.)

Englanninkielisessä Scrabble-pelissä pussissa on 100 laattoa, joista 2 on tyhjää, 56 konsonanttilaattaa ja 42 vokaalilaattaa. Vokaalilaatoista yhdeksässä on A-kirjain. Pelaaja nostaa pussista 7 laattoa palauttamatta niitä takaisin pussiin.

1. Millä todennäköisyydellä ainakin yhdessä pelaajan nostamista laatoista on A-kirjain? (6 p.)
2. Millä todennäköisyydellä ainakin yhdessä pelaajan nostamista laatoista on A-kirjain silloin, kun tiedetään pelaajan nostaneen kolme vokaalia? (6 p.)

Ratkaisu.

1. Merkitään

A = "Ainakin yksi A-laatta"

ja A :n vastatapahtuma

$\bar{A}$ = "Ei yhtään A-laattaa".

Laattoja on yhteensä 100 ja 9:ssä niistä on kirjain A, joten muita kuin A-laattoja on 91. 2 p. (yht. 2 p.) Käytetään vastatapahtumaa ja tutkitaan todennäköisyyttä sille, ettei pelaajan seitsemästä laatasta yhdessäkään ole kirjainta A. Laattoja ei palauteta pussiin, joten jokaisella nostolla laattojen kokonaismäärä pienenee. 1 p. (yht. 3 p.)

Jokaisessa nostossa muun kuin A-laatan nostamisen todennäköisyys on

$$P(\text{Muu kuin A-laatta}) = \frac{\text{Muiden kuin A-laattojen lukumäärä}}{\text{Kaikkien pussissa olevien laattojen lukumäärä}}.$$

Ensimmäisessä nostossa suotuisia vaihtoehtoja eli muita kuin A-laattoja on yhteensä 91 kappaletta. Koko pussi sisälsi alunperin 100 laattoa, joten ensimmäisessä nostossa laatta nostetaan kaikkien 100:n joukosta. Tällöin todennäköisyys saada muu kuin A-laatta on

$$P(\text{Muu kuin A-laatta}) = \frac{91}{100}.$$

Jokaisen noston välissä laattojen sekä suotuisien laattojen että kaikkien laattojen lukumäärä pienenee yhdellä.

Todennäköisyys kysytylle tapahtumalle on siis

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

$$P(A) = 1 - \frac{91}{100} \cdot \frac{90}{99} \cdot \frac{89}{98} \cdot \frac{88}{97} \cdot \frac{87}{96} \cdot \frac{86}{95} \cdot \frac{85}{94} \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

$$P(A) = 0,49436 \dots \approx 0,49 \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

Vastaus: Todennäköisyys, että pelaaja saa seitsemällä nostolla ainakin yhden A-laatan on noin 0,49.

2. Tiedetään, että pelaaja nostaa kolme vokaalia, joten todennäköisyys, että niiden joukossa on vähintään yksi A-laatta on sama kuin, jos pelaaja nostaisi satunnaisesti kolme laattaa pelkkien vokaalien joukosta. 1 p. (yht. 7 p.)

Merkitään tapahtumaa ja vastatapahtumaa

B = "Ainakin yksi A-laatta"

$\bar{B}$ = "Ei yhtään A-laattaa".

Tutkitaan taas vastatapahtumaa, mutta tarkastellaan nyt vain kolmea nostoa vokaalien joukosta. Vokaaleja on yhteensä 42 ja A-laattoja 9, joten muita kuin A-laattoja on $42 - 9 = 33$. 2 p. (yht. 9 p.)

Kysytty todennäköisyys on

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

$$P(B) = 1 - \frac{33}{42} \cdot \frac{32}{41} \cdot \frac{31}{40} \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

$$P(B) = 0,52473 \dots \approx 0,52 \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: Todennäköisyys sille, että kolmen vokaalin joukossa on vähintään yksi A on noin 0,52.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

8. Taivaanmekaniikka (12 p.)

Aineisto:

8. A [Video: Maapallon akseli](#)

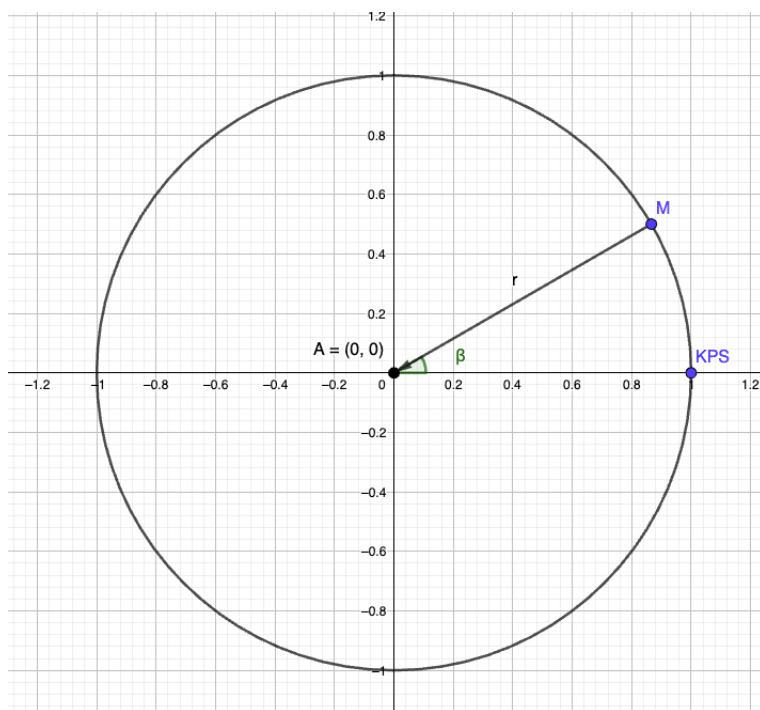
Maapallo pyörii akselinsa ympäri. Akselin ja Maan kiertoradan tason (eli ratatason) normaalin välisen kulman suuruus on $23,5$ astetta, ja akselin suunta pysyy samana Maan kiertäessä Aurinkoa. Akselin asento on sellainen, että pohjoisnapa on kesäpäivänseisauksena lähimpänä Aurinkoa ja talvipäivänseisauksena kauimpana siitä. Videossa [8.A](#) on havainnollistettu tilannetta.

Määritä Maan akselin ja Auringosta Maahan kulkevan säteen välinen kulma kuukausi kesäpäivänseisauksen jälkeen. Maapallon kiertorata oletetaan tässä ympyräksi.

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1:

Piirretään tilanteesta aluksi mallikuva. Sijoitetaan Aurinko origoon. Maapallo kulkee Auringon ympäri xy -tasossa yksikköympyrän kehää pitkin. Oletetaan, että positiivinen kiertosuunta on kuvassa vastapäivään ja kesäpäivänseisauksena Maa sijaitsee pisteessä $(1, 0)$. Kuukauden kuluttua kesäpäivänseisauksesta Maa on liikkunut pisteeseen M . 2 p. (yht. 2 p.)



