



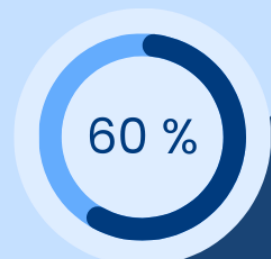
MAFYN YO-MALLIVASTAUKSET
KEVÄT 2024

LYHYT MATEMATIIKKA



Lääkikseen kevään 2023 pääsykokeella
päässeistä 67% oli opiskellut Mafynetillä.

Jopa 60 % pk-seudun lukiolaisista
opiskelee Mafynetillä yo-kirjoituksiin!





Mallivastaukset laatii
Mafyn oppimateriaalitiimi,
joka kehittää lukion
oppimateriaaleja.

Mallivastausten
tekemiseen osallistuivat
Timo Kalinainen, Saija
Ojala, Sampsa Kurvinen ja
Matti Virolainen.

PALVELUITAMME OVAT

- MAFYNETTI-OPPIMISSOVELLUS
- LÄÄKETIETEEN VALMENNUSKURSSIT
- DI-VALMENNUSKURSSIT
- KAUPPATIETEEN VALMENNUSKURSSIT
- YLIOPIILASKIRJOITUKSIIN VALMISTAVAT
KERTAUSKURSSIT.

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafy.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty.

Lukion matematiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukion kursseillasi. Nämä mallivastaukset ovat Mafy Oy:n omaisuutta.

Mafynetti

<https://mafy.fi/yhteydenotto>

Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	5
Ratkaisu tehtävään 3	12
Ratkaisu tehtävään 4	14
Ratkaisu tehtävään 5	17
Ratkaisu tehtävään 6	20
Ratkaisu tehtävään 7	22
Ratkaisu tehtävään 8	25
Ratkaisu tehtävään 9	31
Ratkaisu tehtävään 10	33
Ratkaisu tehtävään 11	35
Ratkaisu tehtävään 12	39
Ratkaisu tehtävään 13	43

Malliratkaisut päivitetty 17. kesäkuuta 2024 klo. 09:31.

1. Perustehtäviä (12 p.)

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

1.1 Mikä on yhtälön $3x - 8 = 34$ ratkaisu? (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $x = 0$ ", " $x = 1$ ", " $x = 2$ ", " $x = 3$ ", " $x = 4$ ", " $x = 5$ ", " $x = 6$ ", " $x = 7$ ", " $x = 8$ ", " $x = 9$ ", " $x = 10$ ", " $x = 11$ ", " $x = 12$ ", " $x = 13$ ", " $x = 14$ ", " $x = 15$ ", " $x = 16$ ", " $x = 17$ ", " $x = 18$ ", " $x = 19$ ", " $x = 20$ ".

1.2 Mikä on yhtälön $x^2 - 100 = 0$ positiivinen ratkaisu? (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $x = 0$ ", " $x = 1$ ", " $x = 2$ ", " $x = 4$ ", " $x = 5$ ", " $x = 6$ ", " $x = 8$ ", " $x = 10$ ", " $x = 20$ ", " $x = 25$ ", " $x = 50$ ", " $x = 100$ ".

1.3 Määritä se kohta, jossa suora $y = 3x + 12$ leikkaa x -akselin. (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $x = -10$ ", " $x = -9$ ", " $x = -8$ ", " $x = -7$ ", " $x = -6$ ", " $x = -5$ ", " $x = -4$ ", " $x = -3$ ", " $x = -2$ ", " $x = -1$ ", " $x = 0$ ", " $x = 1$ ", " $x = 2$ ", " $x = 3$ ", " $x = 4$ ", " $x = 5$ ", " $x = 6$ ", " $x = 7$ ", " $x = 8$ ", " $x = 9$ ", " $x = 10$ ".

1.4 Määritä se kohta, jossa suora $y + 2x - 6 = 0$ leikkaa y -akselin. (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $y = -10$ ", " $y = -9$ ", " $y = -8$ ", " $y = -7$ ", " $y = -6$ ", " $y = -5$ ", " $y = -4$ ", " $y = -3$ ", " $y = -2$ ", " $y = -1$ ", " $y = 0$ ", " $y = 1$ ", " $y = 2$ ", " $y = 3$ ", " $y = 4$ ", " $y = 5$ ", " $y = 6$ ", " $y = 7$ ", " $y = 8$ ", " $y = 9$ ", " $y = 10$ ".

1.5 Mikä on funktion $f(x) = 3x^8 - 68$ arvo kohdassa $x = 2$? (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $f(2) = -68$ ", " $f(2) = -20$ ", " $f(2) = 188$ ", " $f(2) = 256$ ", " $f(2) = 700$ ", " $f(2) = 768$ ".

1.6 Mikä on yhtälön $x^3 + 2197 = 0$ ratkaisu? (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $x = -19$ ", " $x = -17$ ", " $x = -15$ ", " $x = -13$ ", " $x = -11$ ", " $x = -9$ ", " $x = -7$ ", " $x = -5$ ", " $x = -3$ ", " $x = -1$ ", " $x = 1$ ", " $x = 3$ ", " $x = 5$ ", " $x = 7$ ", " $x = 9$ ", " $x = 11$ ", " $x = 13$ ", " $x = 15$ ", " $x = 17$ ", " $x = 19$ ".

Vastaukset:

1.1 $x = 14$ 2 p. (yht. 2 p.)

1.2 $x = 10$ 2 p. (yht. 4 p.)

1.3 $x = -4$ 2 p. (yht. 6 p.)

1.4 $y = 6$ 2 p. (yht. 8 p.)

1.5 $f(2) = 700$ 2 p. (yht. 10 p.)

1.6 $x = -13$ 2 p. (yht. 12 p.)

Näin vastaukset saatiin:

1.1 Ratkaistaan yhtälö.

$$3x - 8 = 34 \quad || + 8$$

$$3x = 34 + 8$$

$$3x = 42 \quad || : 3$$

$$x = 14$$

1.2 Ratkaistaan yhtälö.

$$x^2 - 100 = 0 \quad || + 100$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \pm\sqrt{100}$$

$$x = \pm 10$$

Yhtälön positiivinen ratkaisu on $x = 10$.

1.3 Suora leikkaa x -akselin kohdassa, jossa $y = 0$. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$0 = 3x + 12 \quad || - 3x$$

$$-3x = 12 \quad || : (-3)$$

$$x = -4$$

1.4 Suora leikkaa y -akselin kohdassa, jossa $x = 0$. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned}y + 2x - 6 &= 0 & \| \quad x &= 0 \\y + 2 \cdot 0 - 6 &= 0 \\y - 6 &= 0 & \| \quad + 6 \\y &= 6\end{aligned}$$

1.5 Lasketaan funktion arvo kohdassa $x = 2$ sijoittamalla $x = 2$ funktion lausekkeeseen.

$$f(2) = 3 \cdot 2^8 - 68 = 700$$

Siis $f(2) = 700$.

1.6 Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned}x^3 + 2197 &= 0 & \| \quad - 2197 \\x^3 &= -2197 \\x &= \sqrt[3]{-2197} \\x &= -13\end{aligned}$$

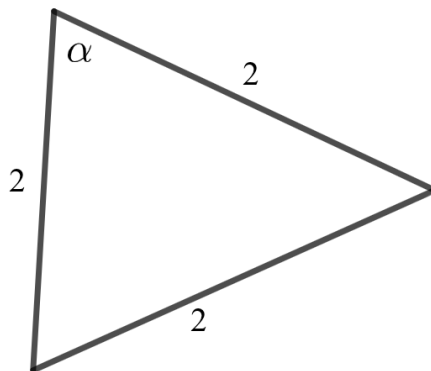
Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

2. Kulmanmetsästys (12 p.)

Määritä kuviin merkityt tuntemattomat kulmat asteen tarkkuudella.

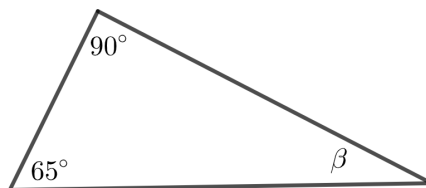
Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Jokaisen kohdan vastaus on kokonaisluku.

2.1 Määritä kulma α . (2 p.)



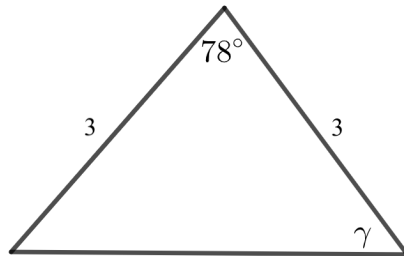
$\alpha =$ astetta

2.2 Määritä kulma β . (2 p.)



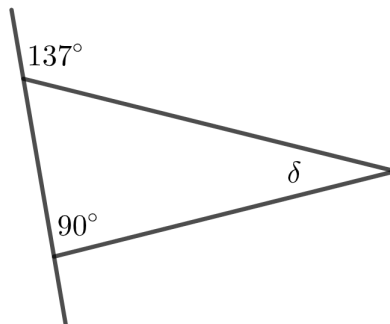
$\beta =$ astetta

2.3 Määritä kulma γ . (2 p.)



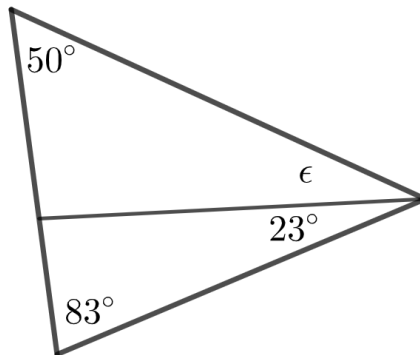
$\gamma =$ astetta

2.4 Määritä kulma δ . (2 p.)



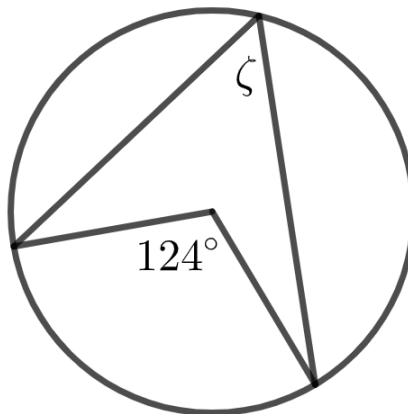
$\delta =$ astetta

2.5 Määritä kulma ϵ . (2 p.)



$\epsilon =$ astetta

2.6 Määritä kulma ζ . (2 p.)



$\zeta =$ astetta

Vastaukset.

