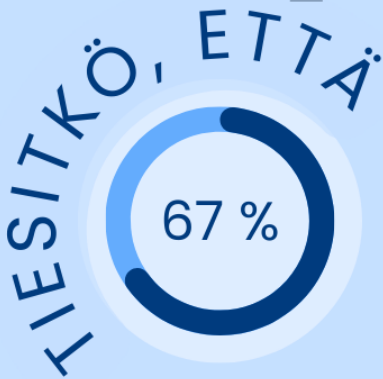




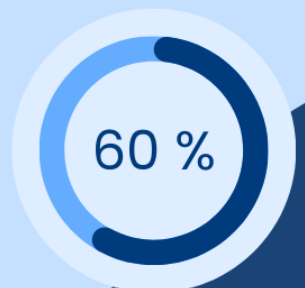
MAFYN YO-MALLIVASTAUKSET
KEVÄT 2024

FYSIIKKA



Lääkikseen kevään 2023 pääsykokeella
päässeistä 67% oli opiskellut Mafynetillä.

Jopa 60 % pk-seudun lukiolaisista
opiskelee Mafynetillä yo-kirjoituksiin!





Mallivastaukset laatii
Mafyn oppimateriaalitiimi,
joka kehittää lukion
oppimateriaaleja.

Mallivastausten
tekemiseen osallistuivat
Sakke Suomalainen, Tuulia
Tokola, Linnea Tokola,
Jaakko Alasuvanto, Timo
Kalinainen, Lassi Vienonen
ja Matti Virolainen.

PALVELUITAMME OVAT

- MAFYNETTI-OPPIMISSOVELLUS
- LÄÄKETIETEEN VALMENNUSKURSSIT
- DI-VALMENNUSKURSSIT
- KAUPPATIETEEN VALMENNUSKURSSIT
- YLIOPPILASKIRJOITUKSIIN VALMISTAVAT
KERTAUSKURSSIT.

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafy.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty.

Lukion fysiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukion kurseillasi. Nämä mallivastaukset ovat Mafy Oy:n omaisuutta.

Mafynetti

<https://mafy.fi/yhteydenotto>

Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	10
Ratkaisu tehtävään 3	16
Ratkaisu tehtävään 4	23
Ratkaisu tehtävään 5	27
Ratkaisu tehtävään 6	35
Ratkaisu tehtävään 7	39
Ratkaisu tehtävään 8	41
Ratkaisu tehtävään 9	47
Ratkaisu tehtävään 10	52
Ratkaisu tehtävään 11	72

Malliratkaisut päivitetty 28. maaliskuuta 2024 klo. 14:56.

1. Monivalintatehtäviä fysiikan eri osa-alueilta (20 p.)

Valitse jokaisessa osatehtävässä parhaiten soveltuva vaihtoehto. Oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

1.1 Kahdeksasluokkalainen mittaa 60 metrin juoksuun kuluvan ajan älypuhelimien ajanottoiminnolla. Millä tarkkuudella tulos on mielekästä ilmoittaa? (2 p.)

- ☐ 0,0001 s
- ☐ 0,1 s
- ☐ 0,01 s
- ☐ 0,001 s

1.2 Missä seuraavista mittaustuloksista on suurin suhteellinen virhe? (2 p.)

- ☐ $1,013 \text{ bar} \pm 0,003 \text{ bar}$
- ☐ $472 \text{ N} \pm 5 \text{ N}$
- ☐ $9,8 \text{ m/s}^2 \pm 0,3 \text{ m/s}^2$
- ☐ $2,2 \text{ kg} \pm 0,2 \text{ kg}$

1.3 Mikä on kodin sähkösaunan energiankulutuksen suuruusluokka yhdellä saunomiskerralla? (2 p.)

- ☐ 8 kWh
- ☐ 0,8 kWh
- ☐ 80 kWh
- ☐ 800 kWh

1.4 Mikä seuraavista matkustusmuodoista kuluttaa eniten energiaa yhtä henkilöä ja yhtä kilometriä kohti? (2 p.)

- ☐ Linja-auto
- ☐ Sähköpolkupyörä
- ☐ Juna
- ☐ Lentokone

1.5 Miten ilmakehän kasvihuonekaasut lämmittävät maapalloa? (2 p.)

- ☐ Ne absorboivat maapallon pinnan säteilyä, joten ilmakehä lämpenee ja maapallon lämpötila nousee.
- ☐ Ne heijastavat maapallon pinnasta heijastuneen auringon säteilyn takaisin maapallolle, jolloin maapallon lämpötila nousee.
- ☐ Ne absorboivat auringon säteilyä, joten ilmakehä lämpenee ja maapallon lämpötila nousee.
- ☐ Ne reagoivat muiden ilmakehän kaasujen kanssa synnyttäen lämpöä, jolloin maapallon lämpötila nousee.

1.6 Millä voimalaitostyyppillä Suomessa tuotetun sähköenergian määrä on kasvanut eniten 2020-luvulla? (2 p.)

- ☐ Hiilivoimalaitokset
- ☐ Tuulivoimalaitokset
- ☐ Aurinkovoimalaitokset
- ☐ Vesivoimalaitokset

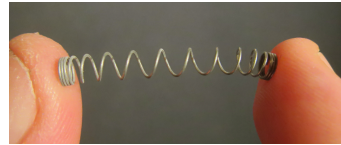
1.7 Mikä perusvuorovaikutuksista on voimakkain hyvin pienillä etäisyyksillä ($< 1 \text{ fm}$)? (2 p.)

- ☐ Heikko vuorovaikutus
- ☐ Sähkömagneettinen vuorovaikutus
- ☐ Vahva vuorovaikutus
- ☐ Gravitaatiovuorovaikutus

1.8 Kuinka suuri osa maailmankaikkeuden koostumuksesta on tuntemaamme tavallista ainetta? (2 p.)

- ☐ 50 %
- ☐ 5 %
- ☐ 100 %
- ☐ 95 %

1.9 Kuulakärkikynän kierrejoustusta puristetaan kokoon 2,5 N:n voimalla, jolloin se lyhenee 0,1 cm. Voitaanko tämän perusteella päätellä, että 2 500 N:n voimalla venytettäessä kyseisen jousen pituus kasvaa 100 cm? (2 p.)



- ☐ Ei, koska jousivoiman lain mukaan jousen venyttäminen vaatii vähemmän voimaa kuin kokoonpuristaminen.
 - ☐ Kyllä, koska päätelmä on jousivoiman lain mukainen.
 - ☐ Ei, koska jousivoiman lain mukaan jousen venyttäminen vaatii enemmän voimaa kuin kokoonpuristaminen.
 - ☐ Ei, koska joustusta ei voi venyttää niin pitkäksi.
- 1.10 Havaitusta uudesta fysikaalisesta ilmiöstä luotiin malli, jonka pätevyyttä testattiin kokeellisesti. Mallin mukainen ennuste ja kokeellinen tulos olivat ristiriidassa. Miten tutkimuksen tulee edetä tästä? (2 p.)
- ☐ Kokeen mittaustuloksista täytyy valita vain ne, jotka sopivat malliin.
 - ☐ Jos kokeen suorituksesta ei löydy ilmeistä virhettä, luotua mallia on muutettava.
 - ☐ Sama koe on toistettava uudestaan niin monta kertaa, että ennuste ja kokeellinen tulos saadaan vastaamaan toisiaan.
 - ☐ On hylättävä saadut tulokset ja luotava uudenlainen koe, jotta ennuste ja kokeellinen tulos vastaavat toisiaan.

Ratkaisu.

1.1 Kahdeksasluokkalainen mittaa 60 metrin juoksuun kuluvan ajan älypuhelimien ajanottotoiminnolla. Millä tarkkuudella tulos on mielekästä ilmoittaa? (2 p.)

- ☐ 0,0001 s
- ☒ 0,1 s 2 p. (yht. 2 p.)
- ☐ 0,01 s
- ☐ 0,001 s

Ihmisen reaktioaika on tyypillisesti noin 0,1 s – 0,2 s, joten reaktioaika on riittävän lyhyt vain kymmenesosasekuntien tarkkuuteen.

1.2 Missä seuraavista mittaustuloksista on suurin suhteellinen virhe? (2 p.)

- ☐ 1,013 bar $\pm$ 0,003 bar
- ☐ 472 N $\pm$ 5 N
- ☐ 9,8 m/s² $\pm$ 0,3 m/s²
- ☒ 2,2 kg $\pm$ 0,2 kg 2 p. (yht. 4 p.)

Suhteellinen virhe kuvaa, kuinka suuri absoluuttinen virhe on verrattuna mittaustulokseen. Mittaustulokset ilmoitetaan virherajoihin muodossa

mittaustulos $\pm$ virhe,

missä virhe voi olla absoluuttinen virhe tai suhteellinen virhe prosentteina. Tehdäänannossa virheet on ilmoitettu absoluuttisina virheinä. Lasketaan niitä vastaavat suhteelliset virheet:

$$\frac{0,003 \text{ bar}}{1,013 \text{ bar}} \cdot 100\% = 0,296 \dots \%$$

$$\frac{5 \text{ N}}{472 \text{ N}} \cdot 100\% = 1,059 \dots \%$$

$$\frac{0,3 \text{ m/s}^2}{9,8 \text{ m/s}^2} \cdot 100\% = 3,061 \dots \%$$

$$\frac{0,2 \text{ kg}}{2,2 \text{ kg}} \cdot 100\% = 9,090 \dots \%$$

Suurin suhteellinen virhe on mittaustuloksessa 2,2 kg $\pm$ 0,2 kg.

1.3 Mikä on kodin sähkösaunan energiankulutuksen suuruusluokka yhdellä saunomiskerralla? (2 p.)

- ☒ 8 kWh 2 p. (yht. 6 p.)
- ☐ 0,8 kWh
- ☐ 80 kWh
- ☐ 800 kWh

Jos tähän ei tiennyt vastausta suoraan, vastaus oli mahdollista päätellä arvioimalla sähkön hinnan avulla. Sähkön hinta on tällä hetkellä noin 5 snt/kWh, joten annetuilla vaihtoehtoilla sähkösaunan yhden saunomiskerran hinta olisi

$$0,8 \text{ kWh} \cdot 5 \text{ snt/kWh} = 4 \text{ snt} = 0,04 \text{ euroa}$$

$$8,0 \text{ kWh} \cdot 5 \text{ snt/kWh} = 40 \text{ snt} = 0,4 \text{ euroa}$$

$$80 \text{ kWh} \cdot 5 \text{ snt/kWh} = 400 \text{ snt} = 4 \text{ euroa}$$

$$800 \text{ kWh} \cdot 5 \text{ snt/kWh} = 4000 \text{ snt} = 40 \text{ euroa}$$

Jos lisäksi tietää vaikkapa, että tyypillinen keskikokoisen kerrostaloasunnon kuu-kauden sähkölasku on kymmenien eurojen suuruusluokassa, voi varsin hyvällä varmuudella päätellä, että vaihtoehto 8,0 kWh on järkevin.

1.4 Mikä seuraavista matkustusmuodoista kuluttaa eniten energiaa yhtä henkilöä ja yhtä kilometriä kohti? (2 p.)

- ☐ Linja-auto
- ☐ Sähköpolkupyörä
- ☐ Juna
- ☒ Lentokone 2 p. (yht. 8 p.)

Tämä oli haastava tehtävä, sillä riippuen esimerkiksi siitä, huomioidaanko matkustajapaikkojen keskimääräinen täyttöaste, vastaus ei ole itsestään selvä. Tehtävässä saattoi päätellä, että sähköpolkupyörä ei ole oikea vastaus, koska se kuluttaa varsin vähän energiaa, ja juna ei ole oikea vastaus, sillä suuremman matkustajamäärän ja pienempien vastusvoimien takia se on energiatehokkaampi kuin linja-auto. Linja-auton ja lentokoneen vertailu sen sijaan on haastavampaa pelkästään fysiikan ymmärryksen avulla.

1.5 Miten ilmakehän kasvihuonekaasut lämmittävät maapalloa? (2 p.)

- ☒ Ne absorboivat maapallon pinnan säteilyä, joten ilmakehä lämpenee ja maapallon lämpötila nousee. 2 p. (yht. 10 p.)
- ☐ Ne heijastavat maapallon pinnasta heijastuneen auringon säteilyn takaisin maapallolle, jolloin maapallon lämpötila nousee.
- ☐ Ne absorboivat auringon säteilyä, joten ilmakehä lämpenee ja maapallon lämpötila nousee.
- ☐ Ne reagoivat muiden ilmakehän kaasujen kanssa synnyttäen lämpöä, jolloin maapallon lämpötila nousee.

Kasvihuonekaasut absorboivat tehokkaasti matalaenergistä lämpösäteilyä. Niiden lämmittävä vaikutus perustuu siihen, että osa Auringosta saapuvasta korkeampienergisestä säteilystä absorboituu maanpintaan lämmittäen sitä, ja maanpinta lähettää matalaenergistä lämpösäteilyä, jota absorboituu kasvihuonekaasuihin.

1.6 Millä voimalaitostyyppillä Suomessa tuotetun sähköenergian määrä on kasvanut eniten 2020-luvulla? (2 p.)

- ☐ Hiilivoimalaitokset
- ☒ Tuulivoimalaitokset 2 p. (yht. 12 p.)
- ☐ Aurinkovoimalaitokset
- ☐ Vesivoimalaitokset

Jos ei tiennyt oikeaa vastausta esimerkiksi ajankohtaisten uutisten seuraamisen ansiosta, oli ainakin mahdollista eliminoida vääriä vaihtoehtoja. Tehtävässä saattoi arvata, että hiilivoimalaitokset eivät ole oikea vastaus, sillä päästötavoitteiden takia hiilivoimaa pyritään vähentämään. Samoin saattoi arvata, että aurinkovoimalaitokset eivät ole oikea vastaus, sillä Suomeen saapuu keskimäärin vähäisesti auringonvaloa, jolloin ne eivät sovellu yhtä hyvin Suomeen kuin esimerkiksi tuulivoima ja vesivoima. Jos lisäksi tiesi, että Suomeen on jo ennen 2020-lukua rakennettu paljon vesivoimaa, saattoi hyvällä varmuudella löytää oikean vastauksen.

1.7 Mikä perusvuorovaikutuksista on voimakkain hyvin pienillä etäisyyksillä ($< 1 \text{ fm}$)? (2 p.)

- ☐ Heikko vuorovaikutus
- ☐ Sähkömagneettinen vuorovaikutus
- ☒ Vahva vuorovaikutus (2 p. (yht. 14 p.))
- ☐ Gravitaatiovuorovaikutus

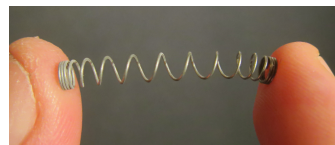
Vahvan vuorovaikutuksen kantama on lyhyt verrattuna muihin vuorovaikutuksiin, mutta hyvin pienillä etäisyyksillä se on muita voimakkaampi. Vahva vuorovaikutus sitoo kvarkit nukleoneiksi, ja pitää atomiytimen koossa voittamalla protonien välisen hylkivän sähköisen voiman.

1.8 Kuinka suuri osa maailmankaikkeuden koostumuksesta on tuntemaamme tavallista ainetta? (2 p.)

- ☐ 50 %
- ☒ 5 % (2 p. (yht. 16 p.))
- ☐ 100 %
- ☐ 95 %

Tämän hetkisen käsityksen mukaan maailmankaikkeuden massasta (ja massana ilmenevästä energiasta) valtaosa koostuu pimeästä aineesta ja pimeästä energiasta, ja vain noin 5% tuntemastamme tavallisesta aineesta.

1.9 Kuulakärkikynän kierrejousta puristetaan kokoon 2,5 N:n voimalla, jolloin se lyhenee 0,1 cm. Voitaanko tämän perusteella päätellä, että 2 500 N:n voimalla venytettäessä kyseisen jousen pituus kasvaa 100 cm? (2 p.)



- ☐ Ei, koska jousivoiman lain mukaan jousen venyttäminen vaatii vähemmän voimaa kuin kokoonpuristaminen.
- ☐ Kyllä, koska päätelmä on jousivoiman lain mukainen.
- ☐ Ei, koska jousivoiman lain mukaan jousen venyttäminen vaatii enemmän voimaa kuin kokoonpuristaminen.
- ☒ Ei, koska jousta ei voi venyttää niin pitkäksi. (2 p. (yht. 18 p.))

Harmonisen voiman kaava $F = -kx$ pätee vain tietyillä jousen pituuksilla. Jos jouta esimerkiksi puristetaan niin paljon kasaan, että jousen kierrokset kosketavat, ei jouta saa puristettua enää lisää litistämättä jousen materiaalia. Vastaa- vasti jos jouta venytetään tarpeeksi pitkäksi, jousen kierrokset alkavat suoristua ja jousen materiaalin tulisi venyä, jotta jousen pituus kasvaisi lisää. Kuulakärkin jousi ei edes suoraksi vedettynä ole metrin (100 cm) pituinen.

1.10 Havaitusta uudesta fysikaalisesta ilmiöstä luotiin malli, jonka pätevyyttä testattiin kokeellisesti. Mallin mukainen ennuste ja kokeellinen tulos olivat ristiriidassa. Miten tutkimuksen tulee edetä tästä? (2 p.)

- ☐ Kokeen mittaustuloksista täytyy valita vain ne, jotka sopivat malliin.
- ☒ Jos kokeen suorituksesta ei löydy ilmeistä virhettä, luotua mallia on muutettava. 2 p. (yht. 20 p.)
- ☐ Sama koe on toistettava uudestaan niin monta kertaa, että ennuste ja kokeellinen tulos saadaan vastaamaan toisiaan.
- ☐ On hylättävä saadut tulokset ja luotava uudenlainen koe, jotta ennuste ja kokeellinen tulos vastaavat toisiaan.