Oletetaan, että kuukausi on $\frac{1}{12}$ koko vuodesta, jolloin kulma β on $\frac{1}{12}$ täydestä kulkemasta:

$$\beta = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Kuukauden pituudeksi voisi olettaa myös 30 tai 31 päivää ja vuoden pituudeksi 365 päivää. Tällöin kulma β on vastaavasti

$$\beta = \frac{30}{365} \cdot 360^\circ = 29,5890 \dots^\circ \quad \text{tai} \quad \beta = \frac{31}{365} \cdot 360^\circ = 30,5753 \dots^\circ.$$

Yksikköympyrän piste M on tällöin $(\cos(30^\circ), \sin(30^\circ))$ 2 p. (yht. 5 p.), ja Maasta Auringoon kulkeva yksikkövektori $\vec{r}$ on

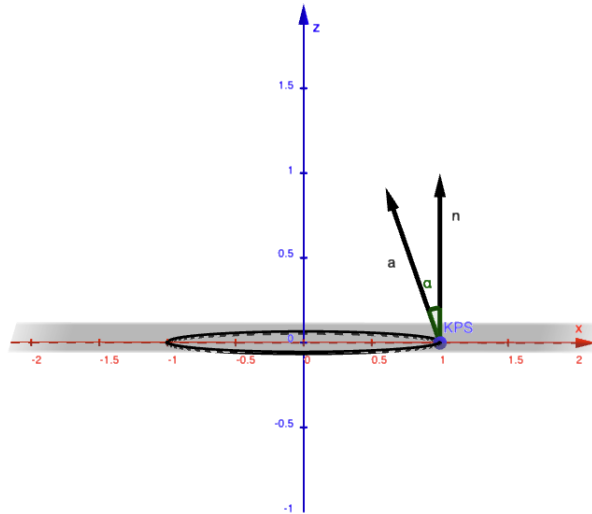
$$\vec{r} = (0 - \cos(30^\circ))\vec{i} + (0 - \sin(30^\circ))\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{r} = -\cos(30^\circ)\vec{i} - \sin(30^\circ)\vec{j} \quad \text{3 p. (yht. 8 p.)}$$

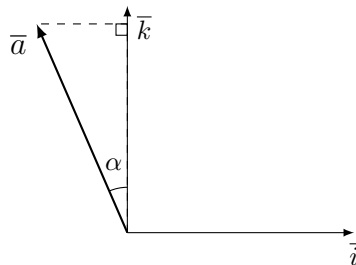
$$\vec{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}.$$

Suuntavektoriksi voi valita yhtä hyvin myös tämän vektorin vastavektorin, joka on vektori Auringosta Maahan.

Tarkastellaan seuraavaksi Maan akselia.



Merkitään kiertoradan tason normaalivektoria $\vec{n}$, akselin suuntavektoria $\vec{a}$ sekä normaalivektorin ja akselin suuntavektorin välistä kulmaa α . Tehtävänannon perusteella $\alpha = 23,5^\circ$ ja kesäpäivänseisauksena pohjoinen pallonpuolisko on lähimpänä aurinkoa. Näin ollen Maan akseli on xz -tason suuntainen.



Valitaan akselin suuntavektoriksi yksikkövektori

$$\vec{a} = -\sin(23,5^\circ)\vec{i} + 0\vec{j} + \cos(23,5^\circ)\vec{k}.$$

$$\vec{a} = -\sin(23,5^\circ)\vec{i} + \cos(23,5^\circ)\vec{k}. \quad \text{2 p. (yht. 10 p.)}$$

Suuntavektoriksi voi valita yhtä hyvin myös tämän vektorin vastavektorin.

Lasketaan akselin ja Auringosta Maahan kulkevan säteen välinen kulma.

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{r})) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{|\vec{a}||\vec{r}|} \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

Koska kumpikin suuntavektoreista on selvästi yksikkövektori, saadaan

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{r})) = \frac{(-\sin(23,5^\circ)) \cdot (-\cos(30^\circ)) + 0 \cdot (-\sin(30^\circ)) + \cos(23,5^\circ) \cdot 0}{1 \cdot 1}$$

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{r})) = \sin(23,5^\circ) \cdot \cos(30^\circ)$$

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{r})) = 0,3453 \dots$$

$$\angle(\vec{a}, \vec{r}) = \arccos(0,3453 \dots)$$

$$= 69,7982 \dots^\circ$$

$$\approx 69,8^\circ \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaukseksi voi saada myös $110,2017 \dots^\circ$, riippuen siitä, onko valinnut Auringosta Maahan kulkevan säteen suuntavektorin vai Maasta Aurinkoon kulkevan säteen suuntavektorin ja vastaavasti pohjoiselle vai eteläiselle pallonpuoliskolle osoittavan akselin suuntavektorin. Jos vastaukseksi saa $110,2017 \dots^\circ$, tulee huomata, että kahden suoran välinen kulma on enintään 90° , jolloin oikea vastaus on

$$180^\circ - 110,2017 \dots^\circ = 69,7982 \dots^\circ \approx 69,8^\circ.$$

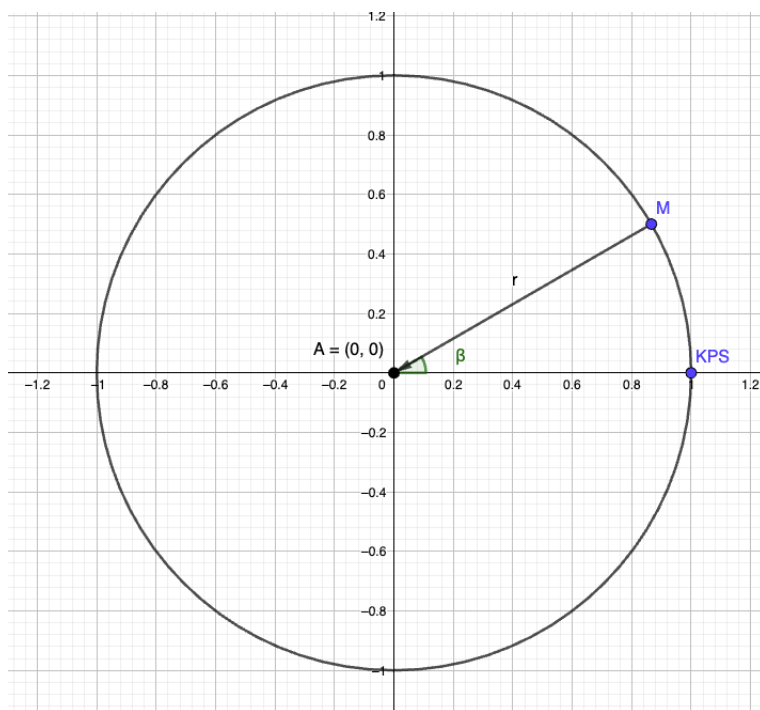
Jos kuukauden pituudeksi olettaa 30 päivää ja vuoden pituudeksi 365 päivää, vastaukseksi saa $69,7114 \dots^\circ$. Jos taas kuukauden pituudeksi olettaa 31 päivää ja vuoden pituudeksi 365 päivää, vastaukseksi saa $69,9214 \dots^\circ$. YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 20.3.2024) oli mainittu vain tapa, jossa kuukauden oletetaan olevan $\frac{1}{12}$ koko vuodesta.

Vastaus: Maan akselin ja Auringosta Maahan kulkevan säteen välinen kulma on noin $69,8^\circ$.

Pisteytyksestä: Jos oli perustellen olettanut kuukauden pituudeksi 30 tai 31 päivää ja vuoden pituudeksi 365 päivää ja laskenut näillä oletuksilla oikein, saa myös täydet pisteet.

Ratkaisuvaihtoehto 2:

Piirretään tilanteesta aluksi mallikuva. Sijoitetaan Aurinko origoon. Maapallo kulkee Auringon ympäri xy -tasossa yksikköympyrän kehää pitkin. Oletetaan, että positiivinen kiertosuunta on kuvassa vastapäivään ja kesäpäivänseisauksena Maa sijaitsee pisteessä $(1, 0)$. Kuukauden kuluttua kesäpäivänseisauksesta Maa on liikkunut pisteeseen M . 2 p. (yht. 2 p.)