2.1 60

2.2 25

2.3 51

2.4 47 2 p. (yht. 8 p.)2.5 24 2 p. (yht. 10 p.)2.6 62 2 p. (yht. 12 p.)**Näin vastauksiin päädyttiin:**

2.1 Kolmion kaikkien sivujen pituus on 2. Kolmio on siis tasasivuinen. Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat 60 asteen suuruiset. Kulman α suuruus on siis 60 astetta.

2.2 Kolmion kulmien summa on 180 astetta. Lasketaan kulman β suuruus:

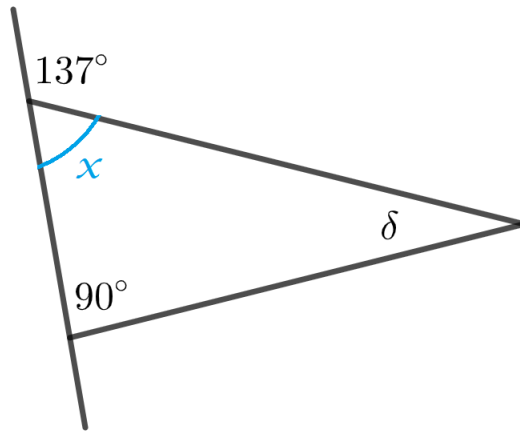
$$\begin{aligned}180^\circ &= 90^\circ + 65^\circ + \beta \\ \beta &= 180^\circ - 90^\circ - 65^\circ \\ &= 25^\circ\end{aligned}$$

Siis $\beta = 25$ astetta.

2.3 Kolmion kahden sivun pituudet ovat 3. Kolmio on siis tasakylkinen ja yhtä pitkien sivujen eli kolmion kylkien välinen kulma on kolmion huippukulma (jonka suuruus on kuvan mukaan 78°). Kolmion muut kulmat ovat kantakulmia ja ne ovat keskenään yhtä suuret. Kolmion vasen alakulma on siis yhtä suuri kuin kysytty kulma γ . Kolmiossa on siis kaksi kulmaa, joiden suuruus on kysytty γ . Kolmion kulmien summasta saadaan

$$\begin{aligned}180^\circ &= 78^\circ + \gamma + \gamma \\ 2\gamma &= 180^\circ - 78^\circ \\ 2\gamma &= 102^\circ \quad || : 2 \\ \gamma &= 51^\circ\end{aligned}$$

Eli $\gamma = 51$ astetta.



2.4 Kolmion vasemmassa yläkulmassa on kulma x , joka on 137° :een kulman vieruskulma. Vieruskulmien summa on aina 180 astetta. Ratkaistaan kulma x :

$$180^\circ = 137^\circ + x$$

$$x = 180^\circ - 137^\circ$$

$$x = 43^\circ$$

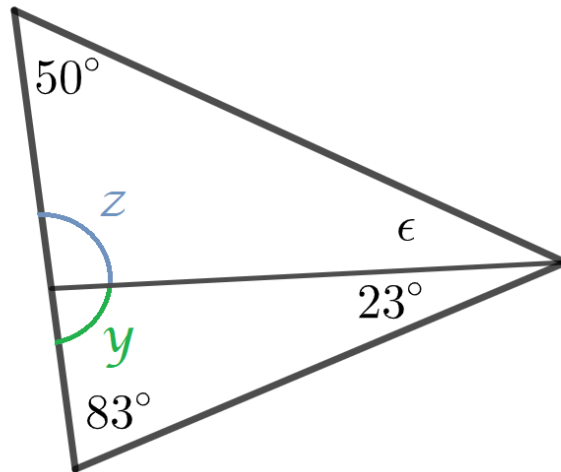
Koska kolmion kulmien summa on 180 astetta, voidaan laskea kulman δ suuruus:

$$180^\circ = 90^\circ + 43^\circ + \delta$$

$$\delta = 180^\circ - 90^\circ - 43^\circ$$

$$= 47^\circ$$

Siis $\delta = 47$ astetta.



2.5

Ratkaisuvaihtoehto 1

Kolmion kulmien summa on 180 astetta. Lasketaan kulman ϵ suuruus:

$$\begin{aligned}180^\circ &= 50^\circ + 83^\circ + 23^\circ + \epsilon \\ \epsilon &= 180^\circ - 50^\circ - 83^\circ - 23^\circ \\ &= 24^\circ\end{aligned}$$

Eli $\epsilon = 24$ astetta.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Kolmion kulmien summa on 180 astetta. Lasketaan kuvassa olevan alemman kolmion vasemman yläkulman y suuruus:

$$\begin{aligned}180^\circ &= 83^\circ + 23^\circ + y \\ y &= 180^\circ - 83^\circ - 23^\circ \\ y &= 74^\circ\end{aligned}$$

Ylemmän kolmion vasen alakulma z on kulman y vieruskulma. Ratkaistaan kulma z :

$$180^\circ = 74^\circ + z$$

$$z = 180^\circ - 74^\circ$$

$$z = 106^\circ$$

Ylemmän kolmion kulmien summa on 180 astetta. Kulman ϵ suuruus on siis

$$180^\circ = 50^\circ + 106^\circ + \epsilon$$

$$\epsilon = 180^\circ - 50^\circ - 106^\circ$$

$$= 24^\circ$$

Eli $\epsilon = 24$ astetta.

- 2.6 Kuvaan merkitty 124 asteen kulma on ympyrän keskuskulma. (Tämä ei käy varmuudella ilmi kuvasta, koska ei ole kerrottu, että kulman kärki on nimenomaan ympyrän keskipisteessä. Tehtävä ei kuitenkaan ratkea ilman, että oletetaan kulman olevan nimenomaan keskuskulma.) Kulman kärki on siis ympyrän keskipisteessä ja kulman kyljet rajaavat ympyrän kehältä kaaren. Kysytty kulma ζ puolestaan on tätä samaa kaarta vastaava kehäkulma eli kulma, jonka kärki on ympyrän kehällä ja jonka kyljet rajaavat ympyrän kehältä saman kaaren kuin 124 asteen keskuskulma. Kehäkulmalauseen perusteella tällaisen kehäkulman ζ suuruus on täsmälleen puolet sitä vastaavan keskuskulman suuruudesta. Eli $\zeta = \frac{124^\circ}{2} = 62^\circ$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

3. Laina (12 p.)

Paju on ottanut 135 000 euron lainan, jonka kiinteä vuosikorko on 4,5 prosenttia ja takaisinmaksuaika 12 vuotta ja jota lyhennetään kuukausittain. Laske Pajun 13. maksuerä, kun kyseessä on

1. annuiteettilaina. (6 p.)
2. tasalyhennyslaina. (6 p.)

Ratkaisu.

1. Lainapääoma on $K = 135\,000\text{ €}$.

Lainaa lyhennetään kuukausittain, joten kuukausikorko on

$$p = \frac{4,50\%}{12} = 0,375\%. \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)})$$

Korkotekijä on tällöin

$$\begin{aligned} q &= 1 + \frac{p}{100} \quad \| p = 0,375 \\ &= 1 + \frac{0,375}{100} \\ &= 1,00375. \quad (1 \text{ p. (yht. 2 p.)}) \end{aligned}$$

Lainaa lyhennetään 12 vuoden ajan kuukausittain, joten maksuerien määrä on $n = 12 \cdot 12 = 144$. 1 p. (yht. 3 p.)

Lasketaan maksuerän suuruus annuiteetin kaavalla.

$$\begin{aligned} A &= K \cdot q^n \cdot \frac{1 - q}{1 - q^n} \quad \| K = 135\,000\text{ €}, q = 1,00375, n = 144 \\ &= 135\,000\text{ €} \cdot 1,00375^{144} \cdot \frac{1 - 1,00375}{1 - 1,00375^{144}} \quad (2 \text{ p. (yht. 5 p.)}) \\ &= 1215,011 \dots \text{ €} \\ &\approx 1215,01\text{ €} \end{aligned}$$

Annuiteettilainassa jokainen maksuerä on yhtä suuri, joten 13. maksuerä on 1215,01 €. 1 p. (yht. 6 p.)

Vastaus: 1215,01 €

2. Tasalyhennyslainassa lainaa lyhennetään jokaisessa maksuerässä yhtä suuri määrä. 1 p. (yht. 7 p.)

Lainapääoma on 135 000 € ja lainaa lyhennetään $12 \cdot 12 = 144$ kertaa. Lasketaan yksittäisen lyhennyksen suuruus.

$$\frac{135\,000\text{ €}}{144} = 937,50\text{ €} \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

Kun tarkastellaan 13. maksuerää, on lainaa lyhennetty 12 kertaa. Lasketaan, kuinka paljon lainaa on jäljellä 12 lyhennyksen jälkeen.

$$135\,000\text{ €} - 12 \cdot 937,50\text{ €} = 123\,750\text{ €} \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

Korkoa kertyy jäljellä olevasta lainapääomasta, joten 13. maksuerään korkoa kertyy 123 750 eurosta yhden kuukauden ajalta. Korkoaika on $t = \frac{1}{12}$ vuotta ja korkokerroin on $i = 0,045$. Lasketaan kertynyt korko yksinkertaisen koron kaavalla.

$$\begin{aligned} r &= kit \quad || \quad k = 123\,750\text{ €}, i = 0,045, t = \frac{1}{12} \\ &= 123\,750\text{ €} \cdot 0,045 \cdot \frac{1}{12} \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)} \\ &= 464,0625\text{ €} \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)} \end{aligned}$$

Maksuerä muodostuu lainan lyhennyksestä ja kuukauden aikana kertyneestä korosta, joten 13. maksuerä on

$$937,50\text{ €} + 464,0625\text{ €} = 1401,5625\text{ €} \approx 1401,56\text{ €}. \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: 1401,56 €

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

4. Eksponentiaalisia kuvaajia (12 p.)

Aineisto:

4. A [Kuva: Eksponentiaalinen kuvaaja](#)
 4. B [Kuva: Kolme kuvaajaa](#)

1. Kuvassa [4.A](#) on funktion $u(x) = a b^x$ kuvaaja. Määritä vakiot a ja b . (6 p.)
2. Kuvassa [4.B](#) on kuvaajat f , g ja h . Kaksi niistä ei ole muotoa $v(x) = c d^x$ olevan funktion kuvaaja millään vakioilla c ja d . Perustele, mitkä kaksi. (6 p.)