Fysiikka on kokeellinen luonnontiede, jossa teoreettisten mallien paikkaansapitävyyttä testataan kokeellisesti. Jos malli ennustaa hyvin kokeiden tuloksia, tulokset tukevat mallia. Jos taas malli ennustaa kokeiden tuloksia kehnosti, eli kokeiden tulokset ovat ristiriidassa mallin kanssa, ja kokeen suorituksessa ei ole vikaa, tällöin kokeelliset tulokset eivät tue mallia, ja malli täytyy hylätä tai sitä täytyy kehittää.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

2. Omenamehupuristin (15 p.)

Aineisto:

- 2. A [Kuva: Omenamehupuristin](#)
- 2. B [Mittausaineisto: Omenoista puristetun mehun tilavuus](#)

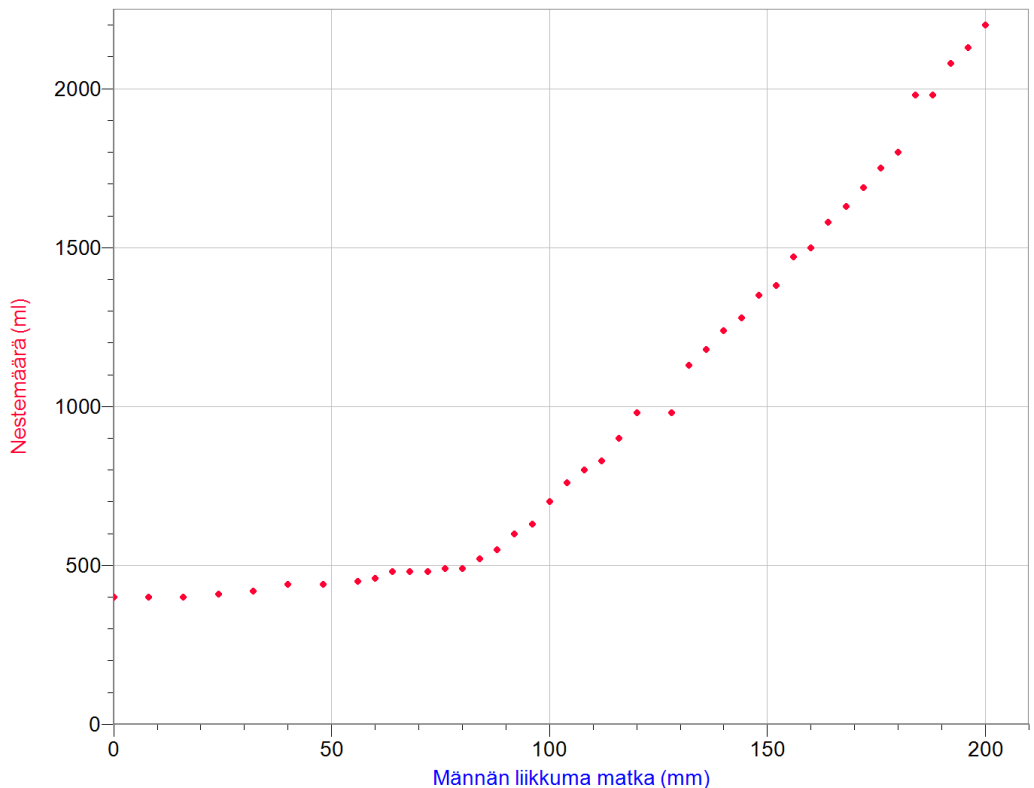
Omenamehupuristimella (kuva [2.A](#)) tehdään omenoista tuoremehua. Omenat murskataan ja pannaan suodatinpussiin ja edelleen kuvassa näkyvään metalliastiaan. Metallastian seinät ovat täynnä reikiä, jotta mehu pääsee valumaan ulos. Puristimen kampea pyörittämällä mätä painuu alaspäin ja puristaa omenamurskaa.

Puristimen kampea kierrettiin yksi kierros kerrallaan ja ulos valuneen mehun tilavuus mitattiin. Mittaustulokset on esitetty aineistossa [2.B](#).

- 2.1 Esitä graafisesti mehun tilavuus männän ylimmästä asemastaan liikkuman matkan funktiona. Yksi kammen kierros vastaa 4,0 mm:n pystysuoraa liikettä. Esityksessä tulee näkyä mittaustuloksia vastaavat pisteet, mutta ei pisteitä yhdistäviä viivoja. (5 p.)
- 2.2 Kuten kuvasta [2.A](#) näkyy, kampea pitää kiertää useita kierroksia ennen kuin mätä saavuttaa omenamurskeen. Määritä osatehtävässä 2.1 piirtämäsi kuvaajaa pohjana käyttäen, kuinka paljon mehua omenoista saatiin ennen kuin mätä saavutti murskeen. (4 p.)
- 2.3 Omenoiden puristusta jatkettiin siihen asti, että kampea oli kierretty yhteensä 79 kierrosta. Mehua saatiin samassa suhteessa tilavuuden pienenemiseen verrattuna. Arvioi graafista esitystä käyttäen, kuinka paljon mehua omenoista kokonaisuudessaan saatiin. (6 p.)

Ratkaisu.

- 2.1 Tehtävänannon mukaan yksi kierros vastaan 4,0 mm pystysuoraa liikettä. Lasketaan männän liikkumat matkat uuteen sarakkeeseen millimetreinä kertomalla kierrosmäärä 4,0:lla. Piirretään kuvaaja.



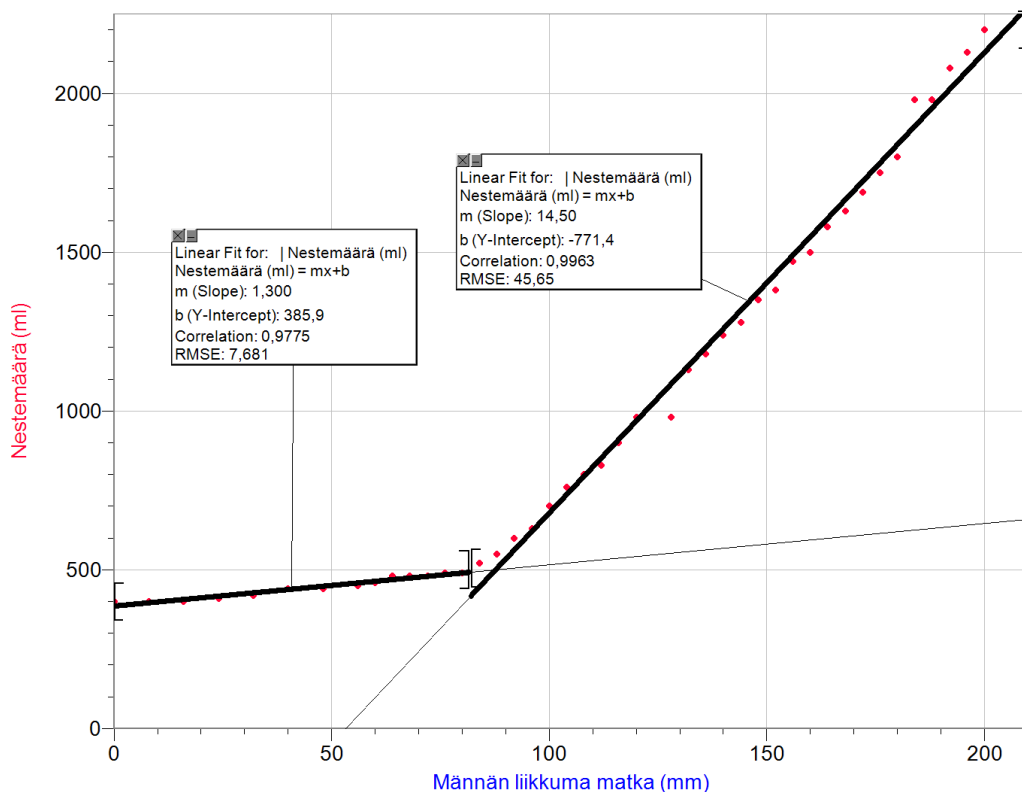
5 p. (yht. 5 p.)

Pisteytyksestä:

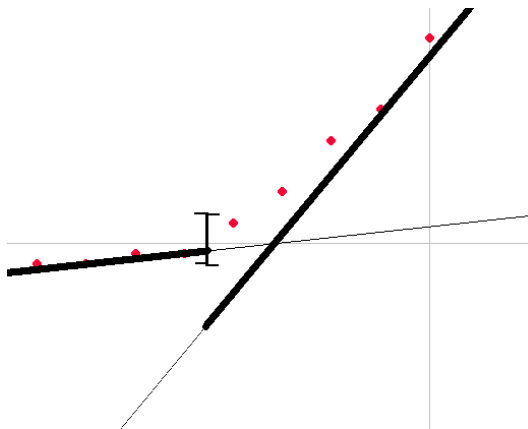
- Oikein piirretty kuvaaja = 5 p,
- Pisteet yhdistetty viivoilla = -2 p,
- Kaikki pisteet eivät näkyvissä = -2 p,
- Puuttuu suure tai yksikkö akselilta = -1 p / puute,
- Akselin asteikko sellainen, että kuvaajassa on paljon ylimääräistä tilaa = -0 p,
- Akselit eivät leikkaa origossa = -0 p,
- Puuttuu otsikko = -0 p.

2.2 Kuvaajassa nähdään selkeä taitekohta, jonka jälkeen mehua aletaan saada selkeästi enemmän samaa männän liikkumaa matkaa kohden. Kun mäntä ei ole vielä saavuttanut omenamursketta, se ei purista omenamursketta, minkä takia

mehua tulee hitaammin. Kun mäntä on saavuttanut omenamurskeen, se puristaa omenamursketta, jolloin mehua tulee nopeammin. Täten mäntä siis saavuttaa omenamurskeen kuvaajan taitekohdassa. Taitekohdan eri puolilla voidaan pisteisiin sovittaa suorat. Arvioidaan saadun mehun tilavuus olettamalla, että mäntä saavutti murskeen näiden suorien leikkauskohdassa. 1 p. (yht. 6 p.)



Tarkempi kuva leikkauskohdasta:



1 p. (yht. 7 p.)

Kuvista nähdään, että suorat leikkaavat varsin tarkasti kohdassa, jossa nestemäärä on 500 ml. 1 p. (yht. 8 p.) Leikkauskohdan voisi myös ratkaista suoran yhtälöiden avulla, mutta silmämääräinen tarkastelu riittää tässä tapauksessa.

Vastaus: Mehua saatiin 500 ml ennen kuin mäntä saavutti murskeen. 1 p. (yht. 9 p.)

Myös 0,5 litraa on hyväksyttävä vastaus.

2.3

Ratkaisuvaihtoehto 1

Kun mäntää on kierretty 79 kierrosta, mäntä on siis liikkunut pystysuunnassa matkan

$$79 \cdot 4,0 \text{ mm} = 316 \text{ mm.} \quad 1 \text{ p. (yht. 10 p.)}$$

Tehtävänannon mukaan mehua saatiin samassa suhteessa tilavuuden pienene- miseen verrattuna, eli saadun mehumäärän kuvaaja männän pystysuunnassa liikkuman matkan funktiona on suora. 1 p. (yht. 11 p.) Käytetään kohdassa 2.2 jäl- kimmäiseen osaan sovitetun suoran yhtälöä

$$V = 14,37 \frac{\text{ml}}{\text{mm}} \cdot x - 755,4 \text{ ml}$$

ja lasketaan saatu mehumäärä, kun männän kulkema matka on $x = 316$ mm.

$$\begin{aligned}
 V &= 14,37 \frac{\text{ml}}{\text{mm}} \cdot 316 \text{ mm} - 755,4 \text{ ml} && \text{2 p. (yht. 13 p.)} \\
 &= 3785,52 \text{ ml} \\
 &= 3,78552 \text{ l} && \text{1 p. (yht. 14 p.)} \\
 &\approx 3,8 \text{ l} && \text{1 p. (yht. 15 p.)}
 \end{aligned}$$

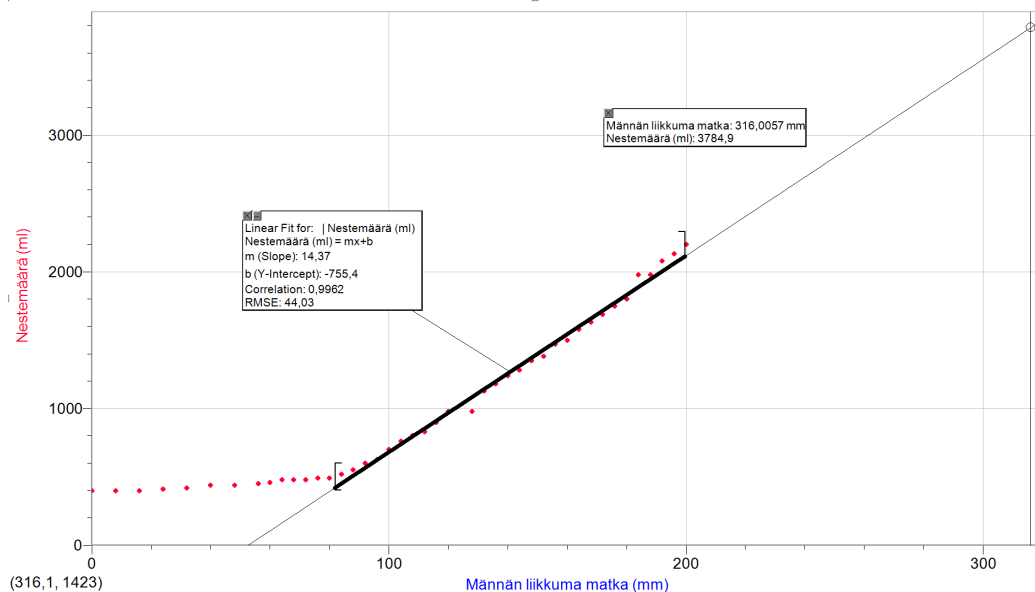
Vastaus: Omenoista saatiin kokonaisuudessaan 3,8 litraa mehua.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Kun määntää on kierretty 79 kierrosta, mäntä on siis liikkunut pystysuunnassa matkan

$$79 \cdot 4,0 \text{ mm} = 316 \text{ mm.} \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

Tehtävänannon mukaan mehua saatiin samassa suhteessa tilavuuden pienene- miseen verrattuna, eli saadun mehumäärän kuvaaja männän pystysuunnassa liikkuman matkan funktiona on suora. 1 p. (yht. 11 p.) Käytetään kohdassa 2.2 jäl- kimmäiseen osaan sovitettua suoraa ja selvitetään omenoista saadun mehun tilavuus ekstrapoloimalla, kun mäntä on liikkunut 316 mm.



2 p. (yht. 13 p.)

Ekstrapoloimalla saadaan, että nestemäärä kohdassa 316 mm on

$$3784,9 \text{ ml} = 3,7849 \text{ l}$$

1 p. (yht. 14 p.)

$$\approx 3,8 \text{ l.}$$

1 p. (yht. 15 p.)

Vastaus: Omenoista saatiin kokonaisuudessaan 3,8 litraa mehua.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

3. Uudenvuodentinojen valaminen (15 p.)

Aineisto:

- 3. A [Taulukko: Kidesokerin ominaisuuksia](#)
- 3. B [Video: Lyijyn ja sokerin sulattaminen](#)

Tinojen valaminen on suomalainen uudenvuodenperinne. Liedellä sulatetaan pienessä kauhassa kiinteää ainetta, usein pienen hevosenkengän muotoista tinapalaa. Sula aines kaadetaan nopeasti kylmään veteen, jossa se jähmettyy satunnaiseen muotoon. Aiemmin tinapala oli lyijyä, mutta 2020-luvulla lyijyn käyttäminen kiellettiin ympäristösyistä. Jotkut käyttävät metallin korvikkeena tavallista kidesokeria. Kidesokerin ominaisuuksia on esitetty taulukossa [3.A](#).

- 3.1 Osoita, että kidesokerin sulattamiseen tarvitaan 8,2 kJ energiaa, jos huoneenlämpöistä (21 °C) sokeria otetaan kaksi ruokalusikallista (30 ml). (7 p.)
- 3.2 Osatehtävän 3.1 sokerimäärä sulatetaan levyllä, jonka teho on 1 200 W. Sulaminen kestää 2,5 minuuttia. Määritä sulattamisen hyötysuhde. (4 p.)
- 3.3 Video [3.B](#) esittää rinnakkain lyijyn ja sokerin kuumentamista liedellä samoissa olosuhteissa. Lyijykimpale sulaa kokonaan lyhyen ajan kuluessa, mutta sokerikekoa sulatettaessa osa sokerista ei sula pitkään aikaan. Mistä ero johtuu? (4 p.)

Ratkaisu.

3.1

Ratkaisuvaihtoehto 1

$$T_0 = 21\text{ °C} = (21 + 273,15)\text{ K} = 294,15\text{ K}$$

alkulämpötila

$$T = 462\text{ K}$$

sulamislämpötila

$$V = 30\text{ ml} = 0,30\text{ dl}$$

tilavuus

$$\rho = 80 \frac{\text{g}}{\text{dl}}$$

tiheys

$$c = 0,4225 \frac{\text{kJ}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

molaarinen ominaislämpökapasiteetti

$$s = 46,2 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$$

molaarinen ominaissulamislämpö

$$M = 342,3 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

moolimassa

Huomataan, että ero molaarisen ominaislämpökapasiteetin ja tavallisen ominaislämpökapasiteetin välillä on se, että molaarisen ominaislämpökapasiteetin yksikössä on kilogramman sijasta mooli. Tästä voidaan päätellä, että siinä missä tavallista ominaislämpökapasiteettia käyttäessä lämpömäärän kaava on $Q = cm\Delta T$, missä m on massa, molaarista ominaislämpökapasiteettia käyttäessä se on $Q = cn\Delta T$, missä n on ainemäärä. Vastaavasti molaarista ominaissulamislämpöä käyttäessä sulamislämmön kaava on $Q = sn$.

Sokeri täytyy ensin lämmittää sulamislämpötilaan ja sitten sulattaa. Lämmittämiseen kuluu energia $Q_1 = cn(T - T_0)$ 1 p. (yht. 1 p.), missä c on kidesokerin molaarinen ominaislämpökapasiteetti ja n on kidesokerin ainemäärä. Sokerin sulamiseen kuluva lämpöenergia on $Q_2 = sn$ 1 p. (yht. 2 p.), missä s on kidesokerin molaarinen ominaissulamislämpö. Yhteensä huoneenlämpöisen kidesokerin sulattamiseen kuluva energia on siis

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 \\ &= cn(T - T_0) + sn \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)} \\ &= (c(T - T_0) + s)n \end{aligned} \tag{1}$$

Ainemäärä saadaan sokerin massan ja moolimassan suhteena $n = \frac{m}{M}$. Sokerin

massa puolestaan saadaan sokerin tiheyden ja tilavuuden avulla:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$m = \rho V \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Sijoitetaan nämä yhtälöön (1) ja lasketaan kidesokerin sulattamiseen tarvittavan energian määrä:

$$Q = (c(T - T_0) + s) \frac{m}{M}$$

$$Q = (c(T - T_0) + s) \frac{\rho V}{M} \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

$$= \left(0,4225 \frac{\text{kJ}}{\text{mol} \cdot \text{K}} (462 \text{ K} - 294,15 \text{ K}) + 46,2 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} \right) \frac{80 \frac{\text{g}}{\text{dl}} \cdot 0,30 \text{ dl}}{342,3 \frac{\text{g}}{\text{mol}}}$$

$$= 8,211\,507 \dots \text{ kJ} \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

$$\approx 8,2 \text{ kJ} \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

Vastaus: Huoneenlämpöisen kidesokerin sulattamiseen tarvitaan siis 8,2 kJ energiaa.

Huomaa! Jos tulkitsit tehtävänannosta, että tilavuus 30 ml on yhden ruokalusikallisen tilavuus, saatoit huomata virheellisen tulkinnan siitä, että lopullinen vastaus on kaksinkertainen tehtävänannossa annettuun verrattuna.