Oletetaan, että kuukausi on $\frac{1}{12}$ koko vuodesta, jolloin kulma β on $\frac{1}{12}$ täydestä kulmasta:

$$\beta = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Kuukauden pituudeksi voisi olettaa myös 30 tai 31 päivää ja vuoden pituudeksi 365 päivää. Tällöin kulma β on vastaavasti

$$\beta = \frac{30}{365} \cdot 360^\circ = 29,5890 \dots^\circ \quad \text{tai} \quad \beta = \frac{31}{365} \cdot 360^\circ = 30,5753 \dots^\circ.$$

Yksikköympyrän piste M on tällöin $(\cos(30^\circ), \sin(30^\circ))$ 2 p. (yht. 5 p.), ja Maasta Auringoon kulkeva yksikkövektori $\vec{r}$ on

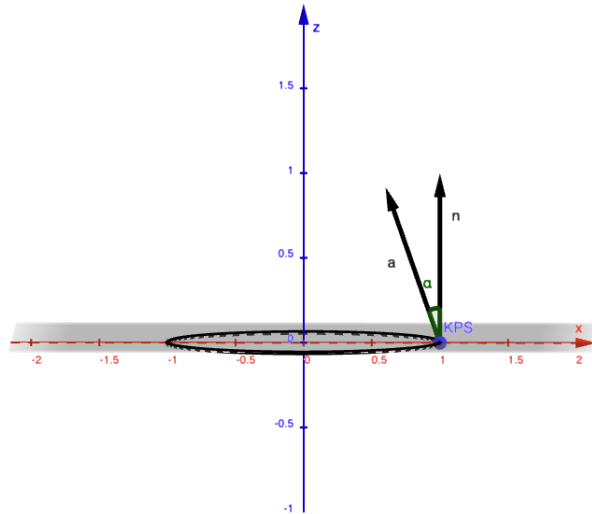
$$\vec{r} = (0 - \cos(30^\circ))\vec{i} + (0 - \sin(30^\circ))\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{r} = -\cos(30^\circ)\vec{i} - \sin(30^\circ)\vec{j}. \quad \text{3 p. (yht. 8 p.)}$$

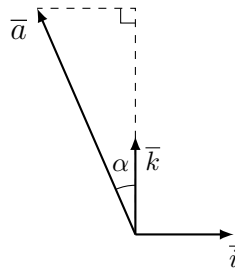
$$\vec{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}.$$

Suuntavektoriksi voi valita yhtä hyvin myös tämän vektorin vastavektorin, joka on vektori Auringosta Maahan.

Tarkastellaan seuraavaksi Maan akselia.



Merkitään kiertoradan tason normaalivektoria $\vec{n}$, akselin suuntavektoria $\vec{a}$ sekä normaalivektorin ja akselin suuntavektorin välistä kulmaa α . Tehtävänannon perusteella $\alpha = 23,5^\circ$ ja kesäpäivänseisauksena pohjoinen pallonpuolisko on lähimpänä aurinkoa. Näin ollen Maan akseli on xz -tason suuntainen.



Valitaan akselin suuntavektorin x -akselin suuntaisen komponentin pituudeksi 1. Tällöin tilanteen geometrian nojalla z -akselin suuntaisen komponentin pituus on

$$\tan(90^\circ - \alpha) \cdot 1 = \tan(66,5^\circ).$$

Suuntavektori on siis

$$\vec{a} = -\vec{i} + 0\vec{j} + \tan(66,5^\circ)\vec{k}$$

$$\vec{a} = -\vec{i} + \tan(66,5^\circ)\vec{k}. \quad \text{2 p. (yht. 10 p.)}$$

Suuntavektoriksi voi valita yhtä hyvin myös tämän vektorin vastavektorin.

Lasketaan akselin ja Auringosta Maahan kulkevan säteen välinen kulma.

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{r})) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{|\vec{a}| |\vec{r}|} \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

Vektori $\vec{r}$ on yksikkövektori, joten sen pituus on 1. Sijoittamalla yllä olevaan yhtälöön lukuarvot saadaan

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{r})) = \frac{(-1) \cdot (-\cos(30^\circ)) + 0 \cdot (-\sin(30^\circ)) + \tan(66,5^\circ) \cdot 0}{\sqrt{(-1)^2 + (\tan(66,5^\circ))^2} \cdot 1}$$

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{r})) = \frac{\cos(30^\circ)}{\sqrt{1 + (\tan(66,5^\circ))^2}}$$

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{r})) = 0,3453 \dots$$

$$\angle(\vec{a}, \vec{r}) = \arccos(0,3453 \dots)$$

$$= 69,7982 \dots^\circ$$

$$\approx 69,8^\circ \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaukseksi voi saada myös $110,2017 \dots^\circ$, riippuen siitä, onko valinnut Auringosta Maahan kulkevan säteen suuntavektorin vai Maasta Aurinkoon kulkevan säteen suuntavektorin ja vastaavasti pohjoiselle vai eteläiselle pallonpuoliskolle osoittavan akselin suuntavektorin. Jos vastaukseksi saa $110,2017 \dots^\circ$, tulee huomata, että kahden suoran välinen kulma on enintään 90° , jolloin oikea vastaus on

$$180^\circ - 110,2017 \dots^\circ = 69,7982 \dots^\circ \approx 69,8^\circ.$$

Jos kuukauden pituudeksi olettaa 30 päivää ja vuoden pituudeksi 365 päivää, vastaukseksi saa $69,7114 \dots^\circ$. Jos taas kuukauden pituudeksi olettaa 31 päivää ja vuoden pituudeksi 365 päivää, vastaukseksi saa $69,9214 \dots^\circ$. YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 20.3.2024) oli mainittu vain tapa, jossa kuukauden oletetaan olevan $\frac{1}{12}$ koko vuodesta.

Vastaus: Maan akselin ja Auringosta Maahan kulkevan säteen välinen kulma on noin $69,8^\circ$.

Pisteytyksestä: Jos oli perustellen olettanut kuukauden pituudeksi 30 tai 31 päivää ja vuoden pituudeksi 365 päivää ja laskenut näillä oletuksilla oikein, saa myös täydet pisteet.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

9. Kääntävyä, muttei monotoninen (12 p.)

Anna esimerkki funktiosta $f: A \rightarrow B$, jolla on käänteisfunktio, mutta joka ei ole monotoninen. Muista kertoa, mitkä ovat funktiosi määrittelyjoukko A ja arvojoukko B .

Ratkaisu.

Olkoon $A = \{0,1,2\}$ ja $B = \{0,1,2\}$.

Määritellään funktio $f: A \rightarrow B$ seuraavasti:

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 0. \quad (4 \text{ p. (yht. 4 p.)})$$

Funktio on kasvava, jos muuttujan arvon kasvaessa funktion arvo joko kasvaa tai pysyy samana. Vastaavasti funktio on vähenevä, jos muuttujan arvon kasvaessa funktion arvo pienenee tai pysyy samana. 1 p. (yht. 5 p.)

Funktio on monotoninen, jos se on joko kasvava tai vähenevä määrittelyjoukossaan.

1 p. (yht. 6 p.)

Tässä funktio f ei ole monotoninen, koska $f(0) < f(1)$ ja $f(2) < f(1)$. 2 p. (yht. 8 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 1:

Funktiolla on olemassa käänteisfunktio, jos funktion arvojoukko on sama kuin maalijoukko 1 p. (yht. 9 p.) ja kutakin arvojoukon arvoa vastaa täsmälleen yksi määrittelyjoukon arvo. 1 p. (yht. 10 p.)

Yllä määritellyllä funktiolla f on käänteisfunktio, koska funktio f saa kaikki arvot maalijoukosta B 1 p. (yht. 11 p.) ja jokaista arvojoukon arvoa vastaa täsmälleen yksi määrittelyjoukon arvo. 1 p. (yht. 12 p.) Käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on B ja arvojoukko A .

$$f^{-1}: B \rightarrow A, \text{ ja}$$

$$f^{-1}(0) = 2$$

$$f^{-1}(1) = 0$$

$$f^{-1}(2) = 1.$$

Näin ollen f on funktio, joka ei ole monotoninen, mutta jolla on käänteisfunktio.

Ratkaisuvaihtoehto 2:

Määritellään funktio $f^{-1} : B \rightarrow A$ siten, että

$$f^{-1}(0) = 2$$

$$f^{-1}(1) = 0$$

$$f^{-1}(2) = 1. \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

Funktion f arvojoukko on sama kuin sen maalijoukko B , joka on funktion f^{-1} määrittelyjoukko. Vastaavasti funktion f^{-1} arvojoukko on sama kuin sen maalijoukko A , joka on funktion f määrittelyjoukko. $(1 \text{ p. (yht. 10 p.)})$ Lisäksi kaikille funktion f määrittelyjoukon A alkioille x on voimassa

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad (1 \text{ p. (yht. 111 p.)})$$

joten funktio f^{-1} on funktion f käänteisfunktio. $(1 \text{ p. (yht. 12 p.)})$

Näin ollen f on funktio, joka ei ole monotoninen, mutta jolla on käänteisfunktio.