Ratkaisu.

1. Ratkaistaan ensin vakion a arvo. Kun $x = 0$, tekijä $b^x = b^0 = 1$ riippumatta b :n arvosta. Funktion $u(x) = a b^x$ arvo kohdassa $x = 0$ on siis

$$u(0) = a b^0$$

$$u(0) = a \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

Kuvan perusteella funktion arvo on tässä kohtaa 1,5. **Kuvaaja leikkaa pystyakselin pisteessä $(0; 1,5)$.** Vakion a arvo on siis 1,5. 1 p. (yht. 2 p.)

Vakion b arvo voidaan nyt ratkaista esimerkiksi kuvaajan kohdasta $x = 1$. Funktion arvo on tässä kohtaa kuvaajan perusteella 3,0 2 p. (yht. 4 p.), eli

$$u(1) = 1,5 b^1 \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

$$3,0 = 1,5 b \quad || : 1,5$$

$$b = \frac{3,0}{1,5}$$

$$b = 2 \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

Vastaus: Vakioiden arvot ovat $a = 1,5$ ja $b = 2$.

Pisteytyksestä: Vakion a arvon voi antaa myös muodossa $\frac{3}{2}$.

Vakion b arvon voi määrittää muistakin kuvaajan kohdista. Esimerkiksi kohdassa $x = 2$ kuvaajan arvo näyttää olevan 6,0. Tästä tilanteesta saadaan yhtälö $u(2) = 1,5 b^2 = 6,0$. Tästä yhtälöstä saadaan sama ratkaisu $b = 2$.

2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Aloitetaan kuvaajasta f . Jos se on muotoa $v(x) = c d^x$, vakion c arvo saadaan kohdasta $x = 0$ kuten tehtävässä 4.1. Tällöin olisi

$$v(0) = c d^0$$

$$v(0) = c$$

Kuvaaja f leikkaa pystyakselin origossa, joten tällöin vakion c arvo olisi nolla.

1 p. (yht. 7 p.)

Mutta jos $c = 0$, funktio $v(x) = 0 \cdot d^x = 0$ kaikilla mahdollisilla x :n arvoilla.

1 p. (yht. 8 p.)

Kuvaaja f ei siis voi olla minkään muotoa $v(x) = c d^x$ olevan funktion kuvaaja.

1 p. (yht. 9 p.)

Tutkitaan kuvaajaa h samalla tavalla. Jos se on muotoa $v(x) = c d^x$, vakion c arvo saadaan kohdasta $x = 0$, eli kuvaajalle h vakion c arvoksi saadaan 1. Vakio d voidaan ratkaista kahdesta kohtaa kuvaajalta, esimerkiksi kohdista $x = 1$ ja $x = 2$. Kun $x = 1$, funktion arvo on 2 eli:

$$v(1) = c d^1$$

$$2 = 1 \cdot d$$

$$d = 2$$

1 p. (yht. 10 p.)

Toisaalta kohdassa $x = 2$ funktion h arvo on 3, eli:

$$v(2) = c d^2$$

$$3 = 1 \cdot d^2$$

$$d = \pm\sqrt{3}$$

1 p. (yht. 11 p.)

Vakiolle d saadaan siis eri lukuarvot riippuen siitä, mistä kohtaa kuvaajaa luetaan. Koska d :n pitää olla vakio, tämä on ristiriita. Kuvaaja h ei siis voi olla minkään muotoa $v(x) = c d^x$ olevan funktion kuvaaja.

1 p. (yht. 12 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 2

Kuvaaja f voidaan hylätä samalla perustelulla kuin edellisessä ratkaisuvaihtoehdossa. 3 p. (yht. 9 p.)

Muotoa $v(x) = c d^x$ oleva funktio on tehtävän otsikon mukaisesti eksponentiaalinen funktio. Tällaisella funktiolla on ominaisuus, jonka mukaan suhdeluku funktion kahden arvon välillä on aina vakio, kunhan arvot lasketaan pisteistä, joiden välinen etäisyys on vakio. Eli suhteiden $\frac{h(1)}{h(0)}, \frac{h(2)}{h(1)}, \frac{h(3)}{h(2)}$ jne. pitäisi olla yhtä suuria, sillä funktion h arvoja lasketaan aina pisteissä, jotka ovat yhden päässä toisistaan. Vertaa geometriseen lukujonoon, jonka peräkkäisten jäsenten suhde on aina vakio.

Lasketaan nämä suhteet:

$$\frac{h(1)}{h(0)} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

$$\frac{h(2)}{h(1)} = \frac{3}{2} = 1,5 \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

$$\frac{h(3)}{h(2)} = \frac{4}{3} = 1,333 \dots$$

Jos h olisi muotoa $v(x) = c d^x$ olevan funktion kuvaaja eli eksponentiaalisen funktion kuvaaja, näiden suhteiden pitäisi olla yhtä suuria. Kuvaaja h ei siis voi olla minkään muotoa $v(x) = c d^x$ olevan funktion kuvaaja. 1 p. (yht. 12 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 3

Funktiossa $v(x) = c d^x$ on kaksi tulon tekijää, c ja d^x . Näistä jälkimmäinen tekijä d^x on aina positiivinen, riippumatta d :n ja x :n arvoista. 1 p. (yht. 7 p.) Vakion d on oltava positiivinen ja erisuuri kuin 1, jotta eksponenttifunktio on edes määritelty. Jos ensimmäinen tekijä c on positiivinen, funktion $v(x) = c d^x$ kaikki arvot ovat positiivisia. 1 p. (yht. 8 p.) Vastaavasti, jos ensimmäinen tekijä on negatiivinen, funktio $v(x) = c d^x$ saa ainoastaan negatiivisia arvoja. 1 p. (yht. 9 p.)

Kuvaajat f ja h leikkaavat x -akselin, eli ne kuvaavat funktioita, jotka saavat sekä negatiivisia että positiivisia lukuarvoja. 2 p. (yht. 11 p.) Ne eivät siis voi kuvata mitään muotoa $v(x) = c d^x$ olevaa funktiota. 1 p. (yht. 12 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

5. Koulutuspäivä (12 p.)

Ohjelmistoyhtiö järjestää koulutuspäivän, jonka tilavuokrat ovat 1 000 euroa. Osallistumismaksu on 30 euroa, joka sisältää ruokailun koulutuspäivän lopuksi. Ruokailun järjestäminen maksaa ohjelmistoyhtiölle 11,50 euroa jokaista ruokailijaa kohti, mutta järjestäjät arvioivat, että puolet osallistujista lähtee kotiin heti koulutuksen päätyttyä eikä osallistu ruokailuun. Kuinka monta osallistujaa koulutuspäivään pitäisi saada, jotta se ei tuottaisi tappiota ohjelmistoyhtiölle? Vastaa kysymykseen muodostamalla ongelmaa kuvaava yhtälö tai epäyhtälö ja ratkaisemalla se. Tehtävässä ei huomioida veroja.

Ratkaisu.

Merkitään koulutuspäivään osallistuvien henkilöiden määrää kirjaimella x . 1 p. (yht. 1 p.)

Osallistumismaksu koulutukseen on 30 euroa, joten ohjelmistoyhtiö saa koulutuspäivästä tuloja $30x$ euroa. 2 p. (yht. 3 p.)

Ohjelmistoyhtiölle aiheutuvat kustannukset muodostuvat tilavuokrasta ja ruokailusta. Tilavuokra on 1000 euroa. Ruokailu on 11,50 euroa jokaista ruokailijaa kohden.

Ruokailuun osallistuu arvion mukaan puolet koulutuspäivän osallistujista. Ruokailijoiden määrä on siis $0,5x$. 1 p. (yht. 4 p.) Koulutuspäivästä aiheutuvat kokonaiskustannukset ovat euroina $1000 + 11,50 \cdot 0,5x$. 2 p. (yht. 6 p.)

Ohjelmistoyhtiö ei jää tappiolle, jos koulutuspäivästä saatavat tulot ovat suuremmat tai yhtä suuret kuin kustannukset. 1 p. (yht. 7 p.) Alla on esitetty kaksi vaihtoehtoista ratkaisutapaa tehtävän loppuosalle.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, kuinka monta osallistujaa koulutuspäivään tarvitaan, jotta tulot olisivat yhtä suuret kuin kustannukset.

$$30x = 1000 + 11,50 \cdot 0,5x \quad \text{2 p. (yht. 9 p.)}$$

$$30x = 1000 + 5,75x \quad || - 5,75x$$

$$30x - 5,75x = 1000$$

$$24,25x = 1000 \quad || : 24,25$$

$$x = 41,2371 \dots \quad \text{2 p. (yht. 11 p.)}$$

Yhtälö voidaan ratkaista myös laskinohjelmalla, kunhan asia ilmaistaan selkeästi ratkaisussa.

Mitä suurempi osallistujien määrä on, sitä enemmän tuloja ohjelmistoyhtiö saa. Jos osallistujia on 41, yhtiön saamat tulot eivät vielä riitä kattamaan kokonaiskustannuksia. Kun osallistujia on 41, niin tulot ovat

$$30 \text{ €} \cdot 41 = 1230 \text{ €}$$

ja kokonaiskustannukset

$$1000 \text{ €} + 11,50 \cdot 0,50 \cdot 41 \text{ €} = 1235,75 \text{ €}.$$

Tulot ovat siis kokonaiskustannuksia pienemmät ja yritys jää tappiolle.

Kun osallistujien määrä on 42, yhtiön saamat tulot riittävät kattamaan kokonaiskustannukset. Kun osallistujia on 42, niin tulot ovat

$$30 \text{ €} \cdot 42 = 1260 \text{ €}$$

ja kokonaiskustannukset

$$1000 \text{ €} + 11,50 \cdot 0,50 \cdot 42 \text{ €} = 1241,50 \text{ €}.$$

Tulot ovat siis kokonaiskustannuksia suuremmat ja yritys ei jää enää tappiolle.

Koulutuspäivään pitäisi saada siis vähintään 42 osallistujaa, jotta yritys ei jäisi tappiolle. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Vähintään 42 osallistujaa.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan, kuinka monta osallistujaa koulutuspäivään tarvitaan, jotta tulot olisivat suuremmat tai yhtä suuret kuin kustannukset.

$$30x \geq 1000 + 11,50 \cdot 0,5x \quad \text{2 p. (yht. 9 p.)}$$

$$30x \geq 1000 + 5,75x \quad || - 5,75x$$

$$30x - 5,75x \geq 1000$$

$$24,25x \geq 1000 \quad || : 24,25$$

$$x \geq 41,2371 \dots \quad \text{2 p. (yht. 11 p.)}$$

Epäyhtälö voidaan ratkaista myös laskinohjelmalla, kunhan asia ilmaistaan selkeästi ratkaisussa.