Ratkaisuvaihtoehto 2

$$T_0 = 21\text{ °C} = (21 + 273,15)\text{ K} = 294,15\text{ K}$$
 alkulämpötila

$$T = 462\text{ K}$$
 sulamislämpötila

$$V = 30\text{ ml} = 0,30\text{ dl}$$
 tilavuus

$$\rho = 80\frac{\text{g}}{\text{dl}}$$
 tiheys

$$c' = 0,4225\frac{\text{kJ}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$
 molaarinen ominaislämpökapasiteetti

$$s' = 46,2\frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$$
 molaarinen ominaissulamislämpö

$$M = 342,3\frac{\text{g}}{\text{mol}}$$
 moolimassa

Sokeri täytyy ensin lämmittää sulamislämpötilaan ja sitten sulattaa. Lämmittämiseen kuluu energia $Q_1 = cm(T - T_0)$ 1 p. (yht. 1 p.), missä c on kidesokerin ominaislämpökapasiteetti ja m on kidesokerin massa. Sokerin sulamiseen kuuluva lämpöenergia on $Q_2 = sm$ 1 p. (yht. 2 p.), missä s on kidesokerin ominaissulamislämpö. Yhteensä huoneenlämpöisen kidesokerin sulattamiseen kuluva energia on siis

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 \\ &= cm(T - T_0) + sm \\ &= (c(T - T_0) + s)m \end{aligned} \quad (2)$$

Tehtävän aineistossa on annettu kidesokerille ominaislämpökapasiteetin c ja ominaissulamislämmön s sijaan moolinen ominaislämpökapasiteetti c' ja moolinen sulamislämpö s' . Ilmoittamalla massa ainemäärän ja moolimassan avulla muodossa $m = nM$ saadaan yhtälö (2) muotoon

$$\begin{aligned} Q &= (c(T - T_0) + s)nM \\ &= (cM(T - T_0) + sM)n \end{aligned}$$

Nyt voidaan merkitä $cM = c'$ ja $sM = s'$, sillä

$$\begin{aligned}
 cM &= \frac{Q}{m\Delta T} \cdot M \\
 &= \frac{Q}{n\cancel{M}_1\Delta T} \cdot \cancel{M}^1 \\
 &= \frac{Q}{n\Delta T} \\
 &= c'
 \end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned}
 sM &= \frac{Q}{m} \cdot M \\
 &= \frac{Q}{n\cancel{M}_1} \cdot \cancel{M}^1 \\
 &= \frac{Q}{n} \\
 &= s'.
 \end{aligned}$$

Muutetaan siis yhtälö (2) muotoon

$$Q = (c'(T - T_0) + s')n \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)} \quad (3)$$

eli korvataan yhtälössä kidesokerin massa sen ainemäärällä n . Ainemäärä saadaan sokerin massan ja moolimassan suhteena $n = \frac{m}{M}$. Sokerin massa puoletaan saada sokerin tiheyden ja tilavuuden avulla:

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{m}{V} \\
 m &= \rho V \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}
 \end{aligned}$$

Sijoitetaan nämä yhtälöön (3) ja lasketaan kidesokerin sulattamiseen tarvittavan

energian määrä:

$$Q = (c'(T - T_0) + s') \frac{m}{M}$$

$$Q = (c'(T - T_0) + s') \frac{\rho V}{M} \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

$$= \left(0,4225 \frac{\text{kJ}}{\text{mol} \cdot \text{K}} (462 \text{ K} - 294,15 \text{ K}) + 46,2 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} \right) \frac{80 \frac{\text{g}}{\text{dl}} \cdot 0,30 \text{ dl}}{342,3 \frac{\text{g}}{\text{mol}}}$$

$$= 8,211\,507 \dots \text{ kJ} \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

$$\approx 8,2 \text{ kJ} \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

Vastaus: Huoneenlämpöisen kidesokerin sulattamiseen tarvitaan siis 8,2 kJ energiaa.

Huomaa! Jos tulkitsit tehtävänannosta, että tilavuus 30 ml on yhden ruokalusikallisen tilavuus, saatoit huomata virheellisen tulkinnan siitä, että lopullinen vastaus on kaksinkertainen tehtävänannossa annettuun verrattuna.

3.2

$$P = 1\,200 \text{ W}$$

lieden teho

$$\Delta t = 2,5 \text{ min} = 150 \text{ s}$$

sulamiseen kuluva aika

Sokerin sulattamiseen kuluu kohdan 3.1. perusteella $Q = 8,211\,507 \dots \text{ kJ}$ energiaa. Lasketaan, kuinka paljon levy tuottaa energiaa sulattamisen aikana. Teho on tuotetun energian ja kuluneen ajan suhde eli $P = \frac{E}{\Delta t}$. Levyn tuottama energia E on siis $E = P\Delta t$. 1 p. (yht. 8 p.)

Sulattamisen hyötysuhde on sokerin sulamiseen kuluvan energian Q ja levyn

tuottaman energian E suhde:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{Q}{E} \\ \eta &= \frac{Q}{P\Delta t} \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)}) \\ &= \frac{8,211\,507 \dots \text{ kJ}}{1\,200 \text{ W} \cdot 150 \text{ s}} \\ &= 0,045\,619 \dots \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)}) \\ &= 4,5619 \dots \% \\ &\approx 4,6 \% \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)})\end{aligned}$$

Vastaus: Sulattamisen hyötysuhde on 4,6 prosenttia.

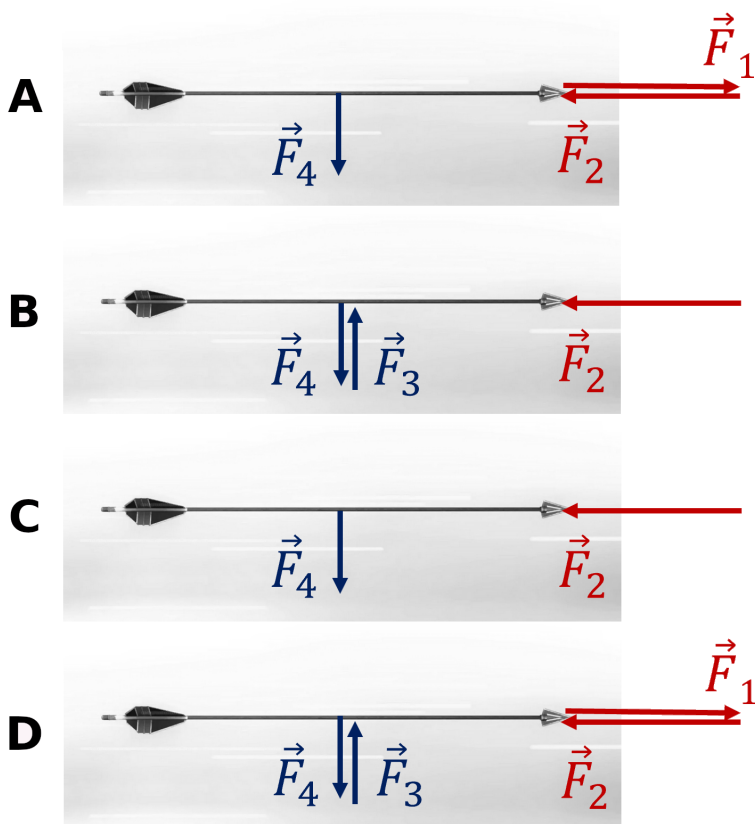
- 3.3 Lyijyn ja kidesokerin sulamiseen kuluvien aikojen ero johtuu ensisijaisesti lyijyn ja kidesokerin erilaisesta lämmönjohtavuudesta. (2 p. (yht. 13 p.)) Levyn tuottama lämpö johtuu sulatuskauhasta sulatettavan aineen pohjaan. Lyijy on metallia ja johtaa lämpöä paremmin kuin kidesokeri. (1 p. (yht. 14 p.)) Sokeri on lisäksi rakeista ainetta eikä yhtenäinen kappale, eli yksittäisten sokerikiteiden välissä on ilmaraikoja, jotka eristävät lämpöä hyvin. (1 p. (yht. 15 p.)) Lämpö siis johtuu ylimpiin soke-rikiteisiin huomattavasti hitaammin kuin yhtenäisen lyijykappaleen yläosaan.

Lyijyn lämmönjohtavuus on taulukon mukaan $35,3 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$ ja kidesokerin lämmönjohtavuus puolestaan tehtävänannon perusteella $0,15 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$. Vastausta ei tarvitse perustella lämmönjohtavuuden lukuarvojen avulla, vastaukseen riittää todeta, että lyijyllä on metallina hyvä lämmönjohtamiskyky.

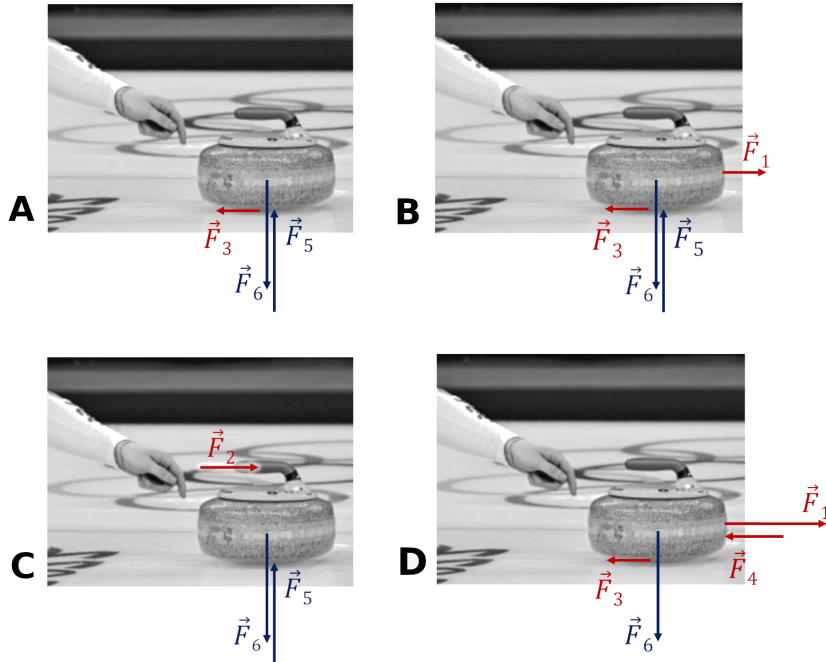
Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

4. Voimat (15 p.)

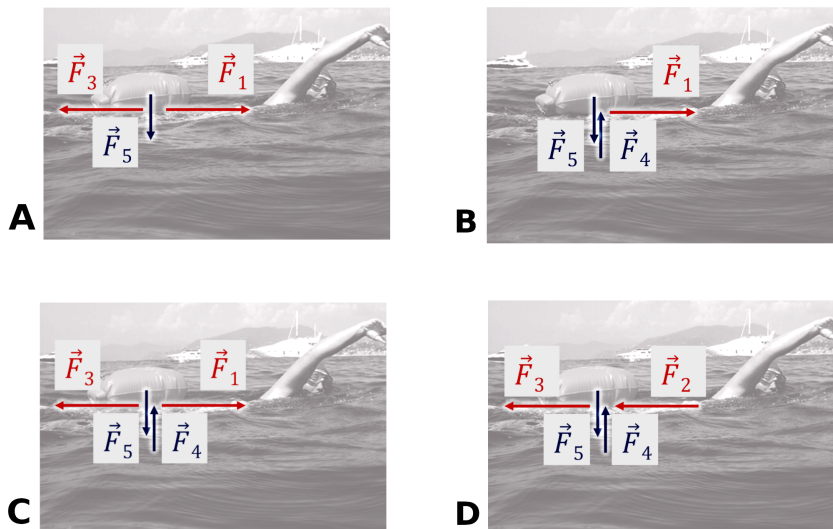
Valitse osatehtävien tilanteissa voimakuvioista A–D se, joka kuvaa parhaiten tarkasteltavaan kappaleeseen vaikuttavia ulkoisia voimia. Kappale liikkuu kaikissa tilanteissa oikealle. Kirjoita vastauskenttään valitsemasi voimakuvion kirjain ja nimeä tähän voimakuvioon piirretyt voimat.

4.1 Ilmassa lentävä nuoli. (4 p.)

4.2 Heiton jälkeen jään pinnalla liukuva curling-kivi. (5 p.)



4.3 Uimarin selkään hihnalla kiinnitetty, vedessä liikkuva uimapoiju. (6 p.)



Ratkaisu.

4.1 C 2 p. (yht. 2 p.)

 $\overline{F}_4$ on nuolen painovoima, 1 p. (yht. 3 p.) $\overline{F}_2$ on ilmanvastusvoima. 1 p. (yht. 4 p.)

Voimien nimiksi käyvät myös "painovoima" ja "ilmanvastus".

Vaihtoehdot A ja D ovat väärin, sillä nuoleen ei vaikuta tilanteessa eteenpäin työntävää voimaa. Vaihtoehto B:n voisi helposti ajatella olevan oikein sillä perusteella, että $\overline{F}_3$ olisi nuoleen vaikuttava noste, mutta se on väärin siksi, että $\overline{F}_3$ on piirretty yhtä suureksi kuin $\overline{F}_4$, mutta nuoleen vaikuttava noste on merkityksellömän pieni verrattuna nuolen painovoimaan. Nuolen sulat eivät myöskään aiheuta merkittävää ylöspäin kohdistuvaa voimaa, vaan lähinnä vakauttavat nuolen lentoa.

4.2 A 2 p. (yht. 6 p.)

 $\overline{F}_3$ on liukukitkavoima, 1 p. (yht. 7 p.) $\overline{F}_6$ on kiven painovoima, 1 p. (yht. 8 p.) $\overline{F}_5$ on jään pinnan kiveen kohdistama tukivoima. 1 p. (yht. 9 p.)

Voimien nimiksi käyvät myös "kitka", "painovoima" ja "jään tukivoima".

Muut vaihtoehdot ovat väärin, sillä kiveen ei vaikuta tilanteessa eteenpäin työntävää voimaa, koska kivi on jo irronnut kädestä.

4.3 C 2 p. (yht. 11 p.)

 $\overline{F}_5$ on poijun painovoima, 1 p. (yht. 12 p.) $\overline{F}_4$ on poijuun kohdistuva noste, 1 p. (yht. 13 p.) $\overline{F}_1$ on hihnan jännitysvoima, eli voima, jolla uimari vetää poijua, 1 p. (yht. 14 p.) $\overline{F}_3$ on poijuun kohdistuva väliaineen (veden ja ilman) aiheuttama vastusvoima.

1 p. (yht. 15 p.)

Voimien nimiksi käyvät myös "painovoima", "noste" ja "veden vastusvoima".

Kuvan A tapauksessa poijuun kohdistuu pystysuunnassa vain alaspäin suuntautuva voima, joten poiju uppoaisi. Kuvan B tapauksessa puuttuu väliaineen vastus. Kuvan D tapauksessa poijuun kohdistuu vaakasuunnassa kaksi voimaa vasemmalle, jolloin poiju saisi kiihtyvyyden vasemmalle. Näin ollen A, B ja D ovat väärin.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

5. Eksoplaneetan kiertoaika (15 p.)

Aineisto:

- 5. A [Kuva: Ilmiön havainnollistus](#)
- 5. B [Kuva: Tähten valon suhteellisen intensiteetin aikariippuvuus](#)
- 5. C [Kuva: Pohja voimakuvion piirtämiseen](#)

Vierasta tähteä kiertävää planeettaa kutsutaan eksoplaneetaksi. Eksoplaneetta voidaan löytää esimerkiksi siten, että tähden valon intensiteetin havaitaan pienenevän aina, kun eksoplaneetta kulkee tähden editse (kuva [5.A](#)).

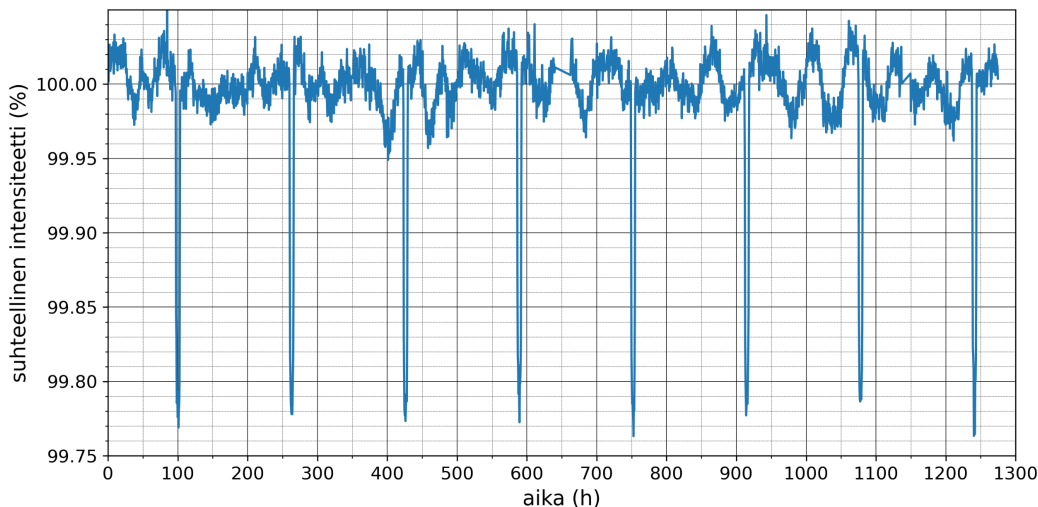
5.1 Kuvassa [5.B](#) on esitetty erään tähden valon suhteellisen intensiteetin ajallinen vaihtelu Kepler-satelliitin mittaamana. Kuinka monta prosenttia tähden pinta-alasta planeetta enimmillään peittää? (3 p.)

5.2 Määritä kuvan [5.B](#) avulla tähteä kiertävän eksoplaneetan kiertoaika. (4 p.)

5.3 Täydennä eksoplaneetan voimakuvio kuvaan [5.C](#) tai vastaavaan itse piirtämään kuvaan. Liitä kuvakaappaus vastaukseesi. Eksoplaneetan kiertorata on likimain ympyrä. Laske ympyräradan säde, kun tähden massa on 1,52 kertaa Auringon massa. (8 p.)

Ratkaisu.

5.1 Tähten valon suhteellisen intensiteetin aikariippuvuus on esitetty aineiston kuvassa. Luetaan sieltä silmämääräisesti suhteellisten intensiteettien arvot niissä kohdissa, joissa suhteellinen intensiteetti putoaa.



Suhteellisen intensiteetin putoaminen johtuu eksoplaneetan ajautumisesta tähden ja satelliitin väliin. **Mittausvirheestä ja tähden säteilyn intensiteetin vaihtelusta johtuen suhteellinen intensiteetti ei putoa aina samaan arvoon.** Taulukoidaan aineistosta luetut arvot, ja lasketaan niiden keskiarvo satunnaisen virheen minimoimiseksi.

Pudotus #	Suhteellinen intensiteetti (%)
1	99,77
2	99,78
3	99,775
4	99,77
5	99,76
6	99,78
7	99,79
8	99,76
Keskiarvo	99,773125

1 p. (yht. 1 p.)

Kun planeetta on satelliitin ja tähden välissä, satelliitin havaitsema suhteellinen intensiteetti I_s on siis:

$$I_s = 99,773125\%$$

Lasketaan intensiteetin muutoksen suuruus ΔI :

$$\Delta I = 100\% - 99,773125\%$$

$$\Delta I = 0,226875\%$$

1 p. (yht. 2 p.)

$$\Delta I \approx 0,23\%$$

1 p. (yht. 3 p.)

Suhteellinen intensiteetin muutoksen suuruus ΔI on suoraan verrannollinen planeetan peittämän pinta-alan osuuteen tähden pinta-alasta. Peitetty pinta-ala on suurimmillaan siis 0,23% tähden pinta-alasta.

Vastaus: Planeetta peittää tähden pinta-alasta enimmillään 0,23%.