Huomaa! Kokeen tehtävänannossa joukko B oli nimetty funktion arvojoukoksi. Funktion määrittelyyn liittyvä joukko B on kuitenkin funktion *maalijoukko*, joka ei aina ole sama kuin funktion arvojoukko. Funktion arvojoukko on maalijoukon osajoukko ja maalijoukossa voi olla myös alkioita, jotka eivät kuulu arvojoukkoon.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

10. Tekoäly ja lukuteorian ihmeet (12 p.)

Aineisto:

10. A [Teksti: Lainausta tekoälyltä](#)

Alkulukua q kutsutaan *alkulukukaksoseksi*, jos myös $q + 2$ tai $q - 2$ on alkuluku. Tekoälyltä kysyttiin, kuinka monta alkulukukaksosta on olemassa, ja sen vastaus on tekstissä [10.A](#). Vastaa aineiston pohjalta seuraaviin osatehtäviin.

1. Anna esimerkki alkuluvusta, joka ei ole alkulukukaksonen. (3 p.)
2. Onko tekoälyn alkulukukaksosen määritelmä yhtäpitävä tehtävän määritelmän kanssa? (3 p.)
3. Onko tekoälyn perustelu alkulukukaksosten lukumäärän äärettömyydelle matemaattisesti pätevä? (6 p.)

Ratkaisu.

1. 2 1 p. (yht. 1 p.) **Huomaa! Myös moni muu alkuluku, kuten 23, käy vastaukseksi.**

Luku 2 on alkuluku, sillä se on ykköistä suurempi kokonaisluku, joka on jaollinen vain ykkösellä ja itsellään. Alkuluvun täytyy olla suurempi kuin 1, joten luku $2 - 2 = 0$ ei ole alkuluku, ja toisaalta alkuluku on jaollinen vain ykkösellä ja itsellään, joten luku $2 + 2 = 4$ ei ole alkuluku. Näin ollen luku 2 on alkuluku, joka ei ole alkulukukaksonen. 2 p. (yht. 3 p.)

Tehtävänannosta ei ollut selvää, vaadittiinko pisteiden saamiseen perusteluja. YTL:n hyvän vastauksen piirteiden (luettu 20.3.2024) perusteella vaikuttaisi siltä, että ainakin lyhyet perustelut vaadittiin. Tällaisessa tilanteessa on hyvä katsoa, montako pistettä kohdasta on saatavissa ja yrittää päätellä sen perusteella, onko pistemäärä suuren kuuloinen pelkästä vastauksesta ilman perusteluja.

2. Tehtävänannon määritelmän mukaan alkuluku q on alkulukukaksonen, jos joko $q - 2$ tai $q + 2$ on myös alkuluku. Toisaalta $q - 2$ ja $q + 2$ ovat ainoat kokonaisluvut, joille pätee, että niiden ja luvun q välissä on täsmälleen yksi kokonaisluku. Näin ollen tehtävänannon määritelmän voisi ilmaista myös niin, että alkuluku on alkulukukaksonen, jos löytyy toinen alkuluku siten, että näiden alkulukujen välissä on

täsmälleen yksi kokonaisluku. 2 p. (yht. 5 p.) Tämä on tekoälyn antama määritelmä, joten määritelmät ovat yhtäpitävät. 1 p. (yht. 6 p.)

Pisteytyksestä: Riittävä perustelu = 2 p., oikea johtopäätös = 1 p.

3. Tekoälyn perustelu alkulukukaksosten lukumäärän äärettömyydelle ei ole matemaattisesti pätevä. 1 p. (yht. 7 p.) Tekoäly väittää, että minkä tahansa kahden alkuluvun välissä on aina vähintään yksi positiivinen kokonaisluku, mutta tämä väite on epätosi sillä luvut 2 ja 3 ovat alkulukuja ja niiden välissä ei ole yhtään kokonaislukua. 2 p. (yht. 9 p.) Seuraavaksi tekoäly väittää, että koska minkä tahansa kahden alkuluvun välissä on aina vähintään yksi positiivinen kokonaisluku, tästä seuraa, että minkä tahansa kahden alkuluvun välissä on ainakin yksi alkulukukaksospari. Tämänkin väite on epätosi, sillä luvut 3 ja 5 ovat alkulukuja, joiden välissä on vähintään yksi kokonaisluku, mutta niiden välissä ei ole alkulukukaksosparia. 3 p. (yht. 12 p.)

Pisteytyksestä: Tekoälyn väitteiden läpikäynti ja riittävät perustelut = 2 p. + 3 p., oikea johtopäätös = 1 p.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

11. Brownin liike (12 p.)

Vuonna 1827 kasvitieteilijä Robert Brown tutki mikroskoopilla, miten siitepölyhiukkanen liikkuu nykien vedessä. Brownin koe viittasi molekyylien olemassaoloon, ja sillä oli siten tärkeä rooli atomiteorian historiassa.

Tutkitaan yksinkertaistettua Brownin liikettä. Hiukkasen liike tasossa alkaa origosta. Tasaisin väliajoin hiukkanen liikkuu yhden yksikön verran joko ylös, alas, oikealle tai vasemmalle. Jokaisen suunnan todennäköisyys on $\frac{1}{4}$. Esimerkiksi ensimmäisen askeleen jälkeen mahdolliset sijainnit ovat $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ ja $(-1, 0)$.

Tutkitaan hiukkasen sijaintia neljän askeleen jälkeen. Kutsutaan tätä päätepisteeksi. Määritä päätepisteen kaikki mahdolliset x -koordinaatit sekä niiden todennäköisyydet.

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Suurin mahdollinen päätepisteen koordinaatti saavutetaan, kun hiukkanen liikkuu neljä kertaa oikealle. Tällöin päätepisteen x -koordinaatti on 4. Vastaavasti pienin mahdollinen päätepisteen koordinaatti saavutetaan, kun hiukkanen liikkuu neljä kertaa vasemmalle. Tällöin päätepisteen x -koordinaatti on -4 . Hiukkanen voi liikkua myös nolasta neljään askelta pystysuunnassa, joten päätepisteen x -koordinaatti voi myös olla mikä vain kokonaisluku näiden kahden ääripään väliltä. Näin ollen mahdolliset päätepisteen x -koordinaatit ovat siis

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4. \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

Merkitään eri suuntien todennäköisyyksiä seuraavasti:

$$P(\text{oikealle}) = P(+)=\frac{1}{4}$$

$$P(\text{vasemmalle}) = P(-)=\frac{1}{4}$$

$$P(\text{ylös tai alas}) = P(0)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

1 p. (yht. 2 p.)

Jos päätepisteen x -koordinaatti on $x = 4$, ainoa vaihtoehto on neljä askelta oikealle. Todennäköisyys, että hiukkanen liikkuu neljä askelta oikealle on

$$P(x = 4) = P(+)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}. \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Jos päätepisteen x -koordinaatti on $x = 3$, täytyy olla tapahtunut kolme askelta oikealle ja yksi pystysuunnassa. On neljä vaihtoehtoa sille, monesko askelista on pystysuuntainen, joten todennäköisyys, että hiukkanen liikkuu kolme askelta oikealle ja yhden pystysuunnassa on

$$\begin{aligned} P(x = 3) &= 4 \cdot P(+)^3 \cdot P(0) \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} \\ &= 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}. \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)} \end{aligned}$$

Kombinatorisen selityksen sijaan voisi myös yksinkertaisesti luetella kaikki mahdolliset eri järjestykset. Kun merkitään askelta oikealle $+$:lla ja askelta pystysuunnassa 0 :lla, mahdolliset järjestykset ovat yllä olevassa tapauksessa $+++0$, $++0+$, $+0++$ ja $0+++$.

Jos päätepisteen x -koordinaatti on $x = 2$, on kaksi vaihtoehtoa, miten se on voinut tapahtua. Joko on tapahtunut kaksi askelta oikealle ja kaksi pystysuunnassa, tai vaihtoehtoisesti kolme askelta oikealle ja yksi vasemmalle.