Koulutuspäivään pitäisi saada vähintään 42 osallistujaa, jotta yritys ei jäisi tappiolle.

1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Vähintään 42 osallistujaa.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

6. Puun hinta (12 p.)

Aineisto:

6. A [Taulukko: Raakapuusta maksettu kuutiohintaa euroissa](#)

Taulukossa [6.A](#) on esitetty loppuvuonna 2022 raakapuusta harvennushakkuun yhteydessä maksetun kuutiohinnan keskiarvoja eri alueilla.

Mikolla on mäntyä kasvava metsäpalsta Etelä-Suomessa ja Maijulla kuusta kasvava palsta Kainuussa. Mikon palstalta hakattiin harvennushakkuussa noin 110 kuutiometriä puuta, josta 40 % oli tukkipuuta ja 60 % kuitupuuta. Maijun palstalta hakattiin harvennuksessa noin 120 kuutiometriä puuta, josta 70 % oli tukkipuuta ja 30 % kuitupuuta. Kuinka paljon Mikolle ja Maijulle maksettiin hakkuista, kun puun ostaja maksoi heille puun hinnan lisäksi 24 %:n arvonlisäveron?

Ratkaisu.

Mikon Etelä-Suomessa sijaitsevasta metsästä kaadetaan noin 110 m^3 mäntyä. Tästä 40 % on tukkipuuta ja 60 % kuitupuuta.

Mikon metsästä kaadetaan tukkipuuta

$$0,4 \cdot 110 \text{ m}^3 = 44 \text{ m}^3 \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)}$$

ja kuitupuuta

$$0,6 \cdot 110 \text{ m}^3 = 66 \text{ m}^3. \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Mikolle maksetaan tukkipuusta 64,16 euroa kuutiometriltä ja kuitupuusta 20,63 euroa kuutiometriltä. Kun arvonlisäveroa ei oteta huomioon, Mikko saa tukkipuusta

$$44 \cdot 64,16 \text{ €} = 2823,04 \text{ €} \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

ja kuitupuusta

$$66 \cdot 20,63 \text{ €} = 1361,58 \text{ €}. \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

Kun arvonlisäveroa ei oteta huomioon, Mikolle maksetaan yhteensä

$$2823,04 \text{ €} + 1361,58 \text{ €} = 4184,62 \text{ €}.$$

Mikolle maksetaan lisäksi 24 % arvonlisävero. Verollinen rahasumma on

$$100 \% + 24 \% = 124 \%$$

verottomasta summasta eli verottomaan summaan nähden 1,24-kertainen. Kun arvonlisävero otetaan huomioon, Mikolle maksetaan yhteensä

$$1,24 \cdot 4184,62 \text{ €} = 5188,9288 \text{ €} \approx 5200 \text{ €}. \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

Maijun Kainuussa sijaitsevasta metsästä kaadetaan noin 120 m^3 kuusta. Tästä 70 % on tukkipuuta ja 30 % kuitupuuta.

Maijun metsästä kaadetaan tukkipuuta

$$0,7 \cdot 120 \text{ m}^3 = 84 \text{ m}^3 \quad \text{2 p. (yht. 8 p.)}$$

ja kuitupuuta

$$0,3 \cdot 120 \text{ m}^3 = 36 \text{ m}^3. \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

Maijulle maksetaan tukkipuusta 54,48 euroa kuutiometriltä ja kuitupuusta 17,61 euroa kuutiometriltä. Kun arvonlisäveroa ei oteta huomioon, Maiju saa tukkipuusta

$$84 \cdot 54,48 \text{ €} = 4576,32 \text{ €} \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

ja kuitupuusta

$$36 \cdot 17,61 \text{ €} = 633,96 \text{ €}. \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

Kun arvonlisäveroa ei oteta huomioon, Maijulle maksetaan yhteensä

$$4576,32 \text{ €} + 633,96 \text{ €} = 5210,28 \text{ €}.$$

Maijulle maksetaan lisäksi 24 % arvonlisävero. Kun arvonlisävero otetaan huomioon, Maijulle maksetaan yhteensä

$$1,24 \cdot 5210,28 \text{ €} = 6460,7472 \text{ €} \approx 6500 \text{ €}. \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: Mikolle maksettiin noin 5200 € ja Maijulle noin 6500 €.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

7. Tiimalasi (12 p.)

Aineisto:

7. A [Kuva: Tiimalasi](#)

Tiimalasi koostuu kahdesta samanlaisesta osasta, jotka on asetettu vastakkain; katso esimerkki kuvassa [7.A](#). Yhden osan korkeus on 18 cm. Tiimalasi sisältää nestettä, joka valuu hitaasti yläosasta alaosaan. Nestettä on sen verran, että tiimalasin alaosa on täynnä nestettä, kun yläosa on tyhjentynyt.

Tiimalasi käännetään, kun kaikki neste on alaosassa. Kääntämisestä kulunut aika t minuutteina voidaan laskea kaavalla

$$t = 120 \left(1 - \left(1 - \frac{h}{18} \right)^3 \right),$$

jossa h on (uudessa) alaosassa olevan nesteen pinnan korkeus senttimetreinä pohjasta mitattuna.

1. Millä korkeudella tiimalasin pohjalla olevan nesteen pinta on, kun aikaa kääntämisestä on kulunut tasan tunti? (4 p.)
2. Kun aikaa on kulunut 13 minuuttia, niin tiimalasin pohjalla on 1,0 desilitraa nestettä. Tiedetään, että tiimalasin pohjalla olevan nesteen määrä on suoraan verrannollinen kääntämisestä kuluneeseen aikaan. Kuinka paljon nestettä tiimalasissa kaiken kaikkiaan on? (8 p.)

Ratkaisu.

1. Kun aikaa tiimalasin kääntämisestä on kulunut tasan tunti, $t = 60$ (min). Sijoitetaan tämä annettuun yhtälöön ja lasketaan alaosassa olevan nesteen pinnan korkeus h laskinohjelmalla:

$$t = 120 \left(1 - \left(1 - \frac{h}{18} \right)^3 \right) \quad \parallel \text{sij. } t = 60$$

$$60 = 120 \left(1 - \left(1 - \frac{h}{18} \right)^3 \right) \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)}$$

Laskinohjelmalla saadaan tulos

$$h = 3,713\,390 \dots$$

$$h \approx 3,7 \text{ (cm)} \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Vastaus: Tiimalasin pohjalla olevan nesteen pinta on korkeudella 3,7 cm. 1 p. (yht. 4 p.)

2. Ratkaistaan aluksi, kuinka kauan tiimalasin kaiken nesteen valumiseen kuluu aikaa. Tehtävänannossa sanotaan, että tiimalasin alaosa on täynnä nestettä, kun yläosa on tyhjentynyt. Toisaalta sanotaan myös, että alaosan korkeus on 18 cm.

1 p. (yht. 5 p.)

Lasketaan kaiken nesteen valumiseen kuluva aika t yhtälöstä

$$t = 120 \left(1 - \left(1 - \frac{h}{18} \right)^3 \right)$$

sijoittamalla alaosan nesteen korkeudeksi $h = 18$:

$$t = 120 \left(1 - \left(1 - \frac{18}{18} \right)^3 \right) \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

$$= 120 \text{ (min)} \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

Tiimalasin pohjalla olevan nesteen määrä (eli tilavuus) on suoraan verrannollinen kääntämisestä kuluneeseen aikaan. Saadaan verrantoyhtälö

$$\frac{\text{koko tilavuus}}{\text{koko aika}} = \frac{\text{tilavuus 13 min kohdalla}}{13 \text{ min}} \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

Ratkaistaan nesteen koko tilavuus tästä yhtälöstä. Merkitään nesteen koko tilavuutta V :llä:

$$\frac{V}{120 \text{ min}} = \frac{1,0 \text{ dl}}{13 \text{ min}} \quad || \cdot 120 \text{ min} \quad \text{2 p. (yht. 10 p.)}$$

$$V = \frac{1,0 \text{ dl}}{13 \text{ min}} \cdot 120 \text{ min}$$

$$V = 9,230\,769 \dots \text{ dl}$$

$$\approx 9,2 \text{ dl} \quad \text{2 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: Tiimalasissa on kaiken kaikkiaan 9,2 desilitraa nestettä.

Pisteytyksestä: Vastauksen voi ilmoittaa myös muodossa 0,92 l.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

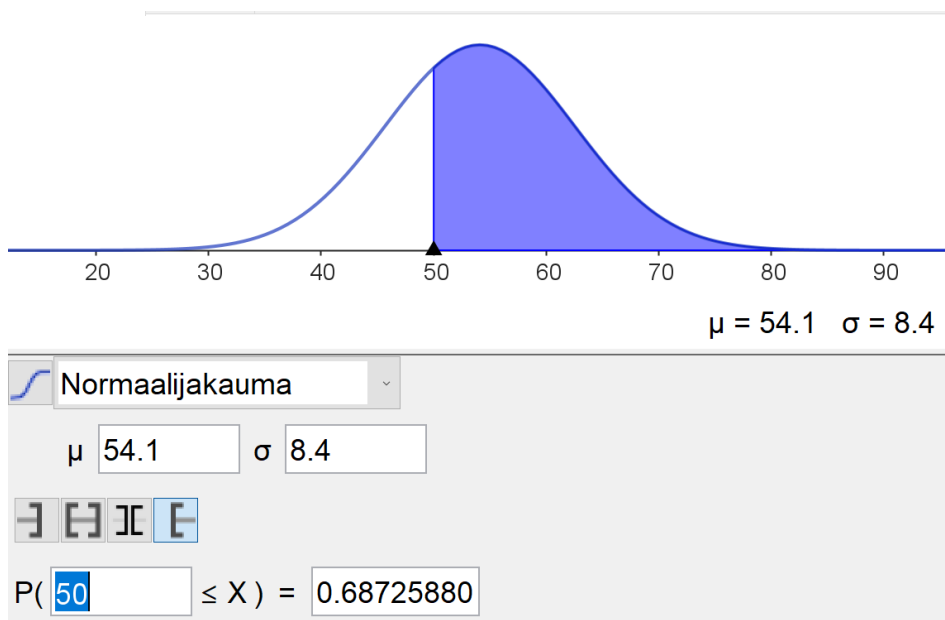
8. Vitamiinipitoisuus (12 p.)