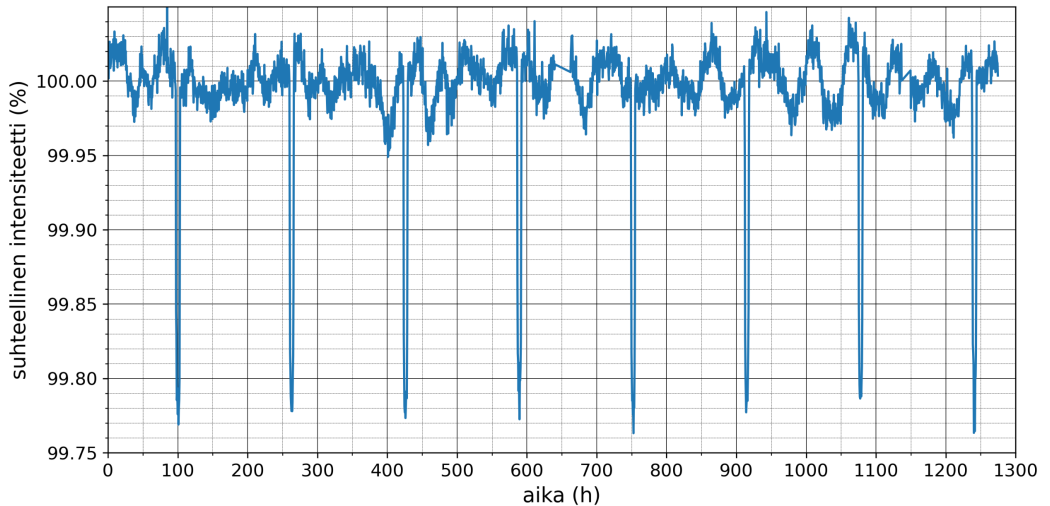
Pistetyksestä: **Myös kolmen merkitsevän numeron tarkkuudelle pyöristetty vastaus hyväksytään.**

5.2

Ratkaisuvaihtoehto 1

Intensiteetti putoaa aina, kun planeetta ajautuu satelliitin ja tähden väliin. Kahden intensiteetin pudotuksen välinen aika on siis yhteen kierrokseen kuluva aika.

1 p. (yht. 4 p.)



Luetaan jokaisen intensiteetinaleneman ajanhetket silmämääräisesti, ja lasketaan kiertoaajat kahden peräkkäisen pudotuksen ajanhetkien erotuksena. Lasketaan lopuksi saaduista kiertoaajoista keskiarvo satunnaisen virheen minimoimiseksi.

Pudotus #	Ajanhetki (h)	Kiertoaika (h)
1	100	
2	260	160
3	425	165
4	590	165
5	750	160
6	920	170
7	1075	155
8	1240	165
Keskiarvo		162,8571429

2 p. (yht. 6 p.)

Pyöristettynä eksoplaneetan kiertoaika on siis 163 h.

1 p. (yht. 7 p.)

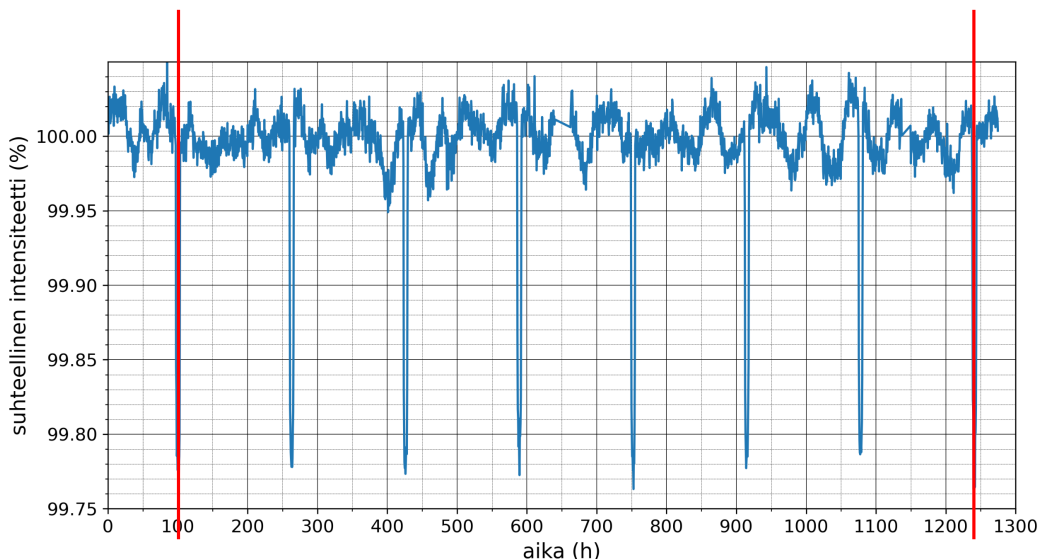
Vastaus: Eksoplaneetan kiertoaika on 163 tuntia.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Intensiteetti putoaa aina kun planeetta ajautuu satelliitin ja tähden väliin. Kahden intensiteetin pudotuksen välinen aika on siis yhteen kierrokseen kuluva aika.

1 p. (yht. 4 p.)

Luetaan aineistosta ensimmäisen ja viimeisen pudotuksen ajankohdat ja lasketaan kiertoaika niiden avulla, jotta saadaan aineiston arvojen lukemisesta syntyvä suhteellinen virhe mahdollisimman pieneksi.



Ensimmäinen intensiteetin putoaminen tapahtuu ajanhetkellä $t_1 = 100$ h. Viimeinen putoama tapahtuu ajanhetkellä $t_8 = 1240$ h. Aikaa ensimmäisen ja viimeisen putoaman välillä kuluu siis

$$\begin{aligned} t_8 - t_1 &= 1240 \text{ h} - 100 \text{ h} \\ &= 1140 \text{ h.} \end{aligned}$$

1 p. (yht. 5 p.)

Tässä ajassa eksoplaneetta kiertää tähden seitsemän kertaa. Kiertoaika saadaan laskettua keskiarvona:

$$\begin{aligned} T &= \frac{t_8 - t_1}{7} \\ &= \frac{1140 \text{ h}}{7} \\ &= 162,857142 \dots \text{ h} \\ &\approx 163 \text{ h} \end{aligned}$$

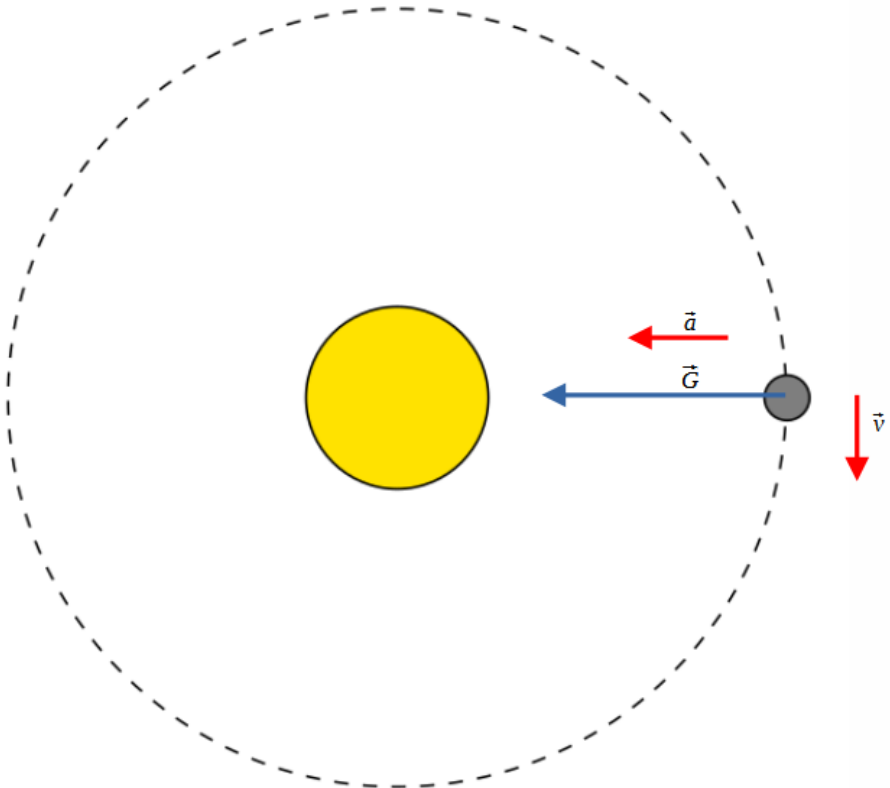
1 p. (yht. 6 p.)

1 p. (yht. 7 p.)

Vastaus: Eksoplaneetan kiertoaika on 163 tuntia.

Jos aineistosta luettiin ensimmäisen putoaman ja viidennen putoaman ajanhetket ja laskettiin kiertoaika niitä käyttäen, vastaus saatetaan hyväksyä, sillä viidennen putoaman saa luettua muita putoamia tarkemmin, koska se osuu ruudukon viivan kohdalle.

5.3 Ympyräradalla kulkevaan eksoplaneettaan vaikuttaa vain tähden siihen kohdistama gravitaatiovoima.



2 p. (yht. 9 p.)

Pisteytyksestä: YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 27.3.2024) kuvassa ei ollut kiihtyvyyttä eikä nopeutta, joten niitä ei todennäköisesti vaadita pisteiden saamiseen kuvasta.

$$M = 1,52 \cdot M_a = 1,52 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$\gamma = 6,67430 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$T = 162,8571429 \text{ h} = 162,8571429 \cdot 60^2 \text{ s}$$

Eksoplaneetalle saadaan kirjoitettua liikeyhtälö Newtonin 2. lain mukaan:

$$\begin{aligned}\Sigma \vec{F} &= m\vec{a} \\ G &= ma_n \quad || G = \gamma \frac{Mm}{r^2}, \quad a_n = \frac{v^2}{r} \\ \gamma \frac{Mm}{r^2} &= m \frac{v^2}{r}, \quad \text{2 p. (yht. 11 p.)}\end{aligned}\tag{1}$$

missä M on tähden massa, m planeetan massa, γ gravitaatiovakio, r eksoplaneetan ympyräradan säde ja v eksoplaneetan ratanopeus.

Eksoplaneetan nopeuden suuruus on vakio. Nopeus voidaan ilmoittaa kiertoaikaa T avulla:

$$v = \frac{2\pi r}{T}. \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}\tag{2}$$

Ratkaistaan eksoplaneetan ympyräradan säde r yhtälöistä (1) ja (2).

$$\gamma \frac{Mm}{r^2} = m \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} \quad || : m$$

$$\gamma \frac{M}{r^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \quad || \cdot r^2$$

$$\gamma = \frac{4\pi^2 r^4}{MT^2}$$

$$\gamma M = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2} \quad || \cdot \frac{T^2}{4\pi^2}$$

$$r^3 = \frac{\gamma MT^2}{4\pi^2} \quad || \sqrt[3]{}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{\gamma MT^2}{4\pi^2}} \quad \text{1 p. (yht. 13 p.)}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{6,67430 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1,52 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot (162,857 \dots \cdot 60^2 \text{ s})^2}{4 \cdot \pi^2}}$$

$$r = 1,206649102 \dots \cdot 10^{10} \text{ m} \quad \text{1 p. (yht. 14 p.)}$$

$$r \approx 1,21 \cdot 10^{10} \text{ m} \quad \text{1 p. (yht. 15 p.)}$$

Vastaus: Eksoplaneetan ympyräradan säde on $1,21 \cdot 10^{10} \text{ m}$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

6. Pölyhiukkanen kondensaattorissa (15 p.)

Levykondensaattorin levyjen välinen ilmarako on 2,6 mm. Kondensaattori kytketään jännitelähteeseen, jonka lähdejännite on 36 V. Tällöin positiivisesti varautuvalla levyllä ollut pölyhiukkanen saa 5,7 pC:n varauksen ja irtoaa levyltä. Hiukkasen massa on 3,3 mg.

6.1 Kuinka suuri on sähkökentän voimakkuus levyjen välissä, ja minkä suuntainen se on? (4 p.)

6.2 Kuinka suuri on pölyhiukkaseen kohdistuva sähköinen voima? (3 p.)

6.3 Tarkastellaan vain hiukkaseen vaikuttavaa sähköistä voimaa. Millaista hiukkasen liike on? Kuinka pitkä aika hiukkaselta kuluu matkaan kondensaattorin negatiivisesti varautuneelle levyille, kun hiukkanen lähtee levosta? (8 p.)

Ratkaisu.

6.1

$$d = 2,6 \text{ mm} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$U = 36 \text{ V}$$

Kondensaattorilevyjen väliin muodostuu likimain homogeeninen sähkökenttä, jonka suunta on positiivisesti varatulta levyltä kohti negatiivisesti varattua levyä.

1 p. (yht. 1 p.)

Levyjen väliselle jännitteelle U , levyjen välimatkalle d ja levyjen välissä olevan sähkökentän E voimakkuudelle E pätee

$$U = Ed.$$

Ratkaistaan sähkökentän voimakkuus E .

$$U = Ed \quad || : d$$

$$E = \frac{U}{d} \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

$$= \frac{36 \text{ V}}{2,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}}$$

$$= 13\,846,15 \dots \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

$$= 13,84615 \dots \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

$$\approx 14 \frac{\text{kV}}{\text{m}} \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Vastaus: Sähkökentän voimakkuus levyjen välissä on $14 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ ja sähkökentän suunta on positiivisesti varatulta levyltä kohti negatiivisesti varattua levyä.

6.2

$$E = 13\,846,15 \dots \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

← kohdasta 6.1

$$Q = 5,7 \text{ pC} = 5,7 \cdot 10^{-12} \text{ C}$$

Pölyhiukkaseen kohdistuva sähköinen voima on

$$F = QE \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

$$= 5,7 \cdot 10^{-12} \text{ C} \cdot 13\,846,15 \dots \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$= 7,8923 \dots \cdot 10^{-8} \text{ N} \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

$$\approx 7,9 \cdot 10^{-8} \text{ N} \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

Vastaus: Pölyhiukkaseen kohdistuvan sähköisen voiman suuruus on $7,9 \cdot 10^{-8} \text{ N}$.

Vastaukseksi käy myös **79 nN**.

6.3

$$d = 2,6 \text{ mm} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$m = 3,3 \text{ mg} = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ g} = 3,3 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$$

$$F = 7,8923 \dots \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

← kohdasta 6.2

Levykondensaattorin levyjen välinen sähkökenttä on likimain homogeeninen, eli sähkökentän voimakkuus E on likimain vakio ja kaikkialla saman suuntainen levyjen välissä. 1 p. (yht. 8 p.) Näin ollen myös pölyhiukkaseen vaikuttava sähköinen voima $F = QE$ on likimain vakio. 1 p. (yht. 9 p.) Tehtävänannon mukaan tarkastellaan vain pölyhiukkaseen vaikuttavaa sähköistä voimaa, joten Newtonin 2. lain nojalla

$$F = ma, \tag{1}$$

missä a on pölyhiukkasen kiihtyvyys. Tästä seuraa, että myös pölyhiukkasen kiihtyvyys on likimain vakio. 1 p. (yht. 10 p.) Pölyhiukkasen liike on siis likimain tasaisesti kiihtyvää. 1 p. (yht. 11 p.)

Hiukkanen lähtee liikkeelle levosta, joten sen alkunopeus on $v_0 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Merkitään alkupaikaksi $x_0 = 0 \text{ m}$, jolloin loppupaikka on $x = d$. Näin ollen tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä paikan kaavan avulla saadaan

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$d = 0 \text{ m} + 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$d = \frac{1}{2} a t^2 \tag{2}$$
1 p. (yht. 12 p.)

missä t on aika, joka kuluu hiukkasen siirtymiseen negatiivisesti varatulle levyille. Ratkaistaan aika t yhtälöistä (1) ja (2).

$$F = ma \quad || : m$$

$$a = \frac{F}{m}$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (2).

$$d = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot t^2 \quad || \cdot 2$$

$$2d = \frac{F}{m} \cdot t^2 \quad || \cdot m$$

$$2dm = F \cdot t^2 \quad || : F$$

$$\frac{2dm}{F} = t^2$$

$$t = (\pm) \sqrt{\frac{2dm}{F}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2dm}{F}} \quad \text{1 p. (yht. 13 p.)}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 3,3 \cdot 10^{-6} \text{ kg}}{7,8923 \dots \cdot 10^{-8} \text{ N}}}$$

$$= 0,4662 \dots \text{ s} \quad \text{1 p. (yht. 14 p.)}$$

$$\approx 0,47 \text{ s} \quad \text{1 p. (yht. 15 p.)}$$

Vastaus: Hiukkaselta kuluu 0,47 s matkaan negatiivisesti varatulle levylle.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

7. Leijulauta (15 p.)

Aineisto:

7. A [Kuva: Lautailija leijulaudalla](#)

Vuonna 1989 ilmestyneessä Paluu tulevaisuuteen II -elokuvassa päähenkilö Marty McFly matkustaa aikakoneella tulevaisuuteen vuoteen 2015. Marty käyttää tulevaisuuden kaupungissa liikkumiseen leijulautaa.

Vuonna 2015 esiteltiin leijulaudan prototyyppi, jolla voi leijailla kuparilattian päällä (kuva [7.A](#)). Leijulaudan sisällä olevat moottorit pyörittävät kestopagneetteja.

- 7.1 Miksi leijulaudan pyörivät magneetit mahdollistavat leijumisen kuparilattian päällä? (6 p.)
- 7.2 Miksi leijuminen ei onnistu asfaltin päällä? (3 p.)
- 7.3 Mitä voimia lautaan vaikuttaa kuvan [7.A](#) tilanteessa? (3 p.)
- 7.4 Miksi lattia lämpenee, vaikka lauta ei kosketa lattiaa? (3 p.)

Ratkaisu.

- 7.1 Leijulaudan sisällä olevien magneettien magneettikenttä läpäisee kuparilattian. Kun magneetit pyörivät, magneettivuo muuttuu lattian eri alueilla. 1 p. (yht. 1 p.)

Kupari on johdemateriaalia. Kun magneettivuo muuttuu lattian eri alueilla, indusoituu lattiaan induktiolain mukaisesti pyörrevirtoja, 1 p. (yht. 2 p.) joista aiheutuvat magneettikentät vastustavat Lenzin lain mukaisesti leijulaudan magneettien pyörimisen aiheuttamaa magneettivuon muutosta. 1 p. (yht. 3 p.)

Erityisesti voidaan päätellä, että jos leijulaudan kestopagneetin pohjoiskohtio lähestyy jotakin lattian aluetta, lattian tässä kohdassa läpäisevä alaspäin osoitettava magneettikenttä voimistuu ja magneettivuo kasvaa, jolloin induktiovirran aiheuttama magneettikenttä on tällä lattian alueella vastakkaissuuntainen. Vastaavasti, jos leijulaudan magneetin eteläkohtio lähestyy jotakin lattian aluetta, lattian tässä kohdassa läpäisevä ylöspäin osoittava magneettikenttä voimistuu, ja induktiovirran aiheuttama magneettikenttä on jälleen vastakkaissuuntainen leijulaudan magneetin magneettikentän kanssa.

Koska leijulaudan ja lattian magneettikentät ovat vastakkaissuuntaiset, 1 p. (yht. 4 p.) leijulauta ja lattia kohdistavat toisiinsa hylkimisvoimat. Lattia kohdistaa siis lautaan magneettisen voiman ylöspäin. 1 p. (yht. 5 p.) Jos tämä magneettinen voima on yhtä suuri kuin laudan ja lautailijan painovoimat yhteensä, pystysuuntaiset voimat kumoavat toisensa. Kun voimien summa on pystysuunnassa nolla, lauta pysyy pystysuunnassa paikoillaan Newtonin toisen lain nojalla. 1 p. (yht. 6 p.)