Tarkastellaan ensin tapausta, jossa hiukkanen liikkuu kaksi askelta oikealle ja kaksi pystysuunnassa. On $\binom{4}{2} = 6$ vaihtoehtoa sille, monennetko askeleet suuntautuvat oikealle. Jäljelle jäävät askeleet tapahtuvat pystysuunnassa. Näin ollen todennäköisyys sille, että hiukkanen liikkuu kaksi askelta oikealle ja kaksi pystysuunnassa on

$$P_{2a} = 6 \cdot P(+)^2 \cdot P(0)^2. \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

Kombinatorisen selityksen sijaan voisi myös yksinkertaisesti luetella kaikki mahdolliset eri järjestykset. Kun merkitään askelta oikealle $+$:lla ja askelta pystysuunnassa 0 :lla, mahdolliset järjestykset ovat yllä olevassa tapauksessa $++00$, $+0+0$, $+00+$, $0++0$, $0+0+$ ja $00++$.

Tarkastellaan sitten tapausta, jossa hiukkanen liikkuu kolme askelta oikealle ja yhden vasemmalle. On neljä vaihtoehtoa sille, monesko askel vasemmalle suuntautuva askel on, joten todennäköisyys, että hiukkanen liikkuu kolme askelta oikealle ja yhden vasemmalle on

$$P_{2b} = 4 \cdot P(+)^3 \cdot P(-).$$

Kombinatorisen selityksen sijaan voisi myös yksinkertaisesti luetella kaikki mahdolliset eri järjestykset. Kun merkitään askelta oikealle $+$:lla ja askelta vasemmalle $-$:lla, mahdolliset järjestykset ovat yllä olevassa tapauksessa $+++$, $++-$, $+--$ ja $---$.

Täten todennäköisyys, että päätepisteen x -koordinaatti on $x = 2$ on

$$\begin{aligned} P(x = 2) &= P_{2a} + P_{2b} \\ &= 6 \cdot P(+)^2 \cdot P(0)^2 + 4 \cdot P(+)^3 \cdot P(-) \\ &= 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{7}{64} \cdot \boxed{1 \text{ p. (yht. 7 p.)}} \end{aligned}$$

Jos päätepisteen x -koordinaatti on $x = 1$, on kaksi vaihtoehtoa, miten se on voinut tapahtua. Joko on tapahtunut yksi askel oikealle ja kolme pystysuunnassa tai vaihtoehtoisesti kaksi askelta oikealle, yksi vasemmalle ja yksi pystysuunnassa.

Tarkastellaan ensin tapausta, jossa hiukkanen liikkuu yhden askeleen oikealle ja kolme pystysuunnassa. On neljä vaihtoehtoa sille, monesko askel oikealle suuntautuva askel on, joten todennäköisyys, että hiukkanen liikkuu yhden askeleen oikealle ja kolme pystysuunnassa on

$$P_{1a} = 4 \cdot P(+)^3 \cdot P(0).$$

Kombinatorisen selityksen sijaan voisi myös yksinkertaisesti luetella kaikki mahdolliset eri järjestykset. Kun merkitään askelta oikealle $+$:lla ja askelta pystysuunnassa 0 :lla, mahdolliset järjestykset ovat yllä olevassa tapauksessa $+000$, $0+00$, $00+0$ ja $000+$.

Tarkastellaan sitten tapausta, jossa hiukkanen liikkuu kaksi askelta oikealle, yhden vasemmalle ja yhden pystysuunnassa. On neljä vaihtoehtoa sille, monesko askel pystysuunnassa tapahtuva askel on. Tämän jälkeen on kolme vaihtoehtoa sille, monesko askel vasemmalle suuntautuva askel on. Loput askeleet ovat oikealle suuntautuvia. On siis yhteensä $4 \cdot 3 = 12$ vaihtoehtoista järjestystä askelille. Näin ollen todennäköisyys, että hiukkanen liikkuu kaksi askelta oikealle, yhden vasemmalle ja yhden pystysuunnassa on

$$P_{1b} = 12 \cdot P(+)^2 \cdot P(-) \cdot P(0) \cdot \boxed{1 \text{ p. (yht. 8 p.)}}$$

Kombinatorisen selityksen sijaan voisi myös yksinkertaisesti luetella kaikki mahdolliset eri järjestykset. Kun merkitään askelta oikealle $+$:lla, askelta vasemmalle $-$:lla ja

askelta pystysuunnassa 0:lla, mahdolliset järjestykset ovat yllä olevassa tapauksessa ++-0, +-+0, +-0+, -++0, -+0+, -0++ , ++0-, +0+-, +0-+, 0++-, 0+-+ ja 0-++.

Täten todennäköisyys, että päätepisteen x -koordinaatti on $x = 1$ on

$$\begin{aligned} P(x = 1) &= P_{1a} + P_{1b} \\ &= 4 \cdot P(+) \cdot P(0)^3 + 12 \cdot P(+)^2 \cdot P(-) \cdot P(0) \\ &= 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 12 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{32}. \end{aligned}$$

Jos päätepisteen x -koordinaatti on $x = 0$, on kolme vaihtoehtoa, miten se on voinut tapahtua. Joko on tapahtunut neljä askelta pystysuunnassa tai on tapahtunut yksi askel oikealle, yksi vasemmalle ja kaksi pystysuunnassa tai on tapahtunut kaksi askelta oikealle ja kaksi vasemmalle.

Tarkastellaan ensin tapausta, jossa on tapahtunut neljä askelta pystysuunnassa. Tämän todennäköisyys on

$$P_{0a} = P(0)^4.$$

Tarkastellaan sitten tapausta, jossa on tapahtunut yksi askel oikealle, yksi vasemmalle ja kaksi pystysuunnassa. On neljä vaihtoehtoa sille, monesko askel oikealle suuntautuva askel on, ja tämän jälkeen kolme vaihtoehtoa sille, monesko vasemmalle suuntautuva askel on. Loput askeleet ovat pystysuuntaisia. Näin ollen on $4 \cdot 3 = 12$ vaihtoehtoista järjestystä askelille. Tätten todennäköisyys, että hiukkanen liikkuu yhden askeleen oikealle, yhden vasemmalle ja kaksi pystysuunnassa on

$$P_{0b} = 12 \cdot P(+) \cdot P(-) \cdot P(0)^2.$$

Kombinatorisen selityksen sijaan voisi myös yksinkertaisesti luetella kaikki mahdolliset eri järjestykset. Kun merkitään askelta oikealle +:lla, askelta vasemmalle -:lla ja askelta pystysuunnassa 0:lla, mahdolliset järjestykset ovat yllä olevassa tapauksessa 00-+, 0-0+, 0-+0, -00+, -0+0, -+00, 00+-, 0+0-, 0+-0, +00-, +0-0 ja +-00.

Tarkastellaan vielä tapausta, jossa on tapahtunut kaksi askelta oikealle ja kaksi vasemmalle. On $\binom{4}{2} = 6$ vaihtoehtoa sille, monennetko askeleet oikealle suuntautuvat askeleet ovat. Loput askeleet suuntautuvat vasemmalle. Näin ollen todennäköisyys, että hiukkanen liikkuu kaksi askelta oikealle ja kaksi vasemmalle on

$$P_{0c} = 6 \cdot P(+)^2 \cdot P(-)^2.$$

Kombinatorisen selityksen sijaan voisi myös yksinkertaisesti luetella kaikki mahdolliset eri järjestykset. Kun merkitään askelta oikealle $+$:lla ja askelta vasemmalle $-$:lla, mahdolliset järjestykset ovat yllä olevassa tapauksessa $++-$, $+-$, $+-$, $+-$, $++-$, $+-$ ja $-++$.