Yritys valmistaa D3-vitamiinikapseleita. Pakkauksen mukaan yksi kapseli sisältää 50 mikrogrammaa D3-vitamiinia. Yritys antaa kapseleiden laadunvarmistuksen erään tutkimuslaitoksen tehtäväksi. Laitoksen mikrobiologi määrittää yhden kapselin sisältämän D3-vitamiinin määrän olevan normaalijakautunut odotusarvona 54,1 mikrogrammaa ja keskihajontana 8,4 mikrogrammaa.

1. Vitamiinin käyttäjä valitsee pakkauksesta umpimähkään yhden kapselin. Millä todennäköisyydellä kapseli sisältää vähintään 50 mikrogrammaa D3-vitamiinia? (5 p.)
2. Yritys haluaa varmistaa, että 95 % kapseleista sisältää vähintään 50 mikrogrammaa D3-vitamiinia. Millä D3-vitamiinimäärän odotusarvolla tämä vaatimus saavutetaan laadunvarmistuksessa? Oletetaan, että vitamiinin määrän kasvattaminen ei vaikuta keskihajontaan. (7 p.)

Ratkaisu.

1. Lasketaan kysytty todennäköisyys CAS-ohjelmalla. Alla oleva esimerkkikuva on GeoGebran todennäköisyyslaskurista.



4 p. (yht. 4 p.)

Vastaus: Todennäköisyys sille, että kapseli sisältää vähintään 50 mikrogrammaa D3-vitamiinia, on $0,68725 \dots \approx 0,69$. 1 p. (yht. 5 p.)

Vastaus voidaan antaa myös prosentteina.

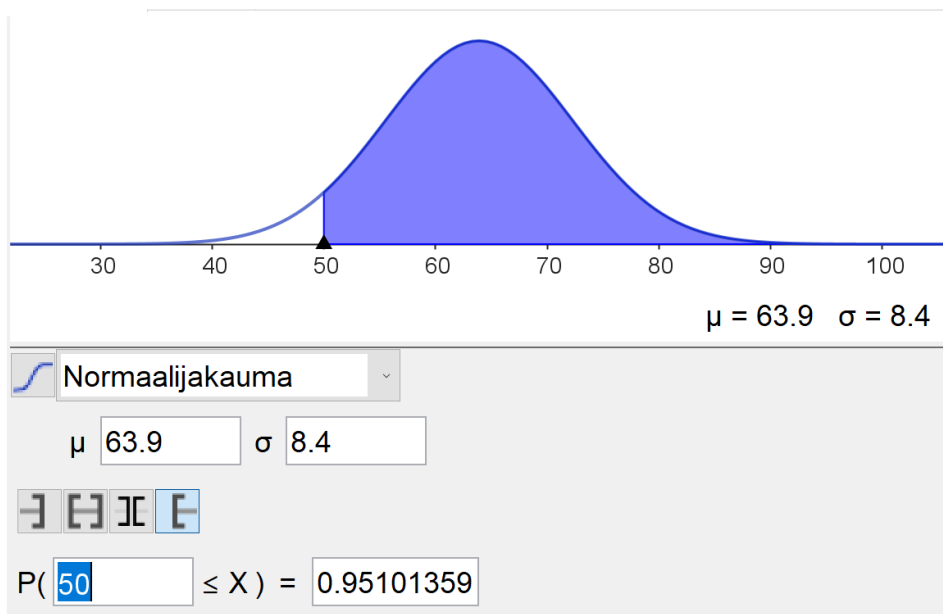
2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Etsitään CAS-ohjelmalla kokeilemalla raja sille, mikä on riittävän suuri odotusarvo. 2 p. (yht. 7 p.)

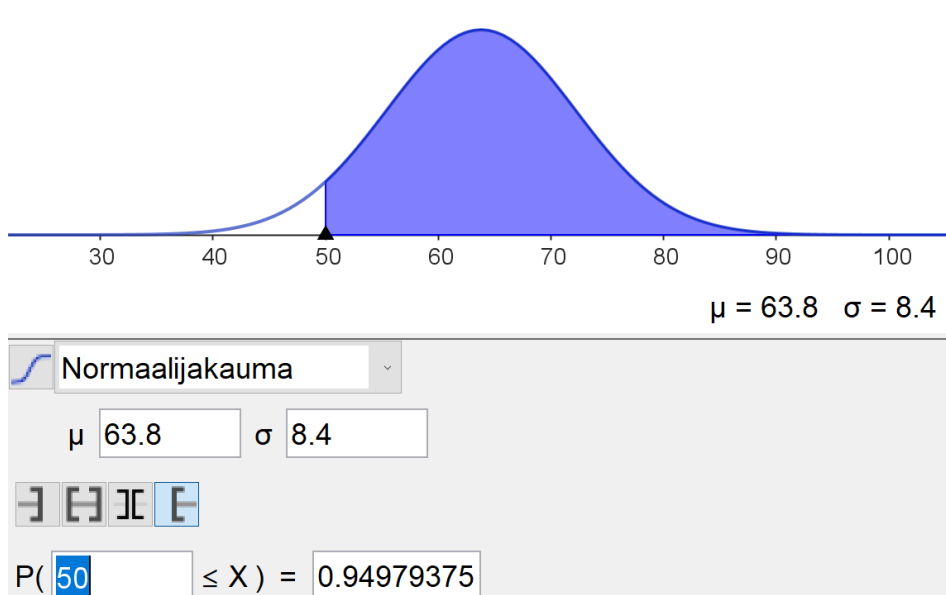
Kokeileminen voidaan aloittaa mistä arvosta tahansa, mutta arvot 63,8 ja 63,85 mikrogrammaa on kokeiltava, eikä muiden arvojen kokeilemista tarvitse kirjoittaa ratkaisuun.

Asetetaan D3-vitamiinin määrän odotusarvoksi 63,9 mikrogrammaa ja keskihajonnaksi 8,4 mikrogrammaa. Lasketaan CAS-ohjelmalla todennäköisyys sille, että kapseli sisältää vähintään 50 mikrogrammaa D3-vitamiinia.



Todennäköisyys on $0,95101 \dots$, joka on suurempi kuin $0,95$. Siten $63,9$ mikrogrammaa on riittävän suuri odotusarvo. Se voi kuitenkin olla jopa liian suuri odotusarvo, joten pitää kokeilla pienempää arvoa.

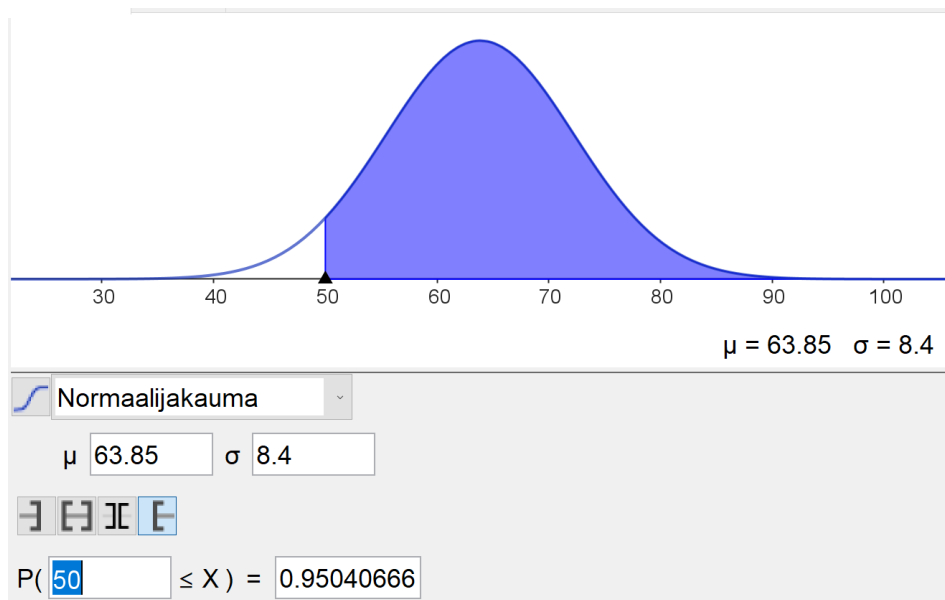
Asetetaan odotusarvoksi $63,8$ mikrogrammaa ja keskihajonnaksi $8,4$ mikrogrammaa. Lasketaan CAS-ohjelmalla todennäköisyys sille, että kapseli sisältää vähintään 50 mikrogrammaa D3-vitamiinia.



1 p. (yht. 8 p.)

Todennäköisyys on $0,94979 \dots$, joka on pienempi kuin $0,95$. Siten täsmälleen $63,8$ mikrogrammaa on liian pieni odotusarvo. 1 p. (yht. 9 p.)

Muutetaan odotusarvoksi $63,85$ mikrogrammaa ja lasketaan sama todennäköisyys uudelleen.



1 p. (yht. 10 p.)

Todennäköisyys on 0,95040 . . . , joka on suurempi kuin 0,95, joten 63,85 mikrogrammaa on riittävän suuri odotusarvo. Koska toisaalta 63,8 mikrogrammaa on liian pieni odotusarvo, niin kysytty odotusarvo on 63,8 ja 63,85 mikrogramman välissä. 1 p. (yht. 11 p.) Kysytty odotusarvo on siis yhden desimaalin tarkkuudella 63,8 mikrogrammaa. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Vaatimus saavutetaan, kun odotusarvo on vähintään 63,8 mikrogrammaa.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Selvitetään, mikä odotusarvon pitäisi olla, jotta todennäköisyys saada vähintään 50 mikrogramman tabletti olisi täsmälleen 0,95. Tällöin todennäköisyys saada alle 50 mikrogramman tabletti on $1 - 0,95 = 0,05$. 1 p. (yht. 6 p.)

Ratkaistaan sopiva yhtälö CAS-ohjelmalla.

$\text{Ratkaise}(\text{Normaalijakauma}(x, 8.4, 50)=0.05, x)$

$\approx \{x = 63.81677046639\}$

5 p. (yht. 11 p.)

