

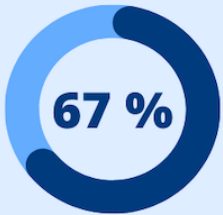
YO-MALLIVASTAUKSET

Pitkä matematiikka

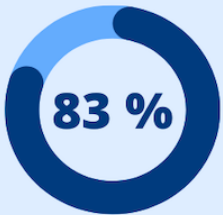
syksy 2023

Tiesitkö tämän?

Mafylaiset veivät



lääketieteen pääsykoepaikoista
keväällä 2023.



Opiskelijoista 83 % kertoi
Mafynetin lisänneen
motivaatiota opiskeluun.



Mallivastauksen tekijät

Mallivastaukset laatii Mafyn oppimateriaalitiimi, joka kehittää lukion oppimateriaaleja.

Mallivastauksen tekemiseen osallistuivat Sakke Suomalainen, Linnea Tokola, Tuulia Tokola, Jaakko Alasuvanto ja Matti Virolainen.

Palveluitamme ovat

- Mafynetti-oppimissovellus
- lääketieteen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- kauppätieteen valmennuskurssit
- ylioppilaskirjoituksiin valmentavat kurssit

Käyttöehdot

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafy.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty.

Lukion matematiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukion kursseillasi. Nämä mallivastaukset ovat Mafy Oy:n omaisuutta.



Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	8
Ratkaisu tehtävään 3	12
Ratkaisu tehtävään 4	15
Ratkaisu tehtävään 5	23
Ratkaisu tehtävään 6	28
Ratkaisu tehtävään 7	34
Ratkaisu tehtävään 8	36
Ratkaisu tehtävään 9	38
Ratkaisu tehtävään 10	44
Ratkaisu tehtävään 11	49
Ratkaisu tehtävään 12	52
Ratkaisu tehtävään 13	59

Malliratkaisut päivitetty 10. maaliskuuta 2025 klo. 12:08.

1. Yhtälö ja epäyhtälö (12 p.)

1. Ratkaise yhtälö $-7x + 3 = 17$. (3 p.)
2. Ratkaise epäyhtälö $-7x + 3 < 17$. (3 p.)
3. Ratkaise yhtälö $x^2 + x = 2$. (3 p.)
4. Ratkaise epäyhtälö $x^2 + x - 2 \leq 0$. (3 p.)

Ratkaisu.

1.1

$$-7x + 3 = 17$$

$$-7x + 3 - 3 = 17 - 3$$

$$-7x = 17 - 3$$

$$-7x = 14 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)} \quad \parallel : (-7)$$

$$\frac{-7x}{-7} = \frac{14}{-7}$$

$$x = -2 \quad \text{2 p. (yht. 3 p.)}$$

Vastaus: $x = -2$.

1.2

Ratkaisuvaihtoehto 1

$$-7x + 3 < 17$$

$$-7x + 3 - 3 < 17 - 3$$

$$-7x < 17 - 3$$

$$-7x < 14 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} \quad \parallel : (-7) \quad < 0, \text{ suunta muuttuu}$$

$$\frac{-7x}{-7} > \frac{14}{-7}$$

$$x > -2 \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)}$$

Vastaus: $x > -2$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

$$-7x + 3 < 17$$

$$-7x + 3 - 17 < 17 - 17$$

$$-7x - 14 < 0$$

$$-7x - 14 + 7x < 7x$$

$$-14 < 7x \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} \quad || : 7$$

$$\frac{-14}{7} < \frac{7x}{7}$$

$$-2 < x$$

$$x > -2 \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)}$$

Vastaus: $x > -2$.

1.3

Ratkaisuvaihtoehto 1

$$x^2 + x = 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$1 \cdot x^2 + 1 \cdot x - 2 = 0$$

Yllä olevassa yhtälössä toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ kertoimet ovat $a = 1$, $b = 1$ ja $c = -2$. Selvitetään ratkaisut toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{-1+3}{2}$$

tai

$$x = \frac{-1-3}{2}$$

$$x = \frac{2}{2}$$

tai

$$x = \frac{-4}{2}$$

$$x = 1$$

tai

$$x = -2 \quad \text{2 p. (yht. 9 p.)}$$

Vastaus: $x = 1$ tai $x = -2$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

$$x^2 + x = 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Huomataan, että

$$(x-1)(x+2) = x^2 + x \cdot 2 - 1 \cdot x - 1 \cdot 2 = x^2 + x - 2.$$

Näin ollen yhtälö saadaan muotoon

$$(x-1)(x+2) = 0. \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

Tulon nollasäännön nojalla:

$$x - 1 = 0$$

tai

$$x + 2 = 0$$

$$x = 1$$

tai

$$x = -2.$$

2 p. (yht. 9 p.)

Vastaus: $x = 1$ tai $x = -2$.