Täten todennäköisyys, että päätepisteen x -koordinaatti on $x = 0$ on

$$\begin{aligned} P(x = 0) &= P_{0a} + P_{0b} + P_{0c} \\ &= P(0)^4 + 12 \cdot P(+)\cdot P(-)\cdot P(0)^2 + 6 \cdot P(+)^2 \cdot P(-)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 12 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{35}{128} \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)} \end{aligned}$$

Tilanne on symmetrinen vastakkaisten suuntien tapauksessa, joten

$$\begin{aligned} P(x = -1) &= P(x = 1) = \frac{7}{32} \\ P(x = -2) &= P(x = 2) = \frac{7}{64} \\ P(x = -3) &= P(x = 3) = \frac{1}{32} \\ P(x = -4) &= P(x = 4) = \frac{1}{256} \end{aligned}$$

1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Mahdolliset päätepisteen x -koordinaatit ja niiden todennäköisyydet ovat:

$$\begin{array}{lll} P(x = 4) = \frac{1}{256} & P(x = 1) = \frac{7}{32} & P(x = -2) = \frac{7}{64} \\ P(x = 3) = \frac{1}{32} & P(x = 0) = \frac{35}{128} & P(x = -3) = \frac{1}{32} \\ P(x = 2) = \frac{7}{64} & P(x = -1) = \frac{7}{32} & P(x = -4) = \frac{1}{256} \end{array}$$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Hahmotetaan koordinaatisto taulukkolaskentaohjelmaan. Merkitään värillä kaikki pisteet, jotka voivat olla hiukkasen liikkeen päätepisteitä neljän askeleen jälkeen.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1					(0,4)				
2					(0,3)				
3					(0,2)				
4					(0,1)				
5	(-4,0)	(-3,0)	(-2,0)	(-1,0)	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)
6					(0,-1)				
7					(0,-2)				
8					(0,-3)				
9					(0,-4)				

Aluksi eli nollan askeleen jälkeen hiukkanen on origossa todennäköisyydellä 1. Hiukkasen todennäköisyydet olla eri soluissa ovat siis seuraavat. Solun, jossa ei ole lukua, todennäköisyys on 0.

A 10x10 grid with a green checkerboard pattern. The center cell at row 5, column 5 is highlighted in yellow and contains the number 1.

47

[illegible][illegible]

		$=0.25*(F76+E77+E75+D76)$		
	$=0.25*(E77+D78+D76+C77)$	0.25	$=0.25*(G77+F78+F76+E77)$	
$=0.25*(D78+C79+C77+B78)$	0.25	$=0.25*(F78+E79+E77+D78)$	0.25	$=0.25*(H78+G79+G77+F78)$
	$=0.25*(E79+D80+D78+C79)$	0.25	$=0.25*(G79+F80+F78+E79)$	
		$=0.25*(F80+E81+E79+D80)$		

				0.0625				
			0.125		0.125			
		0.0625		0.25		0.0625		
			0.125		0.125			
				0.0625				

Lasketaan vastaavasti todennäköisyydet hiukkasen sijainnille kolmen askelen jälkeen. Alla olevassa kuvassa näkyy vain alueen keskiosa, koska kaavat eivät näy riittävän isoina, jos näytetään koko alue kerralla. Origo on alla olevassa kuvassa solussa E104.

		=0.25*(F101+E102+E100+D101)		
	=0.25*(E102+D103+D101+C102)	0.0625	=0.25*(G102+F103+F101+E102)	
=0.25*(D103+C104+C102+B103)	0.125	=0.25*(F103+E104+E102+D103)	0.125	=0.25*(H103+G104+G102+F103)
0.0625	=0.25*(E104+D105+D103+C104)	0.25	=0.25*(G104+F105+F103+E104)	0.0625
=0.25*(D105+C106+C104+B105)	0.125	=0.25*(F105+E106+E104+D105)	0.125	=0.25*(H105+G106+G104+F105)
	=0.25*(E106+D107+D105+C106)	0.0625	=0.25*(G106+F107+F105+E106)	
		=0.25*(F107+E108+E106+D107)		

				0.015625				
			0.046875		0.046875			
		0.046875		0.140625		0.046875		
	0.015625		0.140625		0.140625		0.015625	
		0.046875		0.140625		0.046875		
			0.046875		0.046875			
				0.015625				

Lasketaan vastaavasti todennäköisyydet hiukkasen sijainnille neljän askelen jälkeen. Alla olevassa kuvassa näkyy vain alueen keskiosa, koska kaavat eivät näy riittävän isoina, jos näytetään koko alue kerralla. Origo on alla olevassa kuvassa solussa F132.

		=0,25*(G128+E127+F129+E128)		
	=0,25*(F129+E128+E130+D129)	0,015625	=0,25*(H129+G128+G130+F129)	
=0,25*(E130+D129+D131+C130)	0,046875	=0,25*(G130+F129+F131+E130)	0,046875	=0,25*(H130+H129+H131+G130)
0,046875	=0,25*(F131+E130+E132+D131)	0,140625	=0,25*(H131+G130+G132+F131)	0,046875
=0,25*(E132+D131+D133+C132)	0,140625	=0,25*(G132+F131+F133+E132)	0,140625	=0,25*(H132+H131+H133+G132)
0,046875	=0,25*(F133+E132+E134+D133)	0,140625	=0,25*(H133+G132+G134+F133)	0,046875
=0,25*(E134+D133+D135+C134)	0,046875	=0,25*(G134+F133+F135+E134)	0,046875	=0,25*(H134+H133+H135+G134)
	=0,25*(F135+E134+E136+D135)	0,015625	=0,25*(H135+G134+G136+F135)	
		=0,25*(G136+F135+E137+E136)		

4 p. (yht. 8 p.)

Näin saadaan kunkin mahdollisen päätepisteen todennäköisyys.

				0,00390625					
			0,015625		0,015625				
		0,0234375		0,0625		0,0234375			
	0,015625		0,09375		0,09375		0,015625		
0,00390625		0,0625		0,140625		0,0625		0,00390625	
	0,015625		0,09375		0,09375		0,015625		
		0,0234375		0,0625		0,0234375			
			0,015625		0,015625				
				0,00390625					

1 p. (yht. 9 p.)

Laskemalla yhteen ne todennäköisyydet, joissa hiukkasella on sama x -koordinaatti, saadaan hiukkasen x -koordinaatin todennäköisyydet.

	X = -4	X = -3	X = -2	X = -1	X = 0	X = 1	X = 2	X = 3	X = 4
Todennäköisyys	0,00390625	0,03125	0,109375	0,21875	0,2734375	0,21875	0,109375	0,03125	0,00390625

2 p. (yht. 11 p.)

Vastaus: Mahdolliset päätepisteen x -koordinaatit ja niiden todennäköisyydet ovat:

$$\begin{array}{lll}
 P(x = 4) = 0,003\,906\,25 & P(x = 1) = 0,218\,75 & P(x = -2) = 0,109\,375 \\
 P(x = 3) = 0,031\,25 & P(x = 0) = 0,273\,437\,5 & P(x = -3) = 0,031\,25 \\
 P(x = 2) = 0,109\,375 & P(x = -1) = 0,218\,75 & P(x = -4) = 0,003\,906\,25
 \end{array}$$

1 p. (yht. 12 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

12. Potensseja aritmeettisissa lukujonoissa (12 p.)

1. Olkoon $k > 0$ kokonaisluku. Osoita, että jos päättymätön kasvava aritmeettinen lukujono sisältää luvut k^2 ja k^3 , niin se sisältää luvun k^4 . (6 p.)
2. Osoita, että jos r^2 , r^3 ja r^4 sisältyvät aritmeettiseen lukujonoon, niin r on rationaaliluku. (6 p.)

Ratkaisu.

1. Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen on muotoa

$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

missä a_1 on jonon ensimmäinen jäsen, d on erotusluku ja n jokin kokonaisluku.

Olkoon termi k^2 lukujonon m :s jäsen ja k^3 lukujonon n :s jäsen. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$k^2 = a_1 + (m - 1)d$$

$$k^3 = a_1 + (n - 1)d.$$

Tutkitaan kahden termin erotusta $k^3 - k^2$. Saadaan

$$k^3 - k^2 = a_1 + (n - 1)d - (a_1 + (m - 1)d)$$

$$= \cancel{a_1} + (n - 1)d - \cancel{a_1} - (m - 1)d$$

$$= nd - d - md + d$$

$$k^3 - k^2 = (n - m)d, \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

missä $n - m$ kahden kokonaisluvun erotuksena on myös jokin kokonaisluku.