- 7.2 Asfaltti ei ole johdemateriaali, 1 p. (yht. 7 p.) sillä se ei sisällä merkittävästi vapaita varauksenkuljettajia. 1 p. (yht. 8 p.) Näin ollen asfalttiin ei indusoidu pyörrevirtoja, joka aiheuttaisivat magneettikentän. 1 p. (yht. 9 p.) Koska leijuminen kohdan 7.1 nojalla perustuu toisiaan sähkömagneettisesta vuorovaikutuksesta aiheutuviin hylkiviin voimiin, ja asfalttipinnalle ei muodostu induktion seurauksena magneettikenttää, leijuminen ei onnistu asfaltin päällä.
- 7.3 Lautaan vaikuttavat voimat ovat laudan painovoima, 1 p. (yht. 10 p.) lautailijan lautaan kohdistama kosketusvoima 1 p. (yht. 11 p.) sekä laudan ja lattian välisestä sähkömagneettisesta vuorovaikutuksesta aiheutuvat magneettiset voimat. 1 p. (yht. 12 p.)
- 7.4 Kohdan 7.1 perusteella kuparilattiaan indusoituu pyörrevirtoja. Vaikka kupari on johdemateriaali, sen resistiivisyys ei kuitenkaan ole nolla, 1 p. (yht. 13 p.) joten se vastustaa sähkövirran kulkua, jolloin osa energiasta muuttuu lämmöksi. 2 p. (yht. 15 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

8. Ydinvoimalaitos Olkiluoto 3 (15 p.)

Olkiluoto 3 on ydinvoimalaitos Suomen länsirannikolla. Se tuottaa sähköä 1 600 MW:n teholla, ja sähköntuotannon hyötysuhde on 0,375. Käyttösuunnitelman mukaan laitos käy täydellä teholla yhtämittaisesti 330 vuorokautta vuodessa. Noin kuukauden kestävästä käyttökätkon aikana laitosta huolletaan ja 32 tonnia käytettyä polttoainetta korvataan tuoreella polttoaineella seuraavaa käyttöjaksoa varten.

Ydinvoimalaitoksen energiantuotanto perustuu uraanin fissioreaktioon, jossa uraaniydin halkeaa kahdeksi keskiraskaaksi ytimeksi. Kussakin fissioreaktiossa vapautuu keskimäärin 0,20 GeV energiaa, jolla tuotetaan höyryä. Höyry pyörittää turbiinia ja turbiini generaattoria, joka tuottaa sähköenergiaa.

- 8.1 Kuinka monta fissioreaktiota tapahtuu sekunnissa Olkiluoto 3 -ydinvoimalaitoksessa, kun se käy täydellä teholla? (4 p.)
- 8.2 Kuinka paljon polttoaineen massaa katoaa fissioreaktioiden takia vuodessa, kun laitos toimii käyttösuunnitelman mukaisesti? (4 p.)
- 8.3 Jos saman sähkötehon tuottamiseen käytetään kivihiilivoimalaitosta, tarvittavan kivihiilen massa on 100 000-kertainen uraanipolttoaineen massa verrattuna. Mistä tämä ero johtuu? (4 p.)
- 8.4 Hiilivoima ja ydinvoima aiheuttavat käytön aikana ympäristölle haittoja ja riskejä. Kuvaille kolme merkittävää eroa hiilivoimalan ja ydinvoimalan välillä käytön aikaisissa haitoissa ja riskeissä. (3 p.)

Ratkaisu.

8.1

$$P_{\text{sähkö}} = 1\,600\text{ MW} = 1\,600 \cdot 10^6\text{ W}$$

voimalan sähköteho

$$\eta = 0,375$$

voimalan hyötysuhde

$$E_0 = 0,20\text{ GeV} = 0,20 \cdot 10^9\text{ eV}$$

$$= 0,20 \cdot 10^9 \cdot 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\text{ J}$$

yhden fissioreaktion energia

$$\Delta t_1 = 1,0\text{ s}$$

tarkasteltava aika

Fissioreaktiossa vapautuvalla energialla tuotetaan höyryä. Voimalaitoksen turbiinit ja generaattorit muuttavat höyryn tuottamiseen vaadittavan lämpöenergian sähköenergiaksi. Lasketaan voimalaitoksen hyötysuhteen perusteella sen lämpöteho:

$$\eta = \frac{P_{\text{anto}}}{P_{\text{otto}}}$$

$$\eta = \frac{P_{\text{sähkö}}}{P_{\text{lämpö}}}$$

$$P_{\text{lämpö}} = \frac{P_{\text{sähkö}}}{\eta}$$

Näin ollen voimalaitos tuottaa sekunnissa lämpömäärän

$$Q = P_{\text{lämpö}} \cdot \Delta t_1 = \frac{P_{\text{sähkö}}}{\eta} \cdot \Delta t_1. \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

Lasketaan, kuinka monta fissioreaktiota tarvitaan tämän lämpömäärän tuottamiseksi.

$$\begin{aligned} N &= \frac{Q}{E_0} \\ &= \frac{\frac{P_{\text{sähkö}}}{\eta} \cdot \Delta t_1}{E_0} \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)} \\ &= \frac{P_{\text{sähkö}} \cdot \Delta t_1}{\eta \cdot E_0} \\ &= \frac{1\,600 \cdot 10^6 \text{ W} \cdot 1,0 \text{ s}}{0,375 \cdot 0,20 \cdot 10^9 \cdot 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ J}} \\ &= 1,331\,521 \dots \cdot 10^{20} \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)} \\ &\approx 1,3 \cdot 10^{20} \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} \end{aligned}$$

Vastaus: Voimalaitoksessa tapahtuu $1,3 \cdot 10^{20}$ fissioreaktiota sekunnissa.

$$P_{\text{sähkö}} = 1\,600 \text{ MW} = 1\,600 \cdot 10^6 \text{ W}$$

voimalan sähköteho

$$\eta = 0,375$$

voimalan hyötysuhde

$$\Delta t_2 = 330 \text{ d} = 330 \cdot 24 \cdot 60^2 \text{ s}$$

käyttöaika vuodessa

$$c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

valonnopeus

Massakato saadaan laskettua ydinreaktiossa vapautuvan energian ja massan yhteydestä

$$E = mc^2 \quad || : c^2$$

$$m = \frac{E}{c^2} \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

Voimalaitoksessa vuoden aikana tuotettava energia on sen lämpötehon ja aikavälin tulo:

$$\begin{aligned} E &= P_{\text{lämpö}} \cdot \Delta t_2 \\ &= \frac{P_{\text{sähkö}}}{\eta} \cdot \Delta t_2. \end{aligned}$$

Sijoitetaan tämä ydinreaktiossa vapautuvan massan yhtälöön ja lasketaan vuodessa katoava massa:

$$\begin{aligned} m &= \frac{E}{c^2} \\ m &= \frac{\frac{P_{\text{sähkö}}}{\eta} \cdot \Delta t_2}{c^2} \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)} \\ &= \frac{P_{\text{sähkö}} \cdot \Delta t_2}{\eta \cdot c^2} \\ &= \frac{1\,600 \text{ MW} \cdot 330 \cdot 24 \cdot 60^2 \text{ s}}{0,375 \cdot \left(299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} \\ &= 1,353\,552 \dots \text{ kg} \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)} \\ &\approx 1,4 \text{ kg} \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)} \end{aligned}$$

Vastaus: Fissioreaktioiden takia massaa katoaa n. 1,4 kg vuodessa, kun voimalaitos toimii käyttösuunnitelman mukaisesti.

- 8.3 Ydinvoimalan toiminta perustuu uraaniytimien fissioreaktioihin. Fissioreaktiossa vapautuva energia muuttuu lämmöksi, jolla tuotetaan höyryä. Kivihiilivoimalassa poltetaan kivihiiltä ja tästä vapautuvalla lämmöllä tuotetaan höyryä. Kummassakin voimalaitostyyppissä höyry pyörittää turbiineja, jolloin höyryn lämpöenergia muuttuu mekaaniseksi energiaksi. Turbiinit pyörittävät generaattoreita, jotka muuttavat mekaanisen energian sähköksi, joka johdetaan sähköverkkoon asiakkaille.

Kivihiilivoimala voi käyttää osan polttamisella tuotetusta lämmöstä sähkön tuottamisen sijaan kaukolämmön tuottamiseen. Kaukolämpöverkossa kiertää voimalaitoksella kuumaksi lämmitetty vesi. Asuinrakennuksen lämmönjakohuoneessa on lämmönvaihdin, joka lämmittää talon käyttöveden ja vesikiertopattereiden kuuman veden ottamalla lämpöenergian kaukolämpöverkossa kiertävästä kuumasta vedestä, joka jäähtyneenä palaa takaisin voimalaitokselle. Periaatteessa myös ydinvoimalalla voidaan tuottaa kaukolämpöä, nykyisellään näin ei kuitenkaan toimita Suomessa.

Yhden uraaniytimen fissiossa vapautuu merkittävästi enemmän energiaa kuin yhden hiiliatomin polttamisessa eli hiilen ja hapen välisessä reaktiossa. 1 p. (yht. 9 p.)

Nukleonien välillä vaikuttaa vahva vuorovaikutus, atomien ja molekyylien välillä sähkömagneettinen vuorovaikutus. Uraaniytimen fissiossa vapautuva energia on peräisin nukleonien välisten sidosten katkeamisista ja muodostumisista kun uraaniytimen muodostaneet nukleonit muodostavat kaksi keskiraskasta ydintä. Vastaavasti kemiallisessa reaktiossa kuten hiilen palamisessa vapautuva energia on peräisin atomien tai molekyylien välisten sidosten katkeamisista tai muodostumisista. 1 p. (yht. 10 p.)

Vahva vuorovaikutus on monta kertaluokkaa voimakkaampi kuin sähkömagneettinen vuorovaikutus, joten sen muodostamien sidosten katkeamisessa ja muodostumisessa vapautuu monta kertaluokkaa enemmän energiaa. Kemiallisessa reaktiossa vapautuu muutaman elektronivoltin verran energiaa. Uraanin fissiossa vapautuu tehtävänannon mukaan n. 200 megaelektronivoltin verran energiaa. 2 p. (yht. 12 p.)

- 8.4 Hiilivoimalan ja ydinvoimalan käytöstä aiheutuvien haittojen ja riskien eroja ovat muun muassa

- Hiilidioksidipäästöt. Hiilivoimala tuottaa toimiessaan merkittävän määrän hiilidioksidia, ydinvoimalaitos ei tuota hiilidioksidipäästöjä.
- Pienhiukkaspäästöt. Hiilivoimalan savukaasujen mukana ilmakehään pääsee suuret määrät pienhiukkasia. Ydinvoimalasta ei aiheudu käytön aikana pienhiukkaspäästöjä.
- Onnettomuusriski. Ydinvoimaan liittyy aina ydinonnettomuuden riski sekä riski radioaktiivisen aineen pääsystä ympäristöön. Hiilivoimaan ei liity ydinonnettomuuden tai radioaktiivisen aineen vuodon riskiä.

YTL:n hyvän vastauksen piirteet (luettu 27.3.2024) sisälsi yllä mainitut kohdat. Muita eroja hiilivoimalan ja ydinvoimalan välillä, joista mielestämme voi antaa pisteen:

- Sodan tai terrori-iskun riski. Ydinvoimala-alueeseen kohdistuva aseellinen selkkkaus tai terrori-isku aiheuttaa ydinonnettomuuden riskin (vrt. Ukrainalainen venäläisen miehityksen alainen Zaporizžjan ydinvoimala). Hiilivoimala ei ole muuta yhteiskuntaa haavoittuvaisempi aseelliselle uhalle.
- Kivihiilivoimala tarvitsee n. 100 000 kertaa enemmän polttoainetta kuin vastaavantehoinen ydinvoimala. Tämän polttoainemäärän kuljetuksesta aiheutuu omat päästönsä ja onnettomuusriskinsä.
- Ydinjäte. Ydinvoimala tuottaa ydinjätettä, jonka käsittely ja loppusijoitus vaatii erityistoimenpiteitä. Hiilivoimala päästää enimmäkseen jätteensä ilmakehään ja jäljelle jäävän tuhkan käsittely ei vaadi samanlaista varovaisuutta kuin ydinjätteen. Voi olla, että tästä ei saa pistettä, koska voidaan tulkita, että tämä ei ole käytön aikainen riski.

3 p. (yht. 15 p.)

Pisteytyksestä: Piste kustakin kohdasta, eli täysiin pisteisiin vaaditaan kolme lisattua asiaa.

Eroja ydinvoimalan ja hiilivoimalan haitoissa ja riskeissä, jotka eivät suoraan toteudu niiden käytön aikana:

- Ydinpolttoaineeseen tarvittavan uraanin louhinta ja kivihiilen louhinta aiheuttavat merkittävät ympäristöhaitat. Kivihiiltä tarvitaan paljon enemmän kuin urania samantehtoisessa ydinvoimalassa, joten kivihiilen louhiminen ja kuljettaminen käyttöpaikalle aiheuttaa enemmän päästöjä ja haittaa kuin vastaavatehoinen ydinvoimalan tarvitseman uraanin louhinta ja kuljetus.

- Uraani ja kivihiili ovat jakautuneet epätasaisesti maapallolle. Energian saatavuus on yksi konfliktien syntyistä. Maapallon uraanivarat ovat harvemman valtion hallinnassa kuin kivihiilivarat.
- Ydinpolttoainetta varten louhittu uraani pitää väkevöittää. Luonnonurainissa eli louhittavassa uraani-isotoopin 235 osuus on noin 0,7 %. Ydinvoimalan käyttöä varten uraani väkevöitetään niin, että tämän isotoopin osuus nousee noin kolmeen – viiteen prosenttiin voimalaitostyyppistä riippuen. Väkevöintilaitoksella voidaan tuottaa myös asekelpoista uraania. Ydinpolttoaineen tuottaminen on siis mahdollisesti kytköksissä kykyyn tuottaa ydinaseita.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

9. Aurinkovoimala (20 p.)

Aineisto:

9. A [Kuva: Aurinkovoimalan tuottama sähköteho 3.8.2022](#)
9. B [Taulukko: Mittaustulokset sähkötehosta viitenä eri päivänä](#)

Kuvassa [9.A](#) on esitetty eteläsuomalaisen omakotitalon katolla olevista 18 aurinkopaneelista muodostuvan pienvoimalan tuottama sähköteho 3.8.2022. Kuvasta voidaan havaita, että teho vaihtelee nopeasti paneeleihin osuvan valon määrän mukaan. Taulukossa [9.B](#) on esitetty aurinkopaneelien tuottama sähköteho ajan funktiona keskiyöstä alkaen useana päivänä samalla viikolla.

- 9.1 Aurinkopaneelien energiantuotanto riippuu kellonajasta. Ilmeisin tähän vaikuttava asia on se, että elokuussa aurinko nousee kello 5:n aikoihin ja laskee kello 22:n aikoihin. Mainitse kolme muuta asiaa, jotka vaikuttavat siihen, että energiantuotanto muuttuu vuorokauden mittaan. (3 p.)
- 9.2 Kuinka paljon energiaa tällä pienvoimalalla pystyisi enimmillään tuottamaan yhdessä vuorokaudessa elokuun alussa? Laadi taulukon [9.B](#) perusteella sopiva graafinen esitys, josta määrität enimmillään tuotettavissa olevan energian. (9 p.)
- 9.3 Mihin aikaan päivästä ja kuinka pitkällä aikavälillä paneelien energiantuotanto olisi suurimmillaan osatehtävän 9.2 mukaisessa ideaalitilanteessa? (4 p.)
- 9.4 Valmistajan antamien tietojen mukaan aurinkopaneelit pystyvät muuttamaan 19 % niihin osuvasta auringon säteilyenergiasta sähköenergiaksi. Mainitse kaksi seikkaa, jotka vaikuttavat siihen, että kaikkea paneeleihin osuvaa säteilyenergiaa ei voida muuttaa sähköenergiaksi. (4 p.)

Ratkaisu.

- 9.1 Aurinkopaneelien energiantuotanto on riippuvainen säästä. Pilvisellä tai sateisella säällä osa Auringon säteilystä heijastuu, absorboituu tai siroaa pilvipeitteen tai sadepisaroiden vaikutuksesta, jolloin aurinkopaneeliin osuvan säteilyn intensiteetti on pienempi. 1 p. (yht. 1 p.)

Auringon sijainti taivaalla vaikuttaa myös aurinkopaneelien tuottamaan sähkötehoon. Auringon ollessa suoraan aurinkopaneelin yläpuolella sen säteily kulkee lyhyemmän matkan ilmakehän läpi kuin jos Aurinko on lähellä horisonttia. Mitä lyhyemmän matkan Auringon valo kulkee Maan ilmakehän läpi, sitä pienempi osa valon intensiteetistä absorboituu tai siroaa ilman vaikutuksesta.

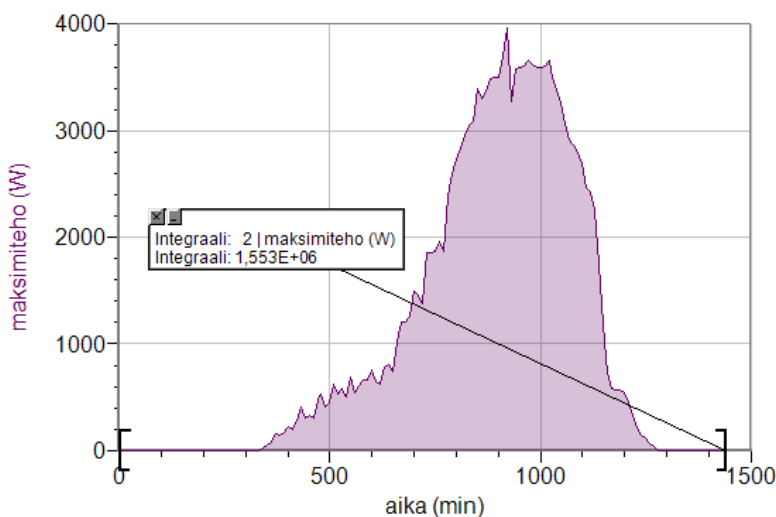
Lisäksi aurinkopaneelin tuottama teho riippuu siitä, missä kulmassa Auringon säteily osuu paneeliin. Mitä suurempi kulma on säteiden kulkusuunnan ja paneelin pinnan normaalin välillä, sitä suuremmalle pinta-alalle säteily on jakautunut ja sitä pienempi on paneeliin osuvan säteilyn intensiteetti. 1 p. (yht. 2 p.)

Myös Auringon ja aurinkopaneelin väliset esteet kuten puut ja rakennukset pienentävät paneeliin osuvan valon intensiteettiä jolloin tuotettu teho on pienempi.

1 p. (yht. 3 p.)

Paneelin sijoituskohta ja se, mihin ilmansuuntaan paneeli on suunnattu vaikuttavat paneelin tuottamaan sähkötehoon eri kellonaikoina. Pohjoisella pallonpuoliskolla Aurinko on päivällä eteläisellä puolella taivasta, joten pohjoisella pallonpuoliskolla sijaitsevan etelään suunnatun paneelin teho on suurempi kuin pohjoiseen suunnatun.