Ratkaisuvaihtoehto 3

$$x^2 + x = 2.$$

Kyseessä on toisen asteen yhtälö, joten sillä on korkeintaan kaksi reaalilukuratkaisua. 1 p. (yht. 7 p.) Kokeilemalla huomataan, että

$$1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$(-2)^2 + (-2) = 4 - 2 = 2,$$

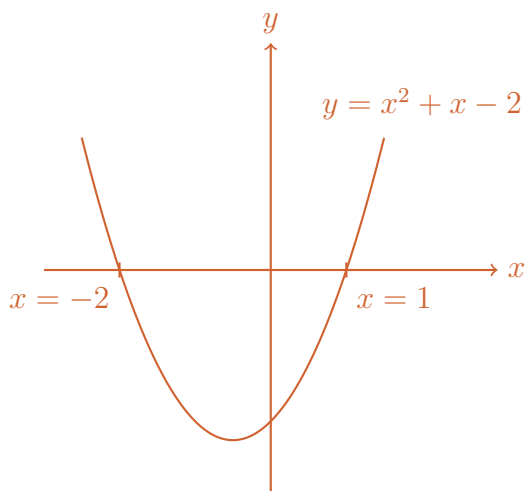
joten $x = 1$ ja $x = -2$ ovat yhtälön ratkaisut.

2 p. (yht. 9 p.)

Vastaus: $x = 1$ tai $x = -2$.

- 1.4 Käyrä $y = x^2 + x - 2$ on ylöspäin aukeava paraabeli, sillä toisen asteen termin kerroin 1 on positiivinen. Täten tiedetään, että y :n arvot ovat negatiivisia nollakohtien välissä.

Lisäselityskuva:



Kohdassa 1.3 nollakohdiksi saatiin $x = 1$ ja $x = -2$. 2 p. (yht. 11 p.) Näin ollen epäyhtälön

$$x^2 + x - 2 \leq 0$$

ratkaisu on $-2 \leq x \leq 1$. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: $-2 \leq x \leq 1$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

2. Tason pisteitä (12 p.)

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria. Kunkin vastauksen maksimipituus on 10 merkkiä. Vastaukset arvostellaan tietokoneavusteisesti ja ohjeiden noudattamatta jättäminen voi johtaa pistevähennyksiin.

Määritä seuraavien pisteiden koordinaatit, jotka ovat kokonaislukuja. Anna kaikissa osatehtävissä pelkkä vastaus ilman välilyöntejä, välivaiheita tai perusteluja, esimerkiksi muodossa $(-5, 5)$ eikä $(-5, 5)$ tms.

2.1. Piste, jossa suora $y = 3x + 7$ leikkaa y -akselin. (2 p.)

$$(x,y) = \boxed{}$$

2.2. Pisteiden $(0,0)$ ja $(6,8)$ välisen janan keskipiste. (2 p.)

$$(x,y) = \boxed{}$$

2.3. Suorien $x + y = 0$ ja $2x + 5y = 3$ leikkauspiste. (2 p.)

$$(x,y) = \boxed{}$$

2.4. Käyrän $xy = 6$ piste, jonka y -koordinaatti on 3. (2 p.)

$$(x,y) = \boxed{}$$

2.5. Ympyrän $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ keskipiste. (2 p.)

$$(x,y) = \boxed{}$$

2.6. Paraabelin $y = (x - 3)^2 + 1$ huippupiste. (2 p.)

$$(x,y) = \boxed{}$$

Ratkaisu.2.1 (0,7) 2 p. (yht. 2 p.)

Ratkaisutapa 1: Suora leikkaa y -akselin kohdassa, jossa x -koordinaatti on nolla. Suoran $y = kx + b$ vakiotermi b kertoo suoran ja y -akselin leikkauspisteen y -koordinaatin. Tehtävän suoran tapauksessa vakiotermi on 7, joten piste, jossa suora leikkaa y -akselin, on (0,7).

Ratkaisutapa 2: Suora leikkaa y -akselin kohdassa, jossa x -koordinaatti on nolla. Sijoitetaan $x = 0$ suoran yhtälöön ja selvitetään y -koordinaatti.

$$y = 3 \cdot 0 + 7 = 7$$

Näin ollen piste, jossa suora leikkaa y -akselin, on (0,7).

2.2 (3,4) 2 p. (yht. 4 p.)

Kahden pisteen välisen janan keskipisteen koordinaatit ovat janan päätepisteiden koordinaattien keskiarvot. Pisteiden (0,0) ja (6,8) välisen janan keskipisteen x -koordinaatti on siis

$$\frac{0 + 6}{2} = 3$$

ja y -koordinaatti on

$$\frac{0 + 8}{2} = 4.$$

Näin ollen kysytty piste on (3,4).

2.3 (-1,1) 2 p. (yht. 6 p.)