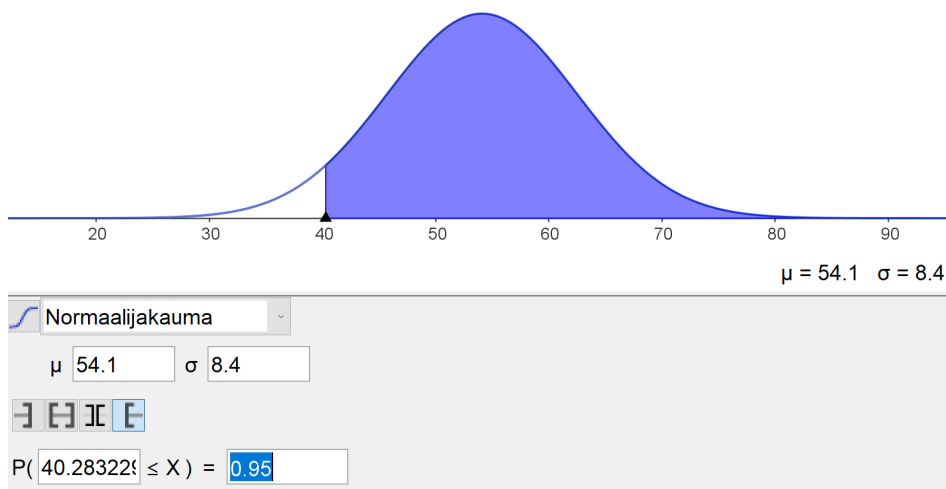
Kysytty odotusarvo on 63,816... mikrogrammaa eli noin 63,8 mikrogrammaa.

1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Vaatimus saavutetaan, kun odotusarvo on vähintään 63,8 mikrogrammaa.

Ratkaisuvaihtoehto 3

Selvitetään ensin, mitä D3-vitamiinin määrää suurempi kapselissa oleva määrä on 95 % todennäköisyydellä alkuperäisessä jakaumassa.



2 p. (yht. 7 p.)

Alkuperäisessä jakaumassa D3-vitamiinin määrä on 95 prosentin todennäköisyydellä vähintään 40,283... mikrogrammaa. Tämä määrä poikkeaa 50 mikrogrammasta määrän

$$50 - 40,283 \dots = 9,716 \dots, \quad 2 \text{ p. (yht. 9 p.)}$$

joten odotusarvon pitää olla 9,716... mikrogrammaa suurempi kuin 54,1 mikrogrammaa. 1 p. (yht. 10 p.) Kysytty odotusarvo on siis mikrogrammoina

$$54,1 + 9,716 \dots = 63,816 \dots \quad 1 \text{ p. (yht. 11 p.)}$$

eli noin 63,8 mikrogrammaa. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Vaatimus saavutetaan, kun odotusarvo on vähintään 63,8 mikrogrammaa.

Koska tasan 63,8 mikrogrammaa on liian pieni odotusarvo, niin luultavasti vastaus 63,9 mikrogrammaa myös hyväksytään.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

9. Funktion muutosnopeus (12 p.)

Tarkastellaan polynomifunktiota $p(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 1$.

1. Osoita laskulla, että välillä $0 \leq x \leq 3$ funktion p keskimääräinen muutosnopeus on 4. (4 p.)
2. Määritä väliltä $0 \leq x \leq 3$ kaikki sellaiset kohdat, joissa funktion p hetkellinen muutosnopeus on yhtä suuri kuin keskimääräinen muutosnopeus 4. (8 p.)

Ratkaisu.

1. Lasketaan funktion p arvot kohdissa $x = 0$ ja $x = 3$.

$$p(0) = 0^3 + 2 \cdot 0^2 - 11 \cdot 0 - 1 = -1 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

$$p(3) = 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3 - 1 = 11 \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

Funktion p keskimääräinen muutosnopeus välillä $0 \leq x \leq 3$ saadaan jakamalla p :n muutos x :n muutoksella. Funktion keskimääräinen muutosnopeus välillä $0 \leq x \leq 3$ on

$$\begin{aligned} \frac{p(3) - p(0)}{3 - 0} &= \frac{11 - (-1)}{3 - 0} \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)} \\ &= \frac{12}{3} \\ &= 4 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} \end{aligned}$$

Funktion keskimääräinen muutosnopeus välillä $0 \leq x \leq 3$ on siis 4.

2. Funktion p hetkellinen muutosnopeus kohdassa x on funktion p derivaatta kohdassa x . 1 p. (yht. 5 p.)

Derivoidaan funktio p .

$$p'(x) = 3x^2 + 4x - 11 \quad \text{3 p. (yht. 8 p.)}$$

Selvitetään kohdat, joissa funktion p hetkellinen muutosnopeus on yhtä suuri kuin 4, eli ratkaistaan yhtälö $p'(x) = 4$.

$$p'(x) = 4 \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

$$3x^2 + 4x - 11 = 4 \quad || - 4$$

$$3x^2 + 4x - 11 - 4 = 0$$

$$3x^2 + 4x - 15 = 0$$

Ratkaistaan yhtälö toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 180}}{6}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{196}}{6}$$

$$x = \frac{-4 \pm 14}{6}$$

$$x = \frac{-4 + 14}{6} \text{ tai } x = \frac{-4 - 14}{6}$$

$$x = \frac{10}{6} \text{ tai } x = \frac{-18}{6}$$

$$x = \frac{5}{3} \text{ tai } x = -3 \quad \text{2 p. (yht. 11 p.)}$$

Yhtälö voidaan ratkaista myös laskinohjelmalla, kunhan tämä ilmaistaan selkeästi ratkaisussa.

Ratkaisu $x = -3$ ei kuulu välille $0 \leq x \leq 3$, mutta ratkaisu $x = \frac{5}{3}$ kuuluu. Kohdassa $x = \frac{5}{3}$ funktion p hetkellinen muutosnopeus on yhtä suuri kuin keskimääräinen muutosnopeus 4. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: $x = \frac{5}{3}$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

10. Oppilaan ratkaisutapa (12 p.)

Oppilas kertoo keksineensä helpon tavan laskea murtolukujen jakolaskun: ”Jaan osoittajat keskenään ja nimittäjät keskenään, jolloin saan suoraan vastauksen murtolukuna.” Esimerkkinä hän mainitsee

$$\frac{3}{20} : \frac{1}{4} = \frac{3 : 1}{20 : 4} = \frac{3}{5}.$$

1. Onko esimerkkilaskun lopputulos oikein? (2 p.)
2. Laske oppilaan menetelmällä $\frac{6}{35} : \frac{3}{5}$. (4 p.)
3. Etsi esimerkki, jossa ratkaisutapa tuottaa lopputuloksena murtoluvun, joka ei ole supistetussa muodossa. (6 p.)

Tässä murtoluku on muotoa $\frac{n}{m}$ tai $-\frac{n}{m}$ oleva merkintä, jossa n on luonnollinen luku ja m on positiivinen kokonaisluku.

Ratkaisu.

1. Lasketaan esimerkkilasku.

$$\begin{aligned} \frac{3}{20} : \frac{1}{4} &= \frac{3}{20} \cdot \frac{4}{1} \\ &= \frac{3 \cdot 4}{20 \cdot 1} \\ &= \frac{12}{20}^{(4)} \\ &= \frac{3}{5} \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)}) \end{aligned}$$

Vastaus: Esimerkkilaskun lopputulos on oikein. (1 p. (yht. 2 p.))

2. Lasketaan lasku oppilaan menetelmällä.

$$\begin{aligned} \frac{6}{35} : \frac{3}{5} &= \frac{6 : 3}{35 : 5} \quad (2 \text{ p. (yht. 4 p.)}) \\ &= \frac{2}{7} \quad (2 \text{ p. (yht. 6 p.)}) \end{aligned}$$

Vastaus: $\frac{2}{7}$

3. Esimerkiksi laskun

$$\frac{5}{20} : \frac{1}{2}$$

lopputuloksena ei saada opiskelijan menetelmällä murtolukua supistetussa muodossa. 2 p. (yht. 8 p.) Lasketaan lasku opiskelijan menetelmää käyttäen.

$$\begin{aligned}\frac{5}{20} : \frac{1}{2} &= \frac{5 : 1}{20 : 2} && \text{2 p. (yht. 10 p.)} \\ &= \frac{5}{10} && \text{1 p. (yht. 11 p.)}\end{aligned}$$

Opiskelijan menetelmällä saadaan siis murtoluku $\frac{5}{10}$, joka voidaan vielä supistaa muotoon $\frac{1}{2}$. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Esimerkiksi lasku $\frac{5}{20} : \frac{1}{2}$ tuottaa murtoluvun, joka ei ole supistetussa muodossa.

Pisteytyksestä: Ehdot täyttävästä esimerkistä saa 2 pistettä ja perusteluista 4 pistettä.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

11. Maitotölkki (12 p.)

Maitotölkki voidaan mallintaa suorakulmaisena särmiönä ja sen päällä olevana yläosana. Oletetaan, että täydessä maitotölkissä maito täyttää täsmälleen särmiöosan.

1. Sekä litran että 1,75 litran maitotölkin pohja on neliö ja särmiöosan korkeus on 20 cm. Määritä kummassakin tapauksessa pohjaneliön sivun pituus. (4 p.)
2. Arvioidaan pakkauksen materiaalin määrää kaavalla $A_1 + 4,5 \cdot A_2$, missä A_1 on särmiön sivutahkojen yhteenlaskettu pinta-ala ja A_2 on pohjaneliön pinta-ala. Kummassa maitotölkissä on enemmän pakkausmateriaalia suhteessa maidon määrään? (8 p.)

Ratkaisu.

1. Merkitään 1,0 litran tölkin pohjaneliön sivun pituutta desimetreinä kirjaimella x . Tölkin korkeus on $20 \text{ cm} = 2 \text{ dm}$. Suorakulmainen särmiö on lieriö, joten sille on voimassa lieriön tilavuuden kaava $V = Ah$, jossa A on pohjan pinta-ala ja h on lieriön korkeus. Pohja on neliö, joten sen pinta-ala on $A = x^2$. Tölkin tilavuus on kuutiodesimetreinä

$$V_{1,0 \text{ litran tölkki}} = Ah = x^2 \cdot 2.$$

Toisaalta tilavuus on kuutiodesimetreinä eli litroina

$$V_{1,0 \text{ litran tölkki}} = 1.$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan pohjaneliön sivun pituus x .

$$x^2 \cdot 2 = 1$$

$$2x^2 = 1 \quad || : 2$$

$$x^2 = 0,5 \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)})$$

$$x = \pm \sqrt{0,5}$$

$$x = \pm 0,70710 \dots$$

Yhtälö voidaan ratkaista myös laskinohjelmalla, kunhan asia ilmaistaan selkeästi ratkaisussa.