- 9.2 Pienvoimalan tuottama sähköteho vaihtelee kellonajan ja päivän mukaan taulukon 9.B mukaisesti. Taulukkolaskentaohjelmalla voidaan vertailla hetkellisen tehon arvoja eri päivinä, ja valita eri päivien arvoista suurin kullekin ajanhetkelle. Näin saadaan elokuun alun vuorokauden maksimitehon kuvaaja. 1 p. (yht. 4 p.)
- Graafisella integroinnilla saadaan maksimaalinen vuorokauden aikana tuotettu energia.



4 p. (yht. 8 p.)

Vuorokauden aikana tuotetun energian maksimiksi elokuun alun aikana saadaan:

$$\begin{aligned} E_{\max} &= 1,553 \cdot 10^6 \text{ W} \cdot \text{min} \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)}) \\ &= 1,553 \cdot 10^6 \text{ W} \cdot 60 \text{ s} \\ &= 9,318 \cdot 10^7 \text{ J} \quad (2 \text{ p. (yht. 11 p.)}) \\ &= 93,18 \text{ MJ} \\ &\approx 93 \text{ MJ} \quad (1 \text{ p. (yht. 12 p.)}) \end{aligned}$$

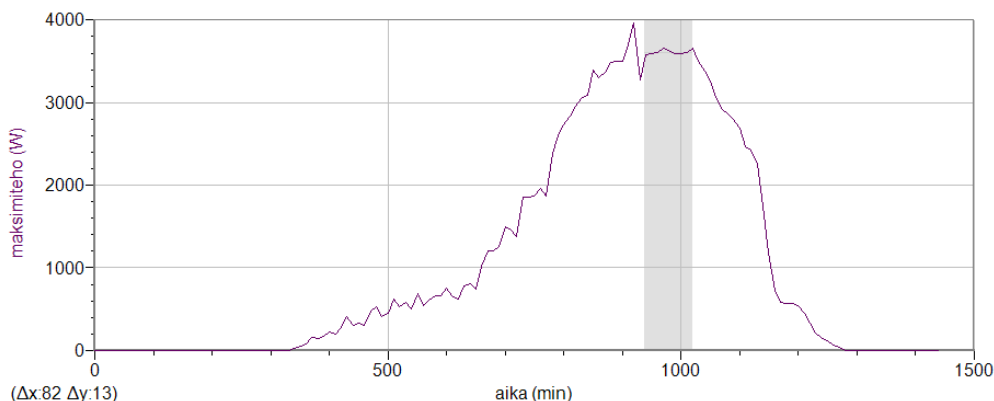
Kilowattitunteina:

$$\begin{aligned} E_{\max} &= \frac{9,318 \cdot 10^7}{3,6 \cdot 10^6} \text{ kWh} \\ &= 25,8833 \dots \text{ kWh} \\ &\approx 26 \text{ kWh} \end{aligned}$$

Vastaus: Pienvoimala pystyy enimmillään tuottamaan energiaa yhdessä vuorokaudessa elokuun alussa 93 MJ.

Kuvaajan ja pinta-alaintegraalin mahdollisen epätarkkuuden vuoksi vastauksen esitystarkkuudeksi valittiin kaksi merkitsevää numeroa. YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 27.3.2024) vastaus on annettu kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella, joten todennäköisesti se on myös hyväksyttävä tarkkuus.

- 9.3 Maalataan edellisessä alakohdassa tehdyn maksimitehon kuvaajasta aikaväli, jolla pienvoimalan teho on suurimmillaan. Taulukosta nähdään, minkä ajanhetkien välillä maalattu alue on. Nähdään, että suurin teho on ajanhetkien 940 min ja 1020 min välissä:



1 p. (yht. 13 p.)

Tehtävänannon mukaan ilmoitetut ajanhetket ovat minuutteina keskiyöstä alkaen. Lasketaan, mitä kellonaikoja nämä ajanhetket vastaavat:

$$\begin{aligned}
 940 \text{ min} &= \frac{940}{60} \text{ h} \\
 &= 15,66 \dots \text{ h} \\
 &= 15 \text{ h} + 0,66 \dots \cdot 60 \text{ min} \\
 &= 15 \text{ h } 40 \text{ min}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1020 \text{ min} &= \frac{1020}{60} \text{ h} \\
 &= 17 \text{ h}
 \end{aligned}$$

1 p. (yht. 14 p.)

Ideaalitilanteessa suurin teho vuorokauden aikana on kellonaikojen 15:40 ja 17:00 välillä. 1 p. (yht. 15 p.) Aurinkopaneeleiden tuottama teho saavuttaa siis maksiminsa iltapäivällä puoli neljän jälleen, ja maksimitheho kestää noin puolentoista tunnin ajan. 1 p. (yht. 16 p.)

Kuvaajan muodon vuoksi suurimman tehon aikavälin valinnassa on tulkinnanvaraa. Todennäköisesti myös hieman yllä esitetystä poikkeavat aikavälit ovat hyväksyttäviä. YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 27.3.2024) oli valittu väli 15:00 - 16:30 ja mainittu että suurimman tehon väli voi mahdollisesti olla tätä laajempikin. Suurimman tehon aikavälin voisi kuvaajan perusteella tulkita alkavan esim. jo ajanhetkellä 880 min, eli hieman ennen kuvaajan suurta hetkellistä piikkiä.

9.4 Auringon valon osuessa aurinkopaneeleihin osa säteilystä heijastuu paneelin pinnasta ilmaan. Heijastunutta valoa ei voida muuntaa sähköenergiaksi.

Auringon valo koostuu eri aallonpituuksista. Jos paneeliin osuvan fotonin aallonpituus on liian suuri, sen energia ei riitä tuottamaan paneelin fotodiodiin varauksenkuljettajia (vapaata elektronia ja aukkoa). Tällöin fotonin energiasta ei saada sähköä vaan se joko ei absorboidu tai sen energia menee kokonaan lämmöksi.

Lyhytaaltoisen fotonin absorboituessa vain varauksenkuljettajien tuottamiseen tarvittava osa energiasta muuntuu sähköenergiaksi, ja loput energiasta muuntuu elektronin liike-energiaksi ja lopulta lämmöksi.

4 p. (yht. 20 p.)

Pisteytyksestä: 2 p / oikea vaikuttava asia.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

10. Autorata (20 p.)

Aineisto:

10. A [Video: Auto radalla](#)

10. B [Kuva: Auto lentoradan korkeimmassa kohdassa](#)

Leikkiauto kulkee autoradalla, jossa on kolme ympyränmuotoista pystysuoraa silmukkaa (video [10.A](#)). Auto laukaistaan matkaan. Sopivalla alkuvauhdilla se kiertää kaikki kolme silmukkaa ja lennähtää sen jälkeen hyppyrystä muoviastiaan. Silmukoiden halkaisijat ovat 51 cm, 38 cm ja 25 cm. Leikkiauton massa on 37 g.

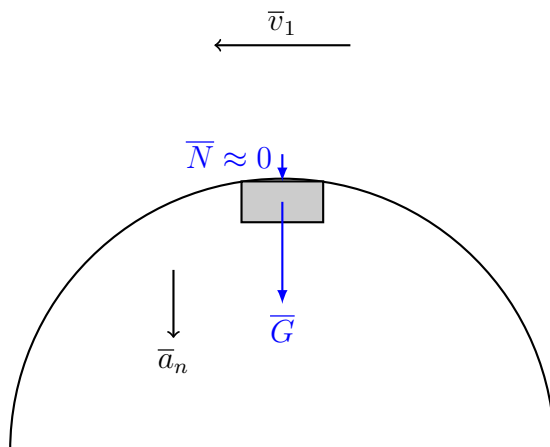
- 10.1 Auto kulkee autoradan korkeimmassa kohdassa ylösalaisin mutta pysyy radalla. Mikä on sen pienin mahdollinen nopeus tässä kohdassa? (6 p.)
- 10.2 Auto lähetetään radalle nopeudella $3,1 \text{ m/s}$. Radan läpi kulkenut auto lennähtää hyppyrystä 32 cm:n korkeuteen ja laskeutuu takaisin radan tasolle 15 cm:n etäisyydelle lentoradan korkeimmasta kohdasta (kuva [10.B](#)). Autoon ilmalennon aikana kohdistuvat vastusvoimat voidaan olettaa merkityksettömiksi, joten hyppyn aikana auton nopeuden vaakasuora komponentti pysyy vakiona, mutta pystysuora komponentti muuttuu tasaisesti. Kuinka suuri oli autoon kohdistuvien vastusvoimien tekemä työ koko radan matkalla? (7 p.)
- 10.3 Eri leikkiautot toimivat radalla hieman eri tavalla. Valitaan leikkiauto, jonka alkuvauhti ja vastusvoimat ovat sellaiset, että auto ohittaa ensimmäisen ja toisen silmukan korkeimmat kohdat pienimmillä mahdollisilla nopeuksilla. Pääseekö leikkiauto myös kolmannen silmukan läpi? Voit olettaa, että autoon vaikuttavat vastusvoimat ovat keskimäärin yhtä suuria radan kaikissa silmukoissa. (7 p.)

Ratkaisu.

10.1

$$d_1 = 51 \text{ cm} = 0,51 \text{ m}$$

Silmukoita ajaessaan auto on ympyräliikkeessä.



Autolla on keskeiskiihtyvyys ympyräliikkeen keskipistettä kohti. 1 p. (yht. 1 p.) Muodostetaan autolle Newtonin II:n lain mukainen liikeyhtälö ja ratkaistaan autolla lakipisteessä oleva nopeus.

$$\Sigma \bar{F} = m \bar{a}_n$$

$$\bar{G} + \bar{N} = m \bar{a}_n$$
1 p. (yht. 2 p.)

$$G + N = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Lausekkeesta huomataan, että pienin nopeus, jolla auto pysyy radalla, saadaan, kun yhtälön vasen puoli eli voimien summa on pienin. Painovoimaa ei voida pienentää, mutta tukivoima voi olla nolla 1 p. (yht. 3 p.) siinä rajatapauksessa, jossa auto ajaa rataa niin hiljaa, että renkaat juuri ja juuri hipovat radan pintaa.

$$G = m \cdot \frac{v_1^2}{r_1} \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} \quad \| r_1 = \frac{d_1}{2}$$

$$mg = m \cdot \frac{v_1^2}{\frac{d_1}{2}} \quad \| \cdot \frac{d_1}{2}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{d_1}{2} \cdot g}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{0,51 \text{ m}}{2} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}$$

$$v_1 = 1,58162 \dots \text{ m/s} \approx 1,6 \text{ m/s} \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)}$$

Vastaus: Auton pienin mahdollinen nopeus silmukan 1 ylimmässä asemassa on $1,6 \text{ m/s}$.

Pisteytyksestä:

- Todettu, että auto on ympyräliikessä ja sillä on keskeiskiihtyvyys ympyräliikkeen keskipistettä kohti 1 p.
- Muodostettu Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö joko vektori- tai skalaarimuodossa 1 p.
- Perusteltu, että tukivoima on tehtävän rajatapauksessa nolla 1 p.
- Saatu oikea lauseke nopeudelle sijoittamalla keskeiskiihtyvyyden ja painovoiman kaavat 1 p.
- Oikea vastaus oikealla tarkkuudella 2 p.

10.2

$$v_0 = 3,1 \text{ m/s}$$

$$m = 37 \text{ g} = 0,037 \text{ kg}$$

$$h = 32 \text{ cm} = 0,32 \text{ m}$$

$$x = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}$$

Koska lennon aikaisia vastusvoimia ei huomioida, auton vaakasuuntainen nopeus pysyy vakiona lennon ajan. Lakipisteestä takaisin maan pinnalle putoamisen aikana auton vaakasuuntainen siirtymä on x . Tasaisen liikkeen kaavasta saadaan vaakasuuntaisen nopeuden v_x lausekkeeksi

$$v_x = \frac{x}{t}, \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)} \quad (2)$$

missä t on lakipisteestä radan tasolle putoamiseen kuluva aika.

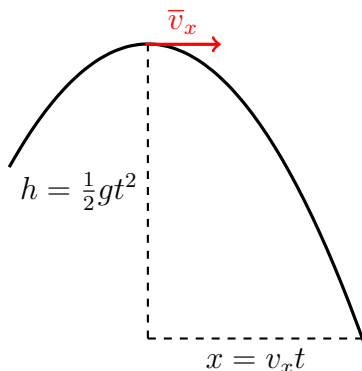
Edelleen lakipisteestä maan pinnalle mitattuna pystysuunnassa auton siirtymä on h . Pystysuunnassa autoon vaikuttaa painovoima, joka antaa autolle maan putoamiskiihtyvyyden suuruisen kiihtyvyyden kohti maan pintaa. Tasaisesti kiihtyvän liikkeen kaavasta saadaan auton pystysuuntaisen siirtymän h lausekkeeksi

$$x = \underbrace{x_0}_0 + \underbrace{v_0 t}_0 + \frac{1}{2}at^2 \quad \| x = h, \quad a = g$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)} \quad (3)$$

missä t on myös lakipisteestä radan tasolle putoamiseen kuluva aika.

Kuva lentoradasta. Kuvaa ei vaadita ratkaisussa.



Ratkaistaan yhtälöstä (3) lentoaika t .

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad || \cdot 2$$

$$2h = gt^2 \quad || : g$$

$$\frac{2h}{g} = t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Sijoitetaan yhtälöön (2) ja sievennetään auton vaakasuuntaisen nopeuden v_x lauseke.

$$v_x = \frac{x}{t}$$

$$v_x = \frac{x}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

$$v_x = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

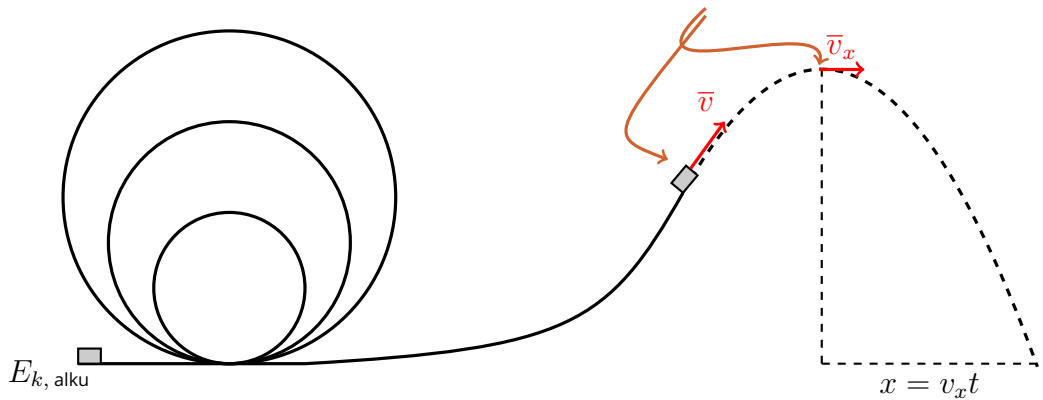
$$v_x = \sqrt{\frac{gx^2}{2h}}$$

$$v_x = \sqrt{\frac{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (0,15 \text{ m})^2}{2 \cdot 0,32 \text{ m}}}$$

$$v_x = 0,58726 \dots \text{ m/s}$$

Aivan radan alussa autolla on vain liike-energiaa. Juuri ennen radasta irtoamista autolla on sekä liike- että potentiaalienergiaa. Lennon aikana vastusvoimat eivät tee työtä, joten auton mekaaninen energia lentoradan lakipisteessä on sama kuin radasta irtoamisen hetkellä. Lakipisteessä autolla on vain vaakasuuntaista nopeutta v_x .

Näiden pisteiden välillä auton mekaaninen energia säilyy.



Kuvaa ei vaadita vastauksessa.

Sovelletaan mekaniikan energiaperiaatetta 1 p. (yht. 9 p.) ja ratkaistaan vastusvoimien tekemä työ W radalla.

$$E_{k, \text{alku}} - W = E_{p, \text{lakipiste}} + E_{k, \text{lakipiste}} \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - W = mgh + \frac{1}{2}mv_x^2$$

$$W = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh - \frac{1}{2}mv_x^2 \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 0,037 \text{ kg} \cdot (3,1 \text{ m/s})^2 - 0,037 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,32 \text{ m}$$

$$- \frac{1}{2} \cdot 0,037 \text{ kg} \cdot (0,58726 \dots \text{ m/s})^2$$

$$W = 0,055254 \dots \text{ J} \approx 55 \text{ mJ} \quad \text{2 p. (yht. 13 p.)}$$

Vastaus: Autoon kohdistuvien vastusvoimien tekemä työ koko radan matkalla on noin 55 mJ.

Pisteytyksestä:

- Sovellettu tasaisen liikkeen kaavaa auton vaakasuoralle siirtymälle putoamisessa 1 p.

- Sovellettu tasaisesti kiihtyvän liikkeen kaavaa auton pystysuuntaiselle siirtymälle putoamisessa 1 p.
- Sovellettu mekaniikan energiaperiaatetta perusteluineen 2 p.
- Lopullinen ratkaisu lauseke työlle 1 p.
- Oikea vastaus oikealla tarkkuudella 2 p.

10.3

$$d_1 = 51 \text{ cm} = 0,51 \text{ m}$$

$$d_2 = 38 \text{ cm} = 0,38 \text{ m}$$

$$d_3 = 25 \text{ cm} = 0,25 \text{ m}$$

Ratkaisuvaihtoehto 1

Kohdassa 10.1 ratkaistiin lauseke (1) nopeudelle silmukan lakipisteessä, jolla auto juuri ja juuri pääsee ylimmän silmukan irtoamatta radan pinnasta. Sovelletaan samaa lauseketta ja ratkaistaan nopeus silmukan lakipisteessä, jolla auto pääsee toisen ja kolmannen silmukan irtoamatta radan pinnasta.

$$v_2 = \sqrt{\frac{d_2}{2} \cdot g}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{0,38 \text{ m}}{2} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = 1,36524 \dots \text{ m/s}$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{d_3}{2} \cdot g}$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{0,25 \text{ m}}{2} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = 1,10736 \dots \text{ m/s}$$

Tässä nopeus v_3 on siis nopeus, joka autolla on oltava kolmannen silmukan lakipisteessä, jotta se pääsee kolmannen silmukan irtoamatta radan pinnasta. Seuraavaksi tutkitaan, onko auton todellinen nopeus suurempi vai pienempi kuin tämä tarvittava nopeus.