Kahden erisuuntaisen suoran leikkauspiste on se piste (x,y) , jonka koordinaatit toteuttavat molempien suorien yhtälöt. Ratkaistaan y suoran yhtälöstä $x + y = 0$.

$$x + y = 0$$

$$y = -x.$$

Sijoitetaan $y = -x$ suoran yhtälöön $2x + 5y = 3$ ja ratkaistaan leikkauspisteen x -koordinaatti.

$$2x + 5(-x) = 3$$

$$2x - 5x = 3$$

$$-3x = 3 \quad || : (-3)$$

$$x = -1$$

Sijoitetaan $x = -1$ edellä ratkaistuun y -koordinaatin lausekkeeseen $y = -x$ ja lasketaan leikkauspisteen y -koordinaatti.

$$y = -(-1) = 1.$$

Näin ollen leikkauspiste on $(-1, 1)$.

2.4 $(2, 3)$ 2 p. (yht. 8 p.)

Tehtävässä annettiin, että y -koordinaatti on 3, joten piste on muotoa $(x, 3)$. Sijoitetaan $y = 3$ käyrän yhtälöön ja ratkaistaan x -koordinaatti.

$$x \cdot 3 = 6 \quad || : 3$$

$$x = 2.$$

Täten kysytty piste on $(2, 3)$.

2.5 $(-1, 2)$ 2 p. (yht. 10 p.)

Ympyrän yhtälö on keskipistemuodossa

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

missä (x_0, y_0) on ympyrän keskipiste ja r on ympyrän säde. Tehtävän yhtälö on

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

$$(x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = 5. \quad (1)$$

Vertaamalla keskipistemuotoisen yhtälön yleiseen muotoon, tästä nähdään, että keskipiste on $(-1, 2)$.

Jos et muistanut ympyrän yhtälön keskipistemuotoa, vastaus oli myös mahdollista päätellä muistamalla kahden pisteen välisen etäisyyden kaava, joka perustuu Pythagoraan lauseeseen. Yhtälön (1) vasen puoli esittää pisteiden (x,y) ja $(-1,2)$ välistä etäisyyttä, ja yhtälön oikea puoli on vakio, joten käyrä kuvaa siis pisteitä, jotka ovat vakioetäisyydellä pisteestä $(-1,2)$, eli toisin sanoen ympyrää, jonka keskipiste on $(-1,2)$.

2.6 (3,1) 2 p. (yht. 12 p.)

Paraabelin yhtälöstä $y = (x - 3)^2 + 1$ nähdään, että y -koordinaatti on esitetty neliön $(x - 3)^2$ ja vakion 1 summana. Neliölauseke on nolla, kun

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3,$$

ja muilla muuttujan x -arvoilla se on suurempi kuin nolla. Tästä voidaan päätellä, että kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippupiste (alin piste) on kohdassa $x = 3$. Kyseisessä kohdassa $(x - 3)^2 = 0$, joten y -koordinaatti on

$$y = 0 + 1 = 1.$$

Näin ollen huippupiste on siis $(3,1)$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

3. Minimointi (12 p.)

Määritä funktion $f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}$ pienin arvo, kun $x > 0$.

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2} = x^2 + 16x^{-2}$$

Derivoidaan f . Käytetään derivointikaavoja $D a f(x) = a D f(x)$ ja $D x^n = n x^{n-1}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x^{2-1} + 16 \cdot (-2) \cdot x^{-2-1} \\ &= 2x - 32x^{-3} \\ &= 2x - \frac{32}{x^3} \end{aligned}$$

3 p. (yht. 3 p.)

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat, kun $x > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x - \frac{32}{x^3} &= 0 \\ 2x &= \frac{32}{x^3} \quad || \cdot x^3 \\ 2x^4 &= 32 \quad || : 2 \\ x^4 &= 16 \end{aligned}$$

1 p. (yht. 4 p.)

$$x = (\pm) \sqrt[4]{16}$$

$$x = 2.$$

2 p. (yht. 6 p.)

Tehdään kulkukaavio. Selvitetään kulkukaaviota varten derivaatan merkki kohdissa $x = 1$ ja $x = 4$.

$$f'(1) = 2 \cdot 1 - \frac{32}{1^3} = 2 - 32 = -30 < 0$$

$$f'(4) = 2 \cdot 4 - \frac{32}{4^3} = 8 - \frac{32}{64} = 8 - 0.5 = 7.5 > 0$$

Kulkukaavio:

	$x = 2$	
$f'(x)$	-	+
$f(x)$		

2 p. (yht. 8 p.)