Negatiivinen sivun pituus ei ole mahdollinen, joten 1,0 litran tölkin pohjaneliön sivun pituus on

$$0,70710 \dots \text{ dm} \approx 0,7 \text{ dm} \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

$$= 7 \text{ cm.}$$

Merkitään 1,75 litran tölkin pohjaneliön sivun pituutta desimetreinä kirjaimella y . Tölkin korkeus on $20 \text{ cm} = 2 \text{ dm}$, joten tölkin tilavuus on kuutiodesimetreinä

$$V_{1,75 \text{ litran tölkki}} = y^2 \cdot 2.$$

Toisaalta

$$V_{1,75 \text{ litran tölkki}} = 1,75.$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan pohjaneliön sivun pituus y .

$$y^2 \cdot 2 = 1,75$$

$$2y^2 = 1,75 \quad || : 2$$

$$y^2 = 0,875 \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

$$y = \pm \sqrt{0,875}$$

$$y = \pm 0,935414 \dots$$

Yhtälö voidaan ratkaista myös laskinohjelmalla, kunhan asia ilmaistaan selkeästi ratkaisussa.

Negatiivinen sivun pituus ei ole mahdollinen, joten 1,75 litran tölkin pohjaneliön sivun pituus on

$$0,935414 \dots \text{ dm} \approx 0,9 \text{ dm} \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

$$= 9 \text{ cm.}$$

Vastaus: Litran tölkin pohjaneliön sivun pituus on 0,7 dm ja 1,75 litran tölkin pohjaneliön sivun pituus on 0,9 dm.

Vastaukset voidaan antaa myös senttimetreinä.

2. Lasketaan litran tölkin sivutahkojen ala. **Sivutahkoja on neljä kappaletta.**

$$\begin{aligned} A_{\text{litran tölkin sivutahkot}} &= 4 \cdot x \cdot 2 \text{ dm} \\ &= 4 \cdot 0,70710 \dots \text{ dm} \cdot 2 \text{ dm} \\ &= 5,65685 \dots \text{ dm}^2 \end{aligned}$$

Lasketaan litran tölkin pohjaneliön ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{litran tölkin pohjaneliö}} &= x^2 \\ &= (0,70710 \dots \text{ dm})^2 \\ &= 0,5 \text{ dm}^2 \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)} \end{aligned}$$

Lasketaan litran tölkkiin tarvittavan materiaalin määrä. **Tähän käytetään tehtävänannon kaavaa $A_1 + 4,5 \cdot A_2$, jossa A_1 on sivutahkojen yhteenlaskettu pinta-ala ja A_2 on pohjaneliön pinta-ala.**

$$\begin{aligned} A_{\text{litran tölkki}} &= A_{\text{litran tölkin sivutahkot}} + 4,5 \cdot A_{\text{litran tölkin pohjaneliö}} \\ &= 5,65685 \dots \text{ dm}^2 + 4,5 \cdot 0,5 \text{ dm}^2 \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)} \\ &= 7,90685 \dots \text{ dm}^2 \end{aligned}$$

Lasketaan litran tölkillä, kuinka paljon pakkausmateriaalia tarvitaan litraa kohti.

$$\frac{7,90685 \dots \text{ dm}^2}{1 \ell} = 7,90685 \dots \text{ dm}^2/\ell \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

Lasketaan 1,75 litran tölkin sivutahkojen ala. **Sivutahkoja on neljä kappaletta.**

$$\begin{aligned} A_{1,75 \text{ litran tölkin sivutahkot}} &= 4 \cdot y \cdot 2 \text{ dm} \\ &= 4 \cdot 0,935414 \dots \text{ dm} \cdot 2 \text{ dm} \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)} \\ &= 7,48331 \dots \text{ dm}^2 \end{aligned}$$

Lasketaan 1,75 litran tölkin pohjaneliön ala.

$$\begin{aligned} A_{1,75 \text{ litran tölkin pohjaneliö}} &= y^2 \\ &= (0,935414 \dots \text{ dm})^2 \\ &= 0,875 \text{ dm}^2 \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)} \end{aligned}$$

Lasketaan 1,75 litran tölkkiin tarvittavan materiaalin määrä.

$$\begin{aligned}A_{1,75 \text{ litran tölkki}} &= A_{1,75 \text{ litran tölkin sivutahkot}} + 4,5 \cdot A_{1,75 \text{ litran tölkin pohjaneliö}} \\&= 7,48331 \dots \text{ dm}^2 + 4,5 \cdot 0,875 \text{ dm}^2 \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)}) \\&= 11,42081 \dots \text{ dm}^2\end{aligned}$$

Lasketaan 1,75 litran tölkillä, kuinka paljon pakkausmateriaalia tarvitaan litraa kohti.

$$\frac{11,42081 \dots \text{ dm}^2}{1,75 \ell} = 6,52617 \dots \text{ dm}^2/\ell \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)})$$

Vastaus: Suhteessa maidon määrään pakkausmateriaalia on enemmän litran tölissä kuin 1,75 litran tölissä. 1 p. (yht. 12 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

12. Todennäköisyyslaskennan alkuperä (12 p.)

Todennäköisyyslaskenta sai alkunsa 1600-luvun Ranskasta, jossa eräissä piireissä harjoitettiin uhkapeliä. Antoine Gombaud oli ranskalainen kirjailija ja peluri, joka huomasi, että voiton todennäköisyys oli eri kahdessa noppapelissä, mutta hän ei pystynyt perustelemaan tätä matemaattisesti. Koska Gombaud käytti myös nimeä Chevalier de Méré, tätä kutsutaan *de Méré'n ongelmaksi*. Pelien periaatteet ovat seuraavat:

- Kummassakin pelissä haastaja pelasi de Méréä vastaan. Sekä haastaja että de Méré laittoivat pottiin saman verran rahaa, ja voittaja sai koko potin.
- Ensimmäisessä pelissä de Méré heitti yhtä noppaa neljä kertaa. Jos hän sai vähintään yhden kuutosen, hän voitti, muussa tapauksessa hän hävisi. Kokemus osoitti, että tämä oli de Mérélle tuottoisa peli.
- Toisessa pelissä de Méré heitti kahta noppaa yhtä aikaa 24 kertaa. Jos hän sai vähintään yhden kuutosparin, hän voitti, muussa tapauksessa hän hävisi. Tämä peli osoittautui kuitenkin tappiolliseksi de Mérélle.

Vastatakseen de Méré'n ongelmaan kaksi aikalaismatemaatikkoa, Blaise Pascal ja Pierre de Fermat, kehittivät todennäköisyyslaskennan teorian alkeet ja osoittivat, että pitkällä aikavälillä de Méré voittaa ensimmäisessä pelissä ja häviää toisessa. Osoita tämä todennäköisyyslaskennan keinoin.

Ratkaisu.

Yhdellä pelikierroksella de Méré joko häviää koko pelipanoksensa tai tuplaa panoksensa (eli saa takaisin asettamansa panoksen ja voittaa vastapelaajan asettaman, yhtä suuren panoksen itselleen). Jotta peli olisi de Mérélle tuottoisa, yhden pelikierroksen voiton todennäköisyyden on oltava enemmän kuin 50 %. (Jos voittotodennäköisyys on täsmälleen 50 %, de Méré pääsee pitkällä aikavälillä täsmälleen omilleen, ei siis voita eikä häviä.)

Lasketaan yhden pelikierroksen voiton todennäköisyys ensin pelille 1 ja sitten pelille 2:

Peli 1 Yhdellä kierroksella de Méré heittää yhtä noppaa neljä kertaa. Hän voittaa, jos saa vähintään yhden kuutosen näillä neljällä heitolla, muuten hän häviää. Voittoisia tilanteita ovat siis neljällä nopalla heitetyt neljä kuutosta, kolme kuutosta, kaksi kuutosta tai yksi kuutonen. Vastatapahtuma, eli de Méré'n häviö, seuraa ainoastaan tilanteessa, missä hän ei saa yhtään kuutosta neljällä nopalla.

Yhdellä nopalla on tulee jokin kuudesta silmäluvusta, joista viisi on muita kuin kuutosia.

Todennäköisyys sille, että yksittäinen silmäluku ei ole kuutonen, on

$$P(\text{yksittäinen silmäluku ei ole kuutonen}) = \frac{5}{6} \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

Vastatapahtuman, eli de Méré:n häviön todennäköisyys on siis

$$P(\text{yksikään neljästä silmäluvusta ei ole kuutonen}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \quad \text{2 p. (yht. 3 p.)}$$

Todennäköisyys, että de Méré:n voittaa, on

$$\begin{aligned} P(\text{voitto}) &= P(\text{vähintään yksi kuutonen}) \\ &= 1 - P(\text{yksikään neljästä silmäluvusta ei ole kuutonen}) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} \\ &= \frac{671}{1296} \\ &\approx 0,517\,746 \dots \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)} \end{aligned}$$

Ensimmäisessä pelissä de Méré:n voiton todennäköisyys on siis enemmän kuin 50 %, joten peli on hänelle tuottoisa. 1 p. (yht. 6 p.)

Peli 2 Jälkimmäisessä pelissä de Méré heittää yhdellä kierroksella kahta noppaa yhteensä 24 kertaa. Hän voittaa, jos saa vähintään yhden kuutosparin näillä kahdellakymmenellä neljällä heitolla, muuten hän häviää. Voittoisia tilanteita ovat siis 24 kuutosparia, 23 kuutosparia jne. aina yhteen kuutospariin asti. Vastatapahtuma, eli de Méré:n häviö, seuraa ainoastaan tilanteessa, jossa hän saa täsmälleen nolla kuutosparia kahdellakymmenellä neljällä yrityksellä.