Toisaalta termien k^3 ja k^2 erotus voidaan esittää muodossa

$$k^3 - k^2 = k^2 \cdot (k - 1). \quad \text{2 p. (yht. 3 p.)}$$

Tutkitaan seuraavaksi termien k^4 ja k^3 erotusta.

$$k^4 - k^3 = k \cdot \underbrace{k^2 \cdot (k - 1)}_{k^3 - k^2 = (n-m)d}$$

$$k^4 - k^3 = k \cdot (n - m)d \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Koska k on kokonaisluku, myös $k \cdot (n - m)$ on kokonaisluku. Siis $k^4 = k^3 + k(n - m)d$. Koska k^4 saatiin lisäämällä lukujonon jäsenen k^3 erotusluvun kokonaislukumoninkerta ja koska lukujono on päättymätön, k^4 on myös lukujonon jäsen.

2 p. (yht. 6 p.)

2.

Ratkaisuvaihtoehto 1:

Luku r on rationaaliluku, jos se voidaan ilmoittaa muodossa $r = \frac{p}{q}$, missä p ja q ovat kokonaislukuja.

Luku r voidaan ilmoittaa muodossa

$$r = \frac{r^4 - r^3}{r^3 - r^2}$$

Aritmeettisen lukujonon määritelmän perusteella voidaan kirjoittaa

$$r^4 - r^3 = md \text{ ja}$$

$$r^3 - r^2 = nd,$$

missä m ja n ovat kokonaislukuja ja d aritmeettisen lukujonon erotusluku.

3 p. (yht. 9 p.)

Siten r on lopulta muotoa

$$\frac{r^4 - r^3}{r^3 - r^2} = \frac{md}{nd}$$

$$r = \frac{m}{n} \quad \text{2 p. (yht. 11 p.)}$$

Koska r :n lauseke on muotoa $\frac{m}{n}$, missä m ja n ovat kokonaislukuja, r on rationaaliluku.

1 p. (yht. 12 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 2:

Luku r on rationaaliluku, jos se voidaan ilmoittaa muodossa $r = \frac{p}{q}$, missä p ja q ovat kokonaislukuja.

Tutkitaan lukujonon jäseniä. Olkoon

$$r^2 = a + vd$$

$$r^3 = a + sd$$

$$r^4 = a + td,$$

missä a on jonon ensimmäinen termi, d aritmeettisen jonon erotusluku ja v, s ja t kokonaislukuja.

Luvulle r voidaan muodostaa lauseke

$$r = \frac{r^4}{r^3} = \frac{a + td}{a + sd}. \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)} \quad (1)$$

Mikä tahansa kokonaisluku voidaan ilmoittaa kahden muun kokonaisluvun summana, joten t voidaan ilmoittaa kokonaislukujen s ja u summana $t = s + u$.

Lauseke (1) saadaan muotoon

$$\begin{aligned} r &= \frac{a + td}{a + sd} = \frac{a + sd + ud}{a + sd} \\ &= \frac{a + sd}{a + sd} + \frac{ud}{a + sd} \\ &= 1 + \frac{ud}{a + sd} \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)} \end{aligned} \quad (2)$$

Toisaalta termin r^2 lausekkeesta saadaan jonon ensimmäiselle termille lauseke

$$\begin{aligned} r^2 &= a + vd \\ a &= r^2 - vd. \end{aligned} \quad (3)$$

Sijoitetaan (3) lausekkeeseen (2).

$$r = 1 + \frac{ud}{r^2 - vd + sd} \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

$$r - 1 = \frac{ud}{r^2 - vd + sd}$$

$$(r - 1) \cdot (r^2 - vd + sd) = ud$$

$$r^3 - rvd + rsd - r^2 + vd - sd = ud$$

Järjestellään termejä uudelleen:

$$r^3 - r^2 - rvd + rsd + vd - sd = ud \quad (4)$$

Aritmeettisen lukujonon määritelmän perusteella perusteella termi $r^3 - r^2$ on muotoa $r^3 - r^2 = (s - v)d$. Sijoitetaan lausekkeeseen (4) ja ratkaistaan r .

$$\underbrace{r^3 - r^2}_{(s-v)d} - rvd + rsd + vd - sd = ud$$

$$(s - v)d - rvd + rsd + vd - sd = ud \quad || : d$$

$$\cancel{s} - \cancel{v} + rs - rv + \cancel{v} - \cancel{s} = u$$

$$rs - rv = u$$

$$r = \frac{u}{s - v} \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

Termin r lausekkeessa sekä osoittaja että nimittäjä voidaan ilmoittaa kokonaislukujen summana, joten r on kahden kokonaisluvun osamääränä rationaaliluku.

2 p. (yht. 12 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

13. Raja-arvo (12 p.)

Ohjelmiston mukaan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right) = \frac{1}{6}.$$

Perustele tämä tulos seuraavien välivaiheiden avulla.

[i] Osoita, että $x - \sin x - \frac{1}{6}x^3 \leq 0$, kun $0 \leq x \leq 1$.

[ii] Osoita, että $x - \sin x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \geq 0$, kun $0 \leq x \leq 1$.

[iii] Osoita, että $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 \leq x - \sin x \leq \frac{1}{6}x^3$, kun $0 \leq x \leq 1$.

[iv] Osoita, että $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 \geq x - \sin x \geq \frac{1}{6}x^3$, kun $-1 \leq x \leq 0$.

[v] Perustele näiden epäyhtälöiden avulla, että raja-arvo on $\frac{1}{6}$.

Välivaiheita voi perustella toisistaan riippumattomasti. Esimerkiksi vaiheen [iv] osapisteet saa osoittamalla, että se seuraa vaiheesta [iii], riippumatta siitä, onko vaihe [iii] todistettu. Sama pätee muihinkin vaiheisiin.

Ratkaisu.

(i)

Ratkaisuvaihtoehto 1:

Tarkastellaan väliä $0 \leq x \leq 1$. Muodostetaan sarjakehitelmä sinifunktiolle.

Sinifunktion sarjakehitelmä löytyy taulukosta.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots$$

Huomataan, että $x^5 \geq x^7$, kun $0 \leq x \leq 1$. Näin ollen

$$\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \geq 0.$$

Vastaavasti voidaan päätellä, että kaikille seuraaville sinifunktion sarjakehitelmässä esiintyville termipareille on voimassa

$$\frac{x^k}{k!} - \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} \geq 0. \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)})$$

Nyt voidaan arvioida sinifunktiota alaspäin. Alarajaksi saadaan

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \geq x - \frac{x^3}{6}. \quad (1 \text{ p. (yht. 2 p.)})$$

Näin ollen

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \quad || - \sin(x)$$

$$x - \sin(x) - \frac{x^3}{6} \leq 0. \quad (1 \text{ p. (yht. 3 p.)})$$

Väite on siis todistettu.

Ratkaisuvaihtoehto 2:

Tarkastellaan väliä $0 \leq x \leq 1$. Tarkastellaan funktiota f , jolle

$$f(x) = x - \sin(x) - \frac{1}{6}x^3.$$

Derivoidaan funktiota useamman kerran.

$$f'(x) = 1 - \cos(x) - \frac{1}{2}x^2$$

$$f''(x) = \sin(x) - x$$

$$f'''(x) = \cos(x) - 1.$$

Tiedetään, että $\cos(x) \leq 1$, joten kolmannelle derivaatalle pätee

$$f'''(x) = \cos(x) - 1 \leq 0. \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)})$$

Näin ollen toinen derivaatta $f''(x)$ on vähenevä. Toisaalta

$$f''(0) = \sin(0) - 0 = 0 - 0 = 0,$$

joten $f''(x) \leq 0$. Näin ollen ensimmäinen derivaatta $f'(x)$ on myös vähenevä. Toisaalta

$$f'(0) = 1 - \cos(0) - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = 1 - 1 - 0 = 0,$$

joten $f'(x) \leq 0$. Näin ollen $f(x)$ on myös vähenevä. 1 p. (yht. 2 p.) Toisaalta

$$f(0) = 0 - \sin(0) - \frac{1}{6} \cdot 0^3 = 0,$$

joten $f(x) \leq 0$, eli toisin sanoen

$$x - \sin(x) - \frac{1}{6}x^3 \leq 0. \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Väite on siis todistettu.