Valitaan potentiaalienergian nollataso nyt silmukan 2 ylimpään kohtaan. Tällöin auton korkeus silmukan 1 ylimmässä kohdassa on

$$\begin{aligned}\Delta h_1 &= d_1 - d_2 \\ &= 0,51 \text{ m} - 0,38 \text{ m} = 0,13 \text{ m}.\end{aligned}$$

Sovelletaan mekaniikan energiaperiaatetta ja ratkaistaan vastusvoimien tekemä työ, kun auto ajaa silmukan 1 ylimmästä kohdasta silmukan 2 ylimpään kohtaan.

$$E_{k1} + E_{p1} - W_{12} = E_{k2} \quad \text{1 p. (yht. 14 p.)}$$

$$W_{12} = E_{k1} + E_{p1} - E_{k2}$$

$$W_{12} = \frac{1}{2}mv_1^2 + mg\Delta h_1 - \frac{1}{2}mv_2^2$$

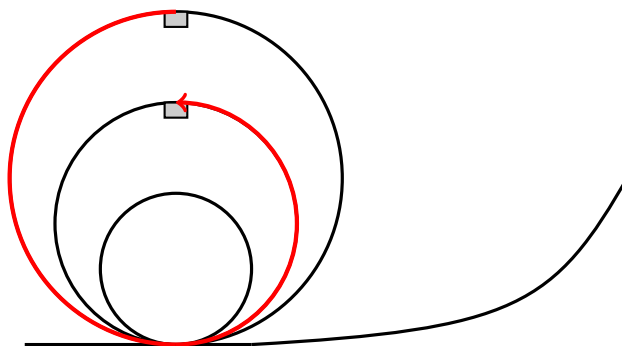
$$\begin{aligned}W_{12} &= \frac{1}{2} \cdot 0,037 \text{ kg} \cdot (1,58162 \dots \text{ m/s})^2 + 0,037 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,13 \text{ m} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot 0,037 \text{ kg} \cdot (1,36524 \dots \text{ m/s})^2\end{aligned}$$

$$W_{12} = 0,05898 \dots \text{ J}$$

Tehtävänannon mukaan vastusvoimat pysyvät likimain vakiona kussakin silmukassa. Lasketaan vastusvoimien suuruus työn lausekkeesta

$$W_{12} = F_v s_{12} \quad \text{1 p. (yht. 15 p.)},$$

missä s_{12} on matka, jonka auto kulkee ajaessaan silmukan 1 ylimmästä kohdasta silmukan 2 ylimpään kohtaan:



Kuvaa ei vaadita ratkaisussa.

Auton kulkema matka on puolet silmukan 1 piiristä ja puolet silmukan 2 piiristä.

$$s_{12} = \frac{\pi d_1}{2} + \frac{\pi d_2}{2} \quad \text{1 p. (yht. 16 p.)}$$

$$s_{12} = \frac{\pi}{2}(d_1 + d_2)$$

Vastusvoiman suuruudeksi saadaan

$$F_v = \frac{W_{12}}{s_{12}} \quad (4)$$

Nyt sama vastusvoima tekee työtä, kun auto ajaa silmukan 2 lakipisteestä silmukan 3 lakipisteeseen. Nyt auton kulkema matka on puolet silmukan 2 piiristä ja puolet silmukan 3 piiristä.

$$s_{23} = \frac{\pi d_2}{2} + \frac{\pi d_3}{2}$$

$$s_{23} = \frac{\pi}{2}(d_2 + d_3)$$

Merkitään matkalla s_{23} tehtyä työtä W_{23} :llä. Tämä työ on

$$W_{23} = F_v s_{23} \quad (5)$$

Yhdistetään lausekkeet (4) ja (5) merkitsemällä vastusvoimat F_v yhtä suuriksi, jolloin saadaan työlle W_{23} lauseke

$$\frac{W_{12}}{s_{12}} = \frac{W_{23}}{s_{23}}$$

$$W_{23} = W_{12} \cdot \frac{s_{23}}{s_{12}}.$$

Sijoitetaan s_{12} ja s_{23} lausekkeet.

$$W_{23} = W_{12} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}(d_2 + d_3)}{\frac{\pi}{2}(d_1 + d_2)}$$

$$W_{23} = W_{12} \cdot \frac{d_2 + d_3}{d_1 + d_2} \quad \text{1 p. (yht. 17 p.)}$$

Valitaan nyt silmukan 3 ylin kohta potentiaalienergian nollassoksi. Auto on tällöin silmukan 2 lakipisteessä $\Delta h_2 = d_2 - d_3$ korkeudella. Mekaniikan energia-periaatteen mukaan auton nopeus silmukan 3 lakipisteessä on

$$E_{k2} + E_{p2} - W_{23} = E_{k3} \quad \text{1 p. (yht. 18 p.)}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + mg\Delta h_2 - W_{12} \cdot \frac{d_2 + d_3}{d_1 + d_2} = \frac{1}{2}mv_3^2 \quad || \cdot 2$$

$$mv_2^2 + 2mg\Delta h_2 - 2W_{12} \cdot \frac{d_2 + d_3}{d_1 + d_2} = mv_3^2 \quad || : m$$

$$v_2^2 + 2g\Delta h_2 - \frac{2W_{12}}{m} \cdot \frac{d_2 + d_3}{d_1 + d_2} = v_3^2$$

$$v_3 = (\pm) \sqrt{v_2^2 + 2g\Delta h_2 - \frac{2W_{12}}{m} \cdot \frac{d_2 + d_3}{d_1 + d_2}}$$

$$v_3 = (\pm) \sqrt{(1,36524 \dots \text{ m/s})^2 + 2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (0,38 - 0,25) \text{ m}}$$

$$- \frac{2 \cdot 0,05898770 \dots \text{ J}}{0,037 \text{ kg}} \cdot \frac{0,38 \text{ m} + 0,25 \text{ m}}{0,51 \text{ m} + 0,38 \text{ m}}$$

$$v_3 = 1,46889 \dots \text{ m/s} \quad \text{1 p. (yht. 19 p.)}$$

Huomataan, että auton todellinen nopeus on suurempi kuin silmukan 3 ajamiseen juuri ja juuri putoamatta tarvittava nopeus. Näin ollen auto pääsee silmukan 3 ympäri putoamatta. 1 p. (yht. 20 p.)

Vastaus: Auto pääsee silmukan 3 putoamatta.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Kohdassa 10.1 johdetun lausekkeen (1) mukaisesti pienin mahdollinen nopeus silmukan lakipisteessä, jolla auto pääsee silmukan ympäri riippuu silmukan halkaisijasta:

$$v_n = \sqrt{\frac{d_n}{2} \cdot g} \quad (6)$$

Koska auto kulki silmukat 1 ja 2 pienimmällä mahdollisella nopeudella, silmukan 1 lakipisteessä auton nopeus oli

$$v_1 = \sqrt{\frac{d_1}{2} \cdot g}$$

ja vastaavasti silmukan 2 lakipisteessä

$$v_2 = \sqrt{\frac{d_2}{2} \cdot g}.$$

Sovitaan potentiaalienergian nollataso silmukoiden alaosan korkeudelle. Auton mekaaninen energia silmukan 1 lakipisteessä on

$$E_{\text{mek},1} = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgd_1 \quad \text{1 p. (yht. 14 p.)}$$

$$E_{\text{mek},1} = \frac{1}{2}m \left(\sqrt{\frac{d_1}{2} \cdot g} \right)^2 + mgd_1$$

$$E_{\text{mek},1} = \frac{1}{2}m \cdot \frac{d_1}{2} \cdot g + mgd_1$$

$$E_{\text{mek},1} = \frac{5}{4}mgd_1 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{mek},1} &= \frac{5}{4} \cdot 0,037 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,51 \text{ m} \\ &= 0,23139 \dots \text{ J} \end{aligned}$$

Auton mekaaninen energia silmukan 2 lakipisteessä on vastaavasti

$$E_{\text{mek},2} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgd_2$$

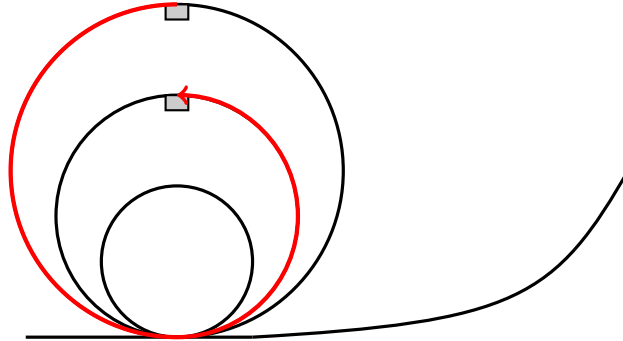
$$E_{\text{mek},2} = \frac{5}{4}mgd_2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{5}{4} \cdot 0,037 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,38 \text{ m} \\ &= 0,17241 \dots \text{ J} \end{aligned}$$

Silmukan 2 lakipisteessä auton mekaaninen energia on pienempi, koska vastusvoimat ovat tehneet työtä mekaanisten energioiden erotuksen verran. Työn kaava on

$$W_{12} = F_v s_{12} \quad \text{1 p. (yht. 15 p.)}$$

missä s_{12} on matka lakipisteestä 1 lakipisteeseen 2.



Kuvaa ei vaadita ratkaisussa.

Matka muodostuu silmukan 1 ja 2 piirien puolikkaista.

$$s_{12} = \frac{\pi d_1}{2} + \frac{\pi d_2}{2} \quad \text{1 p. (yht. 16 p.)}$$

$$s_{12} = \frac{\pi}{2} \cdot (d_1 + d_2)$$

Lasketaan keskimääräisen vastusvoiman suuruus.

$$F_v = \frac{W_{12}}{s_{12}}$$

$$F_v = \frac{E_{\text{mek},1} - E_{\text{mek},2}}{s_{12}}$$

$$F_v = \frac{E_{\text{mek},1} - E_{\text{mek},2}}{\frac{\pi}{2} \cdot (d_1 + d_2)}$$

$$F_v = \frac{0,23139 \dots \text{ J} - 0,172410 \dots \text{ J}}{\frac{\pi}{2} \cdot (0,51 \text{ m} + 0,38 \text{ m})}$$

$$F_v = 0,04219 \dots \text{ N}$$

Tehtävänannon mukaan vastusvoima on yhtä suuri eri kohdissa rataa. Tämä voima tekee työtä, kun auto ajaa toisen silmukan lakipisteestä kolmannen lakipisteeseen. Matka on tällöin silmukan 2 ja 3 piirien puolikkaiden summa.

$$s_{23} = \frac{\pi}{2} (d_2 + d_3)$$

Työ tällä matkalla on siis

$$W_{23} = F_v \cdot s_{23}$$

$$W_{23} = F_v \cdot \frac{\pi}{2}(d_2 + d_3) \quad \text{1 p. (yht. 17 p.)}$$

$$W_{23} = 0,04219 \dots \text{ N} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (0,38 \text{ m} + 0,25 \text{ m})$$

$$W_{23} = 0,04175 \dots \text{ J}$$

Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan mekaaninen kokonaisenergia silmukan 3 ylimmässä pisteessä saadaan vähentämällä työ W_{23} silmukan 2 lakipisteessä olleesta mekaanisesta energiasta. Auton mekaaninen energia silmukan 3 lakipisteessä on siis

$$E_{\text{mek},3} = E_{\text{mek},2} - W_{23} \quad \text{1 p. (yht. 18 p.)}$$

$$E_{\text{mek},3} = 0,17241 \dots \text{ J} - 0,04175 \dots \text{ J}$$

$$E_{\text{mek},3} = 0,13065 \dots \text{ J}.$$

Tutkitaan, mikä mekaanisen energian tulisi olla, jotta auto juuri ja juuri pääsee silmukan 3 ympäri putoamatta.

Lausekkeen (6) mukaan autolla on oltava lakipisteessä nopeus

$$v_3 = \sqrt{\frac{d_3}{2} \cdot g},$$

joten autolla on oltava tätä nopeutta vastaava liike-energia.

Koska auto nousee korkeudelle d_3 alustasta mitattuna, auton mekaanisen energia on siis kolmannen silmukan lakipisteessä oltava vähintään

$$E_{\text{min}} = E_{k3} + E_{p3}.$$

Yhtälön (7) perusteella mekaanisen energian lausekkeeksi tulee kolmannessa silmukassa

$$E_{\text{min}} = \frac{5}{4}mgd_3$$

$$E_{\text{min}} = \frac{5}{4} \cdot 0,037 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,25 \text{ m}$$

$$E_{\text{min}} = 0,11342 \dots \text{ J} \quad \text{1 p. (yht. 19 p.)}$$

Auto tarvitsee siis vähintään $0,11342 \dots J$:n suuruisen mekaanisen energian, jotta se pääsee silmukan 3 ympäri. Autolla on mekaanista energiaa noin $0,13065 \dots J$:n verran, joten auto pääsee silmukan 3 ympäri. 1 p. (yht. 20 p.)

Vastaus: Auto pääsee silmukan 3 ympäri putoamatta.

Ratkaisuvaihtoehto 3

Kohdassa 10.1 ratkaistiin lauseke (1) nopeudelle silmukan lakipisteessä, jolla auto juuri ja juuri pääsee ylimmän silmukan irtoamatta radan pinnasta. Saman lausekkeen perusteella miniminopeus silmukan lakipisteessä, jolla auto vielä pysyy kiinni radassa on kunkin silmukan huipulla

$$v_1 = \sqrt{\frac{d_1}{2} \cdot g} = \sqrt{r_1 g}$$

$$v_2 = \sqrt{r_2 g}$$

$$v_3 = \sqrt{r_3 g}$$

Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan vähentämällä autolla radan alussa olleesta mekaanisesta energiasta E_1 vastusvoimien autoon tekemä työ W_1 jäljelle jää auton mekaaninen energia ensimmäisen silmukan huipulla.

Sovelletaan mekaniikan energiaperiaatetta ja vertaillaan auton mekaanista energiaa radan alussa E_0 sekä auton mekaanista energiaa ensimmäisen silmukan huipulla $E_{\text{mek},1} = E_{k1} + E_{p1}$. Sovitaan potentiaalienergian nollatasoksi radan lähtöpaikka, jolloin alussa autolla on vain kineettistä energiaa.

$$E_0 - W_1 = E_{k1} + E_{p1}$$

Vastusvoimien tekemä työ on $W_1 = F_v \cdot s_1$, missä matka $s_1 = \frac{1}{2}\pi d_1 = \pi r_1$ on puolikas ensimmäisestä silmukasta.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - F_v \cdot \pi r_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mg(2r_1)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - F_v \cdot \pi r_1 = \frac{1}{2}m(r_1 g) + mg(2r_1) \quad || \cdot 2$$

$$mv_0^2 - F_v \cdot 2\pi r_1 = m(r_1 g) + 4mgr_1$$

$$mv_0^2 - F_v \cdot 2\pi r_1 = 5mgr_1 \quad \text{1 p. (yht. 14 p.)} \quad (8)$$

Mekaaninen energia ensimmäisen silmukan jälkeen eli toisen silmukan alussa on $E_{2,\text{alh}} = \frac{1}{2}mv_0^2 - F_v \cdot 2\pi r_1$. Kun verrataan vastaavasti mekaniikan energia-periaatteella auton mekaanista energiaa toisen silmukan alussa ja sen huipulla:

$$\begin{aligned}
 E_{2,\text{alh}} - W_2 &= E_{k2} + E_{p2} \\
 \frac{1}{2}mv_0^2 - F_v \cdot 2\pi r_1 - F_v \cdot \pi r_2 &= \frac{1}{2}mv_2^2 + mg(2r_2) \\
 \frac{1}{2}mv_0^2 - F_v \cdot \pi(2r_1 + r_2) &= \frac{1}{2}m(r_2g) + mg(2r_2) \quad || \cdot 2 \\
 mv_0^2 - 2 \cdot F_v \cdot \pi(2r_1 + r_2) &= m(r_2g) + 4mgr_2 \\
 mv_0^2 - F_v \cdot \pi(4r_1 + 2r_2) &= 5mgr_2 \quad \text{1 p. (yht. 15 p.)}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Yhtälöistä (8) ja (9) saadaan yhtälöpari, joka ratkaistaan laskinohjelmalla:

$$\begin{cases} F_v = 0,042\,19 \dots \text{ N} \\ v_0 = 3,782\,122 \dots \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

1 p. (yht. 16 p.)

Auton mekaaninen energia kolmannen silmukan huipulla saadaan samalla tavalla laskemalla auton mekaaninen energia kolmannen silmukan alussa $E_{3,\text{alh}}$ ja vähentämällä siitä kolmannen silmukan ylämäen matkalla vastusvoimia vastaan tehty työ W_3 :

$$\begin{aligned}
 E_{3,\text{alh}} - W_3 &= E_{3,\text{ylh}} \\
 \frac{1}{2}mv_0^2 - F_v \cdot 2\pi r_1 - F_v \cdot 2\pi r_2 - F_v \cdot \pi r_3 &= E_{3,\text{ylh}} \\
 \frac{1}{2}mv_0^2 - F_v \cdot \pi(2r_1 + 2r_2 + r_3) &= E_{3,\text{ylh}} \\
 E_{3,\text{ylh}} &= \frac{1}{2}mv_0^2 - F_v \cdot \pi(2r_1 + 2r_2 + r_3) \\
 &= \frac{1}{2}0,037 \text{ kg} \left(3,782\,122 \dots \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \\
 &\quad - 0,042\,19 \dots \text{ N} \cdot \pi(2 \cdot 0,51 \text{ m} + 2 \cdot 0,38 \text{ m} + 0,25 \text{ m}) \\
 &= 0,13065 \dots \text{ J} \quad \text{2 p. (yht. 18 p.)}
 \end{aligned}$$

Päästäkseen kolmannen silmukan läpi putoamatta auto tarvitsee mekaanista energiaa vähintään

$$\begin{aligned}
 E_{\min} &= \frac{1}{2}mv_3^2 + mg(d_3) \\
 &= \frac{1}{2}m\frac{d_3}{2}g + 2mg2r_3 \\
 &= \frac{5}{4}mgd_3 \\
 &= \frac{5}{2}0,037 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,25 \text{ m} \\
 &= 0,11342 \dots \text{ J} \quad \text{1 p. (yht. 19 p.)}
 \end{aligned}$$

Auto tarvitsee siis vähintään 0,11342... J:n suuruisen mekaanisen energian, jotta se pääsee silmukan 3 ympäri. Autolla on mekaanista energiaa noin 0,13065... J:n verran, joten auto pääsee silmukan 3 ympäri. 1 p. (yht. 20 p.)

Vastaus: Auto pääsee silmukan 3 ympäri putoamatta.

Ratkaisuvaihtoehto 4

Kohdassa 10.1 johdetun lausekkeen (1) mukaisesti pienin mahdollinen nopeus silmukan lakipisteessä, jolla auto pääsee silmukan ympäri riippuu silmukan halkaisijasta:

$$v_n = \sqrt{\frac{d_n}{2} \cdot g} \quad (10)$$

Koska auto kulki silmukat 1 ja 2 pienimmällä mahdollisella nopeudella, silmukan 1 lakipisteessä auton nopeus oli

$$v_1 = \sqrt{\frac{d_1}{2} \cdot g}$$

ja vastaavasti silmukan 2 lakipisteessä

$$v_2 = \sqrt{\frac{d_2}{2} \cdot g}$$

Auton mekaaninen energia silmukan 1 lakipisteessä on

$$E_{\text{mek},1} = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgd_1 \quad \text{1 p. (yht. 14 p.)}$$

$$E_{\text{mek},1} = \frac{1}{2}m \left(\sqrt{\frac{d_1}{2} \cdot g} \right)^2 + mgd_1$$

$$E_{\text{mek},1} = \frac{1}{2}m \cdot \frac{d_1}{2} \cdot g + mgd_1$$

$$E_{\text{mek},1} = \frac{5}{4}mgd_1 \quad (11)$$

Auton mekaaninen energia silmukan 2 lakipisteessä vastaavasti

$$E_{\text{mek},2} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgd_2$$

$$E_{\text{mek},2} = \frac{5}{4}mgd_2$$

Tällä välillä vastusvoimien tekemä työ on siis näiden mekaanisten energioiden erotus, eli

$$\begin{aligned} W_{12} &= E_{\text{mek},1} - E_{\text{mek},2} \\ &= \frac{5}{4}mgd_1 - \frac{5}{4}mgd_2 \\ &= \frac{5}{4}mg(d_1 - d_2) \quad \text{1 p. (yht. 15 p.)} \end{aligned} \quad (12)$$

Jotta auto pääsee silmukan 3 läpi putoamatta, sen mekaanisen energian täytyy vastaavasti olla silmukan 3 lakipisteessä vähintään

$$E_{\text{min}} = \frac{1}{2}mv_{3,\text{min}}^2 + mgd_3$$

$$E_{\text{min}} = \frac{5}{4}mgd_3$$

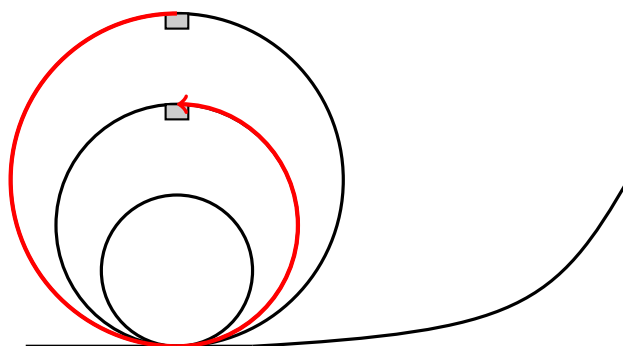
Jos auton mekaaninen energia silmukan 3 lakipisteessä eli $E_{\text{mek},3} = \frac{1}{2}mv_3^2 + mgd_3$ on suurempi tai yhtä suuri kuin edellä laskettu vähintään vaadittava energia, auto pysyy radalla putoamatta. Jos taas auton mekaaninen energia on tätä

vähimmäisarvoa pienempi, auto putoaa radalta. Ratkaistaan auton mekaanisen energian suuruus silmukan 3 lakipisteessä.