Lasketaan aluksi kuutosparin todennäköisyys, kun heitetään kahta noppaa. Kuutospariin tarvitaan kaksi kuutosta, joten

$$\begin{aligned} P(\text{kuutospari}) \\ = P(\text{ensimmäinen silmäluku on kuutonen ja toinen silmäluku on kuutonen}). \end{aligned}$$

Riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännöllä saadaan

$$\begin{aligned}
 &P(\text{kuutospari}) \\
 &= P(\text{ensimmäinen silmäluku on kuutonen}) \cdot P(\text{toinen silmäluku on kuutonen}) \\
 &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \\
 &= \frac{1 \cdot 1}{6 \cdot 6} \\
 &= \frac{1}{36} \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}
 \end{aligned}$$

Todennäköisyys olla saamatta kuutosparia kahden nopan heitolla on tämän vastatapahtuma, eli

$$\begin{aligned}
 P(\text{ei kuutospari}) &= 1 - P(\text{kuutospari}) \\
 &= 1 - \frac{1}{36} \\
 &= \frac{35}{36} \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}
 \end{aligned}$$

Vastatapahtuma, eli de Méré:n häviö, seuraa tilanteessa, kun 24:llä peräkkäisellä kahden nopan heitolla ei yhdelläkään saada kuutosparia. Kahden nopan heitot ovat toisistaan riippumattomia, joten riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännöllä saadaan

$$\begin{aligned}
 &P(\text{ei kuutospareja}) \\
 &= \underbrace{P(\text{ei kuutospari}) \cdot P(\text{ei kuutospari}) \cdot \dots \cdot P(\text{ei kuutospari})}_{24 \text{ kappaletta}} \\
 &= \underbrace{\frac{35}{36} \cdot \frac{35}{36} \cdot \dots \cdot \frac{35}{36}}_{24 \text{ kappaletta}} \\
 &= \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}
 \end{aligned}$$

De Méré:n voiton todennäköisyys on siis

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yksi kuutospari}) &= 1 - P(\text{ei kuutospareja}) \\ &= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)} \\ &\approx 0,491\,403\dots \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)} \end{aligned}$$

Jälkimmäisessä pelissä de Méré:n voiton todennäköisyys on siis alle 50 %, joten peli on hänelle tappiollinen. 1 p. (yht. 12 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

13. Derivoiva avaruusluotain (12 p.)

Avaruusluotain mittaa planeetan lämpötilaa. Sen piti lähettää tietoa lämpötilasta funktiona $T(t)$ aikavälillä $0 \leq t \leq 9$. Ohjelmistovirheen takia saatiin kuitenkin vain tieto, että funktion derivaatta $T'(t)$ on negatiivinen, kun $t < 2$, positiivinen, kun $2 < t < 4$, ja jälleen negatiivinen, kun $t > 4$. Tutkijat miettivät, mitä tämän perusteella voidaan sanoa lämpötilasta T .

1. Hahmottele esimerkki lämpötilafunktion T kuvaajasta, jolla on lisäksi se ominaisuus, että lämpötilan suurin arvo saavutetaan hetkellä $t = 4$. (6 p.)
2. Hahmottele esimerkki lämpötilafunktion T kuvaajasta, jolla on lisäksi se ominaisuus, että lämpötilan suurinta arvoa ei saavuteta hetkellä $t = 4$. (6 p.)

Selitä kummassakin tapauksessa sanallisesti, miten vaaditut lämpötilafunktion ominaisuudet näkyvät kuvaajassa.

Ratkaisu.

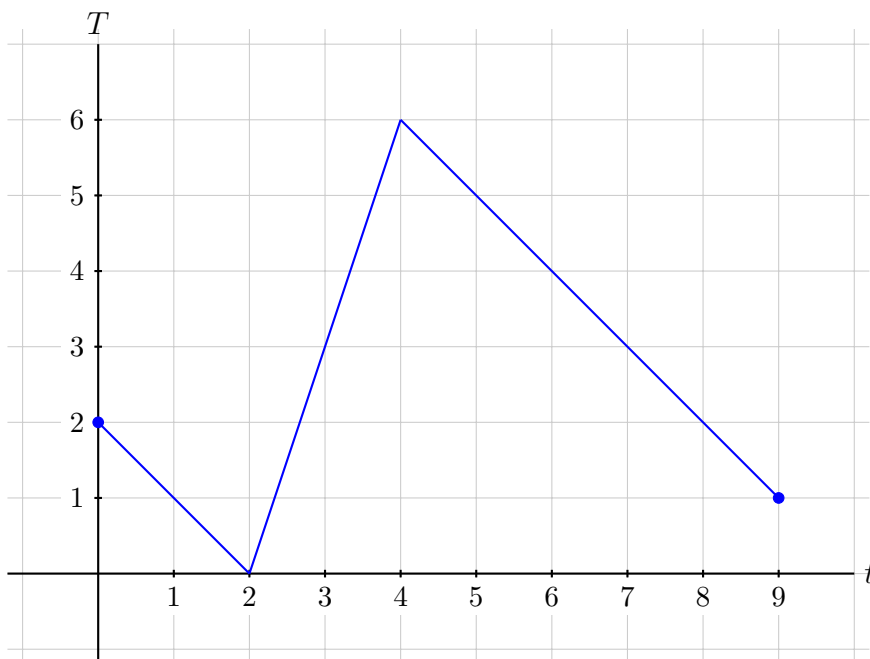
1. Merkinnässä $T(t)$ iso T tarkoittaa lämpötilaa ja pieni t tarkoittaa aikaa.

Funktion $T(t)$ derivaatta on negatiivinen, kun $0 < t < 2$ tai $4 < t < 9$. Funktion $T(t)$ derivaatta on positiivinen, kun $2 < t < 4$. Alla on funktion T kulkukaavio.

	0	2	4	9
$T'(t)$	−	+	−	
$T(t)$	↘	↗	↘	

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio T voi saavuttaa välillä $0 \leq t \leq 9$ suurimman arvonsa vain kohdassa $t = 0$ tai kohdassa $t = 4$. Kulkukaavion tekemistä ei vaadita.

Funktion $T(t)$ derivaatta on negatiivinen, kun $0 < t < 2$ tai $4 < t < 9$. Funktion $T(t)$ derivaatta on positiivinen, kun $2 < t < 4$. Siten funktio T on vähenevä väleillä $0 < t < 2$ ja $4 < t < 9$ ja vastaavasti funktio T on kasvava välillä $2 < t < 4$. Esimerkiksi seuraava kuvaaja toteuttaa annetut ehdot:



3 p. (yht. 3 p.)

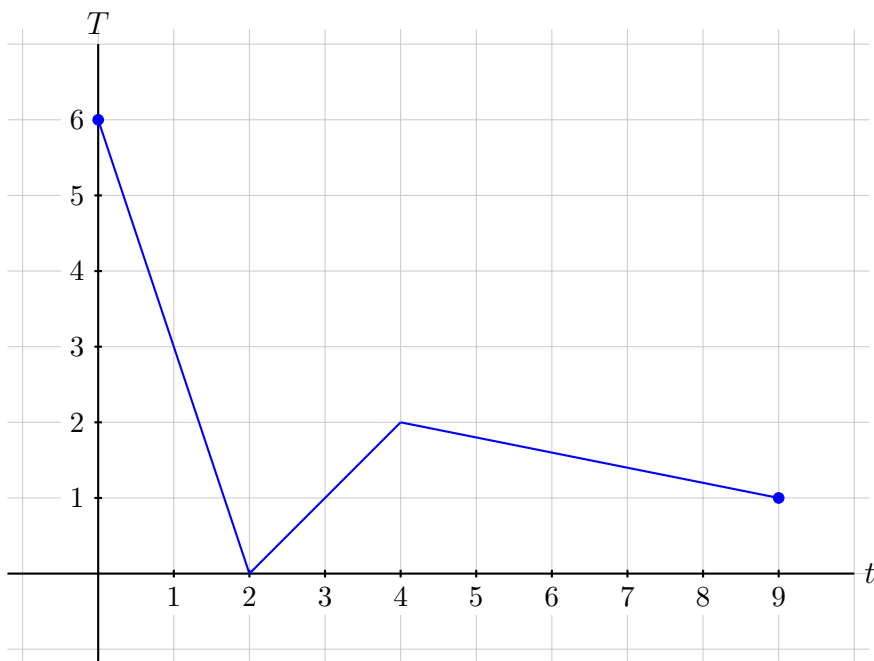
Yllä olevasta kuvaajasta nähdään, että kun väleillä $0 < t < 2$ ja $4 < t < 9$ kuljetaan funktion kuvaajaa pitkin vasemmalta oikealle, funktion arvo pienenee, joten kyseisillä väleillä funktion T derivaatta on negatiivinen. 1 p. (yht. 4 p.)

Yllä olevasta kuvaajasta nähdään, että kun välillä $2 < t < 4$ kuljetaan funktion kuvaajaa pitkin vasemmalta oikealle, funktion arvo kasvaa, joten kyseisellä välillä funktion T derivaatta on positiivinen. 1 p. (yht. 5 p.)

Yllä olevasta kuvaajasta nähdään, että lämpötilan suurin arvo $T = 6$ saavutetaan hetkellä $t = 4$. Kaikkina muina aikavälin $0 \leq t \leq 9$ hetkinä kuvaaja kulkee alempana kuin korkeudella $T = 6$. 1 p. (yht. 6 p.)

Yllä oleva kuvaaja on vain yksi esimerkki sopivasta kuvaajasta. Mikä tahansa annetut ehdot täyttävä kuvaaja kelpaa.

2. Esimerkiksi seuraava kuvaaja toteuttaa annetut ehdot:



3 p. (yht. 9 p.)

Yllä olevasta kuvaajasta nähdään, että kun väleillä $0 < t < 2$ ja $4 < t < 9$ kuljetaan funktion kuvaajaa pitkin vasemmalta oikealle, funktion arvo pienenee, joten kyseisillä väleillä funktion T derivaatta on negatiivinen. 1 p. (yht. 10 p.)

Yllä olevasta kuvaajasta nähdään, että kun välillä $2 < t < 4$ kuljetaan funktion kuvaajaa pitkin vasemmalta oikealle, funktion arvo kasvaa, joten kyseisellä välillä funktion T derivaatta on positiivinen. 1 p. (yht. 11 p.)

Yllä olevasta kuvaajasta nähdään, että lämpötilan suurin arvo $T = 6$ saavutetaan hetkellä $t = 0$ eikä hetkellä $t = 4$. Kaikkina muina aikavälin $0 \leq t \leq 9$ hetkinä kuin hetkellä $t = 0$ kuvaaja kulkee alempana kuin korkeudella $T = 6$.

1 p. (yht. 12 p.)

Yllä oleva kuvaaja on vain yksi esimerkki sopivasta kuvaajasta. Mikä tahansa annetut ehdot täyttävä kuvaaja kelpaa.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!