(ii)

Ratkaisuvaihtoehto 1:

Tarkastellaan väliä $0 \leq x \leq 1$. Sinifunktion sarjakehitelmä on

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

Huomataan, että $x^7 \geq x^9$, kun $0 \leq x \leq 1$. Näin ollen

$$-\frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \leq 0.$$

Vastaavasti voidaan päätellä, että kaikille seuraaville sinifunktion sarjakehitelmässä esiintyvillä termipareilla on voimassa

$$-\frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} \leq 0. \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Nyt voidaan arvioida sinifunktiota ylöspäin. Ylärajaksi saadaan

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}. \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

Näin ollen

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \geq \sin(x) \quad || - \sin(x)$$

$$x - \sin(x) - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \geq 0 \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

Väite on siis todistettu.

Ratkaisuvaihtoehto 2:

Tarkastellaan väliä $0 \leq x \leq 1$. Tarkastellaan funktiota g , jolle

$$g(x) = x - \sin(x) - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.$$

Derivoidaan funktiota kahdesti.

$$g'(x) = 1 - \cos(x) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

$$g''(x) = \sin(x) - x + \frac{1}{6}x^3 = -\left(x - \sin(x) - \frac{1}{6}x^3\right)$$

Kohdan (i) tuloksen nojalla

$$x - \sin(x) - \frac{1}{6}x^3 \leq 0 \quad || \cdot (-1) \quad (< 0, \text{ suunta vaihtuu})$$

$$-\left(x - \sin(x) - \frac{1}{6}x^3\right) \geq 0$$

$$g''(x) \geq 0 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Näin ollen $g'(x)$ on kasvava. Toisaalta

$$g'(0) = 1 - \cos(0) - \frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{1}{24} \cdot 0^4 = 0,$$

joten $g'(x) \geq 0$. Näin ollen myös $g(x)$ on kasvava. 1 p. (yht. 5 p.) Toisaalta

$$g(0) = 0 - \sin(0) - \frac{1}{6} \cdot 0^3 + \frac{1}{120} \cdot 0^5 = 0,$$

joten $g(x) \geq 0$, eli toisin sanoen

$$x - \sin(x) - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \geq 0. \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

Väite on siis todistettu.

(iii) Kohdan (i) tuloksen perusteella

$$\begin{aligned} x - \sin(x) - \frac{1}{6}x^3 &\leq 0 \quad \parallel + \frac{1}{6}x^3 \\ x - \sin(x) &\leq \frac{1}{6}x^3. \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)} \end{aligned} \quad (1)$$

Vastaavasti kohdan (ii) tuloksen perusteella

$$\begin{aligned} x - \sin(x) - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 &\geq 0 \quad \parallel + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 \\ \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 &\leq x - \sin(x). \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)} \end{aligned} \quad (2)$$

Epäyhtälöistä (1) ja (2) seuraa, että

$$\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 \leq x - \sin(x) \leq \frac{1}{6}x^3.$$

Väite on siis todistettu.

(iv)

Ratkaisuvaihtoehto 1:

Kohdan (iii) perusteella kun $0 \leq x \leq 1$, on voimassa

$$\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 \leq x - \sin(x) \leq \frac{1}{6}x^3.$$

Tarkastellaan epäyhtälössä esiintyviä lausekkeita funktioina

$$f_1(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5$$

$$f_2(x) = x - \sin(x)$$

$$f_3(x) = \frac{1}{6}x^3.$$

Kukin näistä funktioista on pariton, eli funktion arvo kohdassa $-x$ on vastaluku sen arvosta kohdassa x . 1 p. (yht. 9 p.) Näin ollen funktioiden arvojen suuruusjärjestys on päinvastainen kohdassa $-x$ verrattuna kohtaan x , joten kun $-1 \leq x \leq 0$, on voimassa

$$\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 \geq x - \sin(x) \geq \frac{1}{6}x^3. \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

Väite on siis todistettu.

Ratkaisuvaihtoehto 2:

Kohdan (iii) perusteella kun $0 \leq x \leq 1$, on voimassa

$$\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 \leq x - \sin(x) \quad (3)$$

$$x - \sin(x) \leq \frac{1}{6}x^3. \quad (4)$$

Tarkastellaan tapausta $x = -y$. Koska $0 \leq x \leq 1$, muuttujalle y on voimassa

$$0 \leq -y \leq 1 \quad \| \cdot (-1) \quad (< 0, \text{ suunta vaihtuu})$$

$$0 \geq y \geq -1. \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

Sijoitetaan $x = -y$ yhtälöön (3).

$$\frac{1}{6}(-y)^3 - \frac{1}{120}(-y)^5 \leq (-y) - \sin(-y) \quad \| \sin(-y) = -\sin(y)$$

$$-\frac{y^3}{6} - \left(-\frac{y^5}{120}\right) \leq -y - (-\sin(y))$$

$$-\left(\frac{y^3}{6} - \frac{y^5}{120}\right) \leq -(y - \sin(y)) \quad \| \cdot (-1) \quad (< 0, \text{ suunta vaihtuu})$$

$$\frac{y^3}{6} - \frac{y^5}{120} \geq y - \sin(y) \quad (5)$$

Sijoitetaan $x = -y$ yhtälöön (4).

$$-y - \sin(-y) \leq \frac{1}{6}(-y)^3 \quad \| \sin(-y) = -\sin(y)$$

$$-y - (-\sin(y)) \leq -\frac{1}{6}y^3 \quad \| \cdot (-1) \quad (< 0, \text{ suunta vaihtuu})$$

$$y - \sin(y) \geq \frac{1}{6}y^3 \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)} \quad (6)$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (5) ja (6) saadaan

$$\frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{120}y^5 \geq y - \sin(y) \geq \frac{1}{6}y^3,$$

kun $-1 \leq y \leq 0$.

Lopuksi epäyhtälö voidaan esittää muuttujan x avulla:

$$\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 \geq x - \sin(x) \geq \frac{1}{6}x^3,$$

kun $-1 \leq x \leq 0$. Väite on siis todistettu.

(v) Huomataan, että

$$\frac{1}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x^3} = \frac{x - \sin(x)}{x^3}.$$

Kohdan (iii) perusteella kun $0 \leq x \leq 1$:

$$\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 \leq x - \sin(x) \leq \frac{1}{6}x^3 \quad \parallel : x^3 \quad (> 0)$$

$$\frac{\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5}{x^3} \leq \frac{x - \sin(x)}{x^3} \leq \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}. \quad (7)$$

Toisaalta kohdan (iv) perusteella kun $-1 \leq x \leq 0$:

$$\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 \geq x - \sin(x) \geq \frac{1}{6}x^3 \quad \parallel : x^3 \quad (< 0, \text{suunta vaihtuu})$$

$$\frac{\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5}{x^3} \leq \frac{x - \sin(x)}{x^3} \leq \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}. \quad (8)$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (7) ja (8) saadaan

$$\frac{\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5}{x^3} \leq \frac{x - \sin(x)}{x^3} \leq \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}, \text{ kun } -1 \leq x \leq 1. \quad (9)$$

Alarajan raja-arvo on

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5}{x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{120}x^2 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{6} \right) + \lim_{-x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{120}x^2 \right) \\ &= \frac{1}{6} + 0 \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Ylärajan raja-arvo on

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{1}{6}. \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}\end{aligned}$$

Epäyhtälön (9) ja yllä laskettujen raja-arvojen avulla voidaan päätellä, että

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5}{x^3} \right) &\leq \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin(x)}{x^3} \right) \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} \right) \\ \frac{1}{6} &\leq \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin(x)}{x^3} \right) \leq \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Saadaan siis

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin(x)}{x^3} \right) &= \frac{1}{6} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x^3} \right) &= \frac{1}{6}. \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}\end{aligned}$$

Väite on siis todistettu.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!