Vastusvoimat hidastavat autoa ja pienentävät sen mekaanista energiaa, kun auto liikkuu rataa pitkin. Silmukan 2 lakipisteessä auton mekaaninen energia on pienempi kuin silmukan 1 lakipisteessä, koska vastusvoimat ovat tehneet työtä mekaanisten energioiden erotuksen verran. Työn kaava on

$$W_{12} = F_v s_{12} \quad \text{1 p. (yht. 16 p.)},$$

missä s_{12} on matka lakipisteestä 1 lakipisteeseen 2.



Kuvaa ei vaadita ratkaisussa.

Matka s_{12} muodostuu silmukan 1 ja 2 piirien puolikkaista.

$$s_{12} = \frac{\pi d_1}{2} + \frac{\pi d_2}{2}$$

$$s_{12} = \frac{\pi}{2} \cdot (d_1 + d_2)$$

Vastaavasti matka s_{23} muodostuu silmukoiden 2 ja 3 puolikkaista:

$$s_{23} = \frac{\pi d_2}{2} + \frac{\pi d_3}{2}$$

Ratkaistaan seuraavaksi vastusvoimien tekemä työ silmukoiden 2 ja 3 lakipisteiden välillä. Vastusvoiman suuruus on tehtävänannon mukaan vakio koko autoradan matkalla. Silmukoiden 1 ja 2 huippujen välillä vaikuttava vastusvoima on

siis yhtä suuri kuin silmukoiden 2 ja 3 huippujen välillä. Eli

$$\begin{aligned}
 F_{v12} &= F_{v23} \\
 \frac{W_{12}}{s_{12}} &= \frac{W_{23}}{s_{23}} \\
 W_{23} &= W_{12} \cdot \frac{s_{23}}{s_{12}} \\
 &= W_{12} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}(d_2 + d_3)}{\frac{\pi}{2}(d_1 + d_2)} \\
 &= W_{12} \cdot \frac{d_2 + d_3}{d_1 + d_2}.
 \end{aligned}$$

Auton mekaaninen energia silmukan 3 huipulla on mekaniikan energiaperiaatteen mukaan

$$\begin{aligned}
 E_{\text{mek},3} &= E_{\text{mek},2} - W_{23} \quad \text{1 p. (yht. 18 p.)} \\
 &= \frac{5}{4}mgd_2 - W_{12} \cdot \frac{s_{23}}{s_{12}} \\
 &= \frac{5}{4}mgd_2 - \frac{5}{4}mg(d_1 - d_2) \cdot \frac{d_2 + d_3}{d_1 + d_2} \\
 &= \frac{5}{4}mg \left(d_2 - (d_1 - d_2) \cdot \frac{d_2 + d_3}{d_1 + d_2} \right) \\
 &= \frac{5}{4}mg \left(d_2 \left(1 + \frac{d_2 + d_3}{d_1 + d_2} \right) - d_1 \cdot \frac{d_2 + d_3}{d_1 + d_2} \right)
 \end{aligned}$$

Jos tämä on suurempi kuin radalla pysymiseen vaadittava vähimmäisenergia $E_{\text{min}} = \frac{5}{4}mgd_3$ niin auto pysyy radalla. Saadaan epäyhtälö:

$$\begin{aligned}
 E_{\text{mek},3} &\geq E_{\text{min}} \\
 \frac{5}{4}mg \left(d_2 \left(1 + \frac{d_2 + d_3}{d_1 + d_2} \right) - d_1 \cdot \frac{d_2 + d_3}{d_1 + d_2} \right) &\geq \frac{5}{4}mgd_3 \\
 \frac{5}{4}mg \left(d_2 \left(1 + \frac{d_2 + d_3}{d_1 + d_2} \right) - d_1 \cdot \frac{d_2 + d_3}{d_1 + d_2} - d_3 \right) &\geq 0
 \end{aligned}$$

Tekijä $\frac{5}{4}mg > 0$, joten yllä oleva epäyhtälö toteutuu, jos sulkulausekkeen arvo on suurempi tai yhtäsuuri kuin nolla. 1 p. (yht. 19 p.)

$$\begin{aligned} d_2 \left(1 + \frac{d_2 + d_3}{d_1 + d_2} \right) - d_1 \cdot \frac{d_2 + d_3}{d_1 + d_2} - d_3 \\ = 0,38 \text{ m} \left(1 + \frac{0,38 \text{ m} + 0,25 \text{ m}}{0,51 \text{ m} + 0,38 \text{ m}} \right) - 0,51 \text{ m} \cdot \frac{0,38 \text{ m} + 0,25 \text{ m}}{0,51 \text{ m} + 0,38 \text{ m}} - 0,25 \text{ m} \\ = 0,037977 \dots \text{ m} \end{aligned}$$

Sulkulausekkeen arvo on siis positiivinen, eli alkuperäinen epäyhtälö $E_{\text{mek},3} \geq E_{\text{min}}$ toteutuu. Auto siis pääsee silmukan 3 läpi putoamatta. 1 p. (yht. 20 p.)

Vastaus: Auto pääsee silmukan 3 ympäri putoamatta.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

11. Röntgendiffraktio ja elektronidiffraktio (20 p.)

Aineisto:

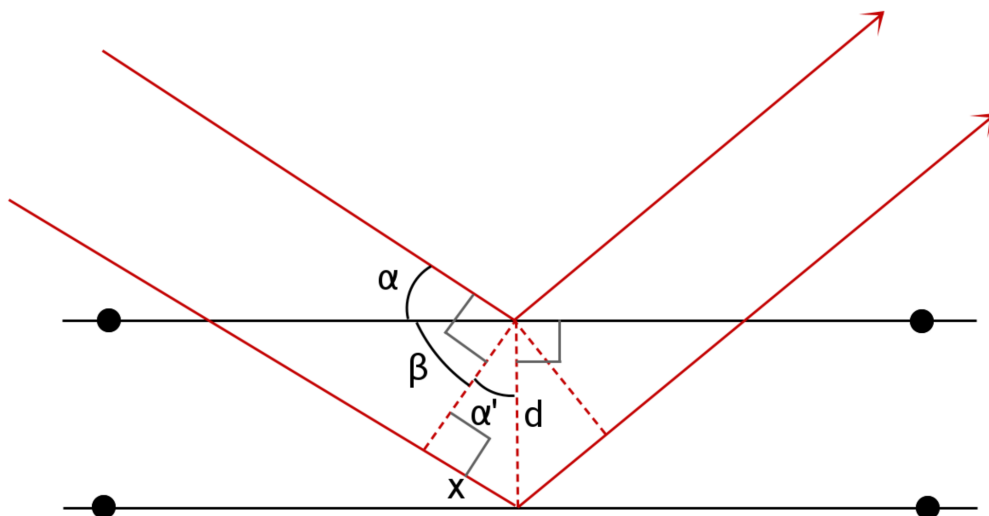
- 11. A [Teksti: Röntgendiffraktio ja elektronidiffraktio](#)
- 11. B [Kuva: Röntgendiffraktiokuvaaja](#)

Tekstissä [11.A](#) on kuvattu röntgendiffraktion ja elektronidiffraktion käyttöä kiteisen aineen rakenteen tutkimuksessa. Hyödynnä tekstiä vastatessasi osatehtäviin.

- 11.1 Johda aineiston [11.A](#) kuvaa apuna käyttäen Braggin laki $2d \sin \theta = n\lambda$, jossa θ on säteilyn ja atomitason välinen kulma, λ on säteilyn aallonpituus ja n on diffraktion kertaluku. (5 p.)
- 11.2 Kuvassa [11.B](#) on raudasta mitattu röntgendiffraktiokuvaaja, jossa näkyy kolme ensimmäisen kertaluvun ($n = 1$) intensiteettimaksimia. Mittaus tehtiin säteilyllä, jonka aallonpituus oli $\lambda = 0,15406 \text{ nm}$. Mikä intensiteettimaksimeista (a, b, c) vastaa pienintä atomitasojen välistä etäisyyttä? Määritä kyseinen etäisyys. (5 p.)
- 11.3 Eräässä röntgendiffraktiokokeessa käytetään molybdeenin niin sanottua $K\alpha$ -röntgensäteilyä, jonka energia on $17,48 \text{ keV}$. Toisessa diffraktiokokeessa käytetään röntgensäteilyn sijasta elektroneja. Määritä elektronien nopeus prosentteina valon nopeudesta, kun elektronien de Broglien aallonpituus on yhtä suuri kuin röntgensäteilyn aallonpituus. (6 p.)
- 11.4 Kuinka suuri kiihdytysjännite tarvitaan elektronien kiihdyttämiseksi osatehtävässä 11.3 kysyttyyn nopeuteen? (4 p.)

Ratkaisu.

- 11.1 Piirretään aineiston kuvan 11.A perusteella johtamisen tueksi kuva. Merkitään tulokulmaa α :lla.



Kuvassa röntgensäteet kulkevat rinnakkain vasemmanpuoleiseen katkoviivaan saakka, ja ne kulkevat jälleen rinnakkain oikeanpuoleisen katkoviivan jälkeen. Näiden katkoviivojen välissä alempi röntgensäde kulkee symmetrian nojalla kaksi kertaa kuvaan merkityn matkan x , ja ylempi röntgensäde ei kulje lainkaan. Näin ollen röntgensäteiden matkaero on $2x$. 1 p. (yht. 1 p.) Hilaan saapuvat röntgensäteet ovat samassa vaiheessa, joten hilasta sironneissa röntgensäteissä tapahtuu vahvistava interferenssi, kun matkaero on röntgensäteilyn aallonpituuden monikerta. Näin ollen saadaan kaava

$$2x = n\lambda, \quad (1)$$

missä n on kokonaisluku ja λ on röntgensäteilyn aallonpituus. 1 p. (yht. 2 p.)

Vasemmanpuoleinen katkoviiva on kohtisuorassa hilaan saapuvia röntgensäteitä vastaan, joten kulmien α ja β summa on suora kulma.

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

Toisaalta atomitasojen välimatkaa d kuvaava katkoviiva on kohtisuorassa hila-tasoa vastaan, joten myös kulmien β ja α' summa on suora kulma.

$$\beta + \alpha' = 90^\circ$$

$$\alpha' = 90^\circ - \beta$$

Sijoitetaan $\beta = 90^\circ - \alpha$.

$$\alpha' = 90^\circ - (90^\circ - \alpha)$$

$$\alpha' = 90^\circ - 90^\circ + \alpha$$

$$\alpha' = \alpha \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Näin ollen kuvan suorakulmaisen kolmion trigonometrian avulla saadaan

$$\sin(\alpha) = \frac{x}{d} \quad || \cdot d$$

$$x = d \sin(\alpha) \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} \quad (2)$$

Sijoitetaan yhtälö (2) yhtälöön (1).

$$2d \sin(\alpha) = n\lambda.$$

Vastaavasti kaavan voi kirjoittaa käyttäen aineiston kuvassa olevaa kulman symbolia θ :

$$2d \sin(\theta) = n\lambda. \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

11.2

$$n = 1$$

$$\lambda = 0,15406 \text{ nm} = 0,15406 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

Ratkaistaan atomitasojen välinen etäisyys d kohdassa 11.1 johdetusta kaavasta.

$$2d \sin(\theta) = n\lambda \quad || : (2 \sin(\theta))$$

$$d = \frac{n\lambda}{2 \sin(\theta)} \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

Tästä voidaan päätellä, että mitä suurempi kulma θ on, sitä suurempi on myös $\sin(\theta)$, ja edelleen sitä pienempi on etäisyys d , koska $\sin(\theta)$ on lausekkeessa

jakajassa. Näin ollen pienintä atomitasojen välistä etäisyyttä vastaa suurin kulma θ , eli intensiteettimaksimi c. (1 p. (yht. 7 p.)) Aineiston kuvaajasta 11.B nähdään, että intensiteettimaksimia c vastaava säteilyn ja atomitasojen välinen kulma on $\theta = 41^\circ$. (1 p. (yht. 8 p.))

Lasketaan intensiteettimaksimia c vastaava atomitasojen välinen etäisyys.

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{n\lambda}{2 \sin(\theta)} \\
 &= \frac{1 \cdot 0,15406 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{2 \cdot \sin(41^\circ)} \\
 &= 0,117413 \dots \cdot 10^{-9} \text{ m} \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)}) \\
 &= 0,117413 \dots \text{ nm} \\
 &\approx 0,12 \text{ nm} \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)})
 \end{aligned}$$

Vastaus: Pienintä atomitasojen välistä etäisyyttä vastaa intensiteettimaksimi c, ja kyseinen etäisyys on 0,12 nm.

YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 27.3.2024) kulma oli luettu tarkkuudella $41,0^\circ$, jolloin oikein pyöristetty vastaus olisi 0,117 nm. Näin ollen myös tämä vastaus melko varmasti hyväksytään.

11.3

$$\begin{aligned}
 E &= 17,48 \text{ keV} = 17,48 \cdot 10^3 \text{ eV} \\
 &= 17,48 \cdot 10^3 \cdot 1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\
 &= 2,800604 \dots \cdot 10^{-15} \text{ J} \\
 m_e &= 9,1093837 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\
 c &= 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

Röntgensäteily on sähkömagneettista säteilyä, joten sen energia on

$$E = hf, \quad (3)$$

missä h on Planckin vakio ja f on säteilyn taajuus. Toisaalta röntgensäteilyn nopeus (tyhjiössä) on valonnopeus c , joten röntgensäteilylle pätee aaltoliikkeen perusyhtälö

$$c = f\lambda, \quad (4)$$

missä λ on röntgensäteilyn aallonpituus. Ratkaistaan aallonpituus kaavoista (3) ja (4).

$$E = hf \quad || : h$$

$$f = \frac{E}{h}$$

Sijoitetaan tämä kaavaan (4).

$$c = \frac{E}{h} \cdot \lambda \quad || \cdot h$$

$$hc = E \cdot \lambda \quad || : E$$

$$\frac{hc}{E} = \lambda$$

$$\lambda = \frac{hc}{E} \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)})$$

Tehtävänannon mukaan elektronien de Broglie'n aallonpituus on

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v_e}, \quad (1 \text{ p. (yht. 12 p.)})$$

ja se on yhtä suuri kuin röntgensäteilyn aallonpituus. Muodostetaan yhtälö ja

johdetaan kaava elektronien nopeudelle.

$$\begin{aligned}
 \frac{hc}{E} &= \frac{h}{m_e v_e} \quad || : h \\
 \frac{c}{E} &= \frac{1}{m_e v_e} \quad || \cdot v_e \\
 v_e \cdot \frac{c}{E} &= \frac{1}{m_e} \quad || \cdot E \\
 v_e \cdot c &= \frac{E}{m_e} \quad || : c \\
 v_e &= \frac{E}{m_e c} \quad (1 \text{ p. (yht. 13 p.)})
 \end{aligned} \tag{5}$$

Täten elektronin nopeus prosentteina valonnopeudesta on

$$\begin{aligned}
 \frac{v_e}{c} &= \frac{E}{m_e c^2} \quad (1 \text{ p. (yht. 14 p.)}) \\
 &= \frac{2,800604 \dots \cdot 10^{-15} \text{ J}}{9,1093837 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} \\
 &= 0,0342075 \dots \quad (1 \text{ p. (yht. 15 p.)}) \\
 &= 3,42075 \dots \% \\
 &\approx 3,421 \% \quad (1 \text{ p. (yht. 16 p.)})
 \end{aligned}$$

Vastaus: Elektronien nopeus on 3,421 prosenttia valonnopeudesta.

YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 27.3.2024) vastaus oli pyöristetty kahden merkitsevän numeron tarkkuudelle arvoon 3,4%, joten luultavasti hyväksytään pyöristys kahden, kolmen ja neljän merkitsevän numeron tarkkuuteen. Laskelmassa epätarkin lähtöarvo oli energia, joka oli annettu neljän merkitsevän numeron tarkkuudella.

11.4 Merkitään kiihdytysjännitettä U :lla ja elektronin varausta Q :lla.

$$E = 2,800604 \dots \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

$$m_e = 9,1093837 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$Q = 1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Kiihdytysjännitteen tekemä työ on $W = QU$. Toisaalta työperiaatteen nojalla kiihdytystyö on yhtä suuri kuin elektronin saama liike-energia, joten

$$QU = \frac{1}{2} m_e v_e^2. \quad \text{1 p. (yht. 17 p.)} \quad (6)$$

Sijoitetaan yhtälöön (6) kohdassa 11.3 johdettu elektronin nopeuden lauseke (5) ja ratkaistaan kiihdytysjännite U .

$$QU = \frac{1}{2} m_e \left(\frac{E}{m_e c} \right)^2$$

$$QU = \frac{1}{2} m_e \cdot \frac{E^2}{m_e^2 \cdot c^2}$$

$$QU = \frac{E^2}{2m_e c^2} \quad || : Q$$

$$U = \frac{E^2}{2m_e c^2 Q} \quad \text{1 p. (yht. 18 p.)}$$

$$= \frac{(2,800604 \dots \cdot 10^{-15} \text{ J})^2}{2 \cdot 9,1093837 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 \cdot 1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}}$$

$$= 298,973 \dots \text{ V} \quad \text{1 p. (yht. 19 p.)}$$

$$\approx 299,0 \text{ V} \quad \text{1 p. (yht. 20 p.)}$$

Vastaus: Tarvitaan 299,0 V suuruinen kiihdytysjännite.

YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 27.3.2024) oli annettu vastaukseksi 298,9 V. Ero yllä olevaan vastaukseen 299,0 V johtunee siitä, että hyvän vastauksen piirteissä oli käytetty eri lähtöarvoja. Vastaukseen 299,0 V päädytään, kun käytetään MAOL-taulukoiden arvoja.

Värialliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!