Kun $x > 0$, funktio f saa siis pienimmän arvonsa kohdassa $x = 2$. 2 p. (yht. 10 p.) Tämä pienin arvo on

$$f(2) = 2^2 + \frac{16}{2^2} = 4 + \frac{16}{4} = 4 + 4 = 8. \quad \text{2 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: Funktion f pienin arvo, kun $x > 0$, on $f(2) = 8$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}.$$

Huomataan, että

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{4}{x}\right)^2 &= x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{4}{x} + \left(\frac{4}{x}\right)^2 \\ &= x^2 + \frac{16}{x^2} - 8 \\ &= f(x) - 8 \end{aligned}$$

Näin ollen

$$f(x) = \left(x - \frac{4}{x}\right)^2 + 8. \quad \text{6 p. (yht. 6 p.)}$$

Ensimmäinen termi on neliö, joten se on aina epänegatiivinen, eli sen pienin mahdollinen arvo on nolla. Funktio f saa pienimmän arvonsa, kun ensimmäinen termi

saa pienimmän arvonsa. 2 p. (yht. 8 p.) Tutkitaan, löytyykö muuttujan x arvoa, jolla ensimmäinen termi on nolla.

$$\left(x - \frac{4}{x}\right)^2 = 0$$

$$x - \frac{4}{x} = 0$$

$$x = \frac{4}{x} \quad || \cdot x$$

$$x^2 = 4$$

$$x = (\pm) \sqrt{4}$$

$$x = 2$$

Täten funktio f saa pienimmän arvonsa, kun $x = 2$. 2 p. (yht. 10 p.) Kyseinen pienin arvo on

$$f(2) = \left(2 - \frac{4}{2}\right)^2 + 8 = 0 + 8 = 8. \quad \text{2 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: Funktion f pienin arvo, kun $x > 0$, on $f(2) = 8$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

4. Vektorit ja taso (12 p.)

Tarkastellaan vektoreita $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ ja $\vec{w} = -5\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}$.

1. Määritä vektori $\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$. (3 p.)
2. Vektorit $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ virittävät origon kautta kulkevan tason T , eli ne ovat tason suunta-vektoreita. Määritä pisteen $(6,7,1)$ etäisyys tasosta T . (9 p.)

Ratkaisu.

4.1

$$\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{w} = -5\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}$$

Määritetään vektori $\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$:

$$\begin{aligned}\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w} &= (3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) + 2 \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) - (-5\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}) \\ &= 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} + 2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k} + 5\vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{k} \\ &= 3\vec{i} + 2\vec{i} + 5\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{j} + 5\vec{j} - 2\vec{k} - 4\vec{k} - 6\vec{k} \\ &= 10\vec{i} + 10\vec{j} - 12\vec{k} \quad \text{3 p. (yht. 3 p.)}\end{aligned}$$

Vastaus: $\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w} = 10\vec{i} + 10\vec{j} - 12\vec{k}$

4.2

Ratkaisuvaihtoehto 1

Vektorit $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ virittävät origon kautta kulkevan tason T . Tason pisteen P paikkavektori on siis

$$\begin{aligned}
 \overline{OP} &= s \cdot \bar{u} + t \cdot \bar{v} \\
 &= s \cdot (3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}) + t \cdot (\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}) \\
 &= 3s\bar{i} + s\bar{j} - 2s\bar{k} + t\bar{i} + 2t\bar{j} - 2t\bar{k} \\
 &= 3s\bar{i} + t\bar{i} + s\bar{j} + 2t\bar{j} - 2s\bar{k} - 2t\bar{k} \\
 &= (3s + t)\bar{i} + (s + 2t)\bar{j} - (2s + 2t)\bar{k}, \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}
 \end{aligned}$$

missä $s, t \in \mathbb{R}$.

Pisteen $Q(6,7,1)$ paikkavektori on

$$\overline{OQ} = 6\bar{i} + 7\bar{j} + \bar{k}.$$

Täten vektori pisteestä $Q(6,7,1)$ tason pisteeseen P on

$$\begin{aligned}
 \overline{QP} &= \overline{QO} + \overline{OP} \\
 &= -\overline{OQ} + \overline{OP} \\
 &= -(6\bar{i} + 7\bar{j} + \bar{k}) + (3s + t)\bar{i} + (s + 2t)\bar{j} - (2s + 2t)\bar{k} \\
 &= -6\bar{i} - 7\bar{j} - \bar{k} + (3s + t)\bar{i} + (s + 2t)\bar{j} - (2s + 2t)\bar{k} \\
 &= (3s + t)\bar{i} - 6\bar{i} + (s + 2t)\bar{j} - 7\bar{j} - (2s + 2t)\bar{k} - \bar{k} \\
 &= (3s + t - 6)\bar{i} + (s + 2t - 7)\bar{j} - (2s + 2t + 1)\bar{k} \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}
 \end{aligned}$$

Vektorin $\overline{QP}$ pituus vastaa pisteen Q ja tason T etäisyyttä, kun vektorin $\overline{QP}$ pituus on lyhin mahdollinen. Tällöin vektori $\overline{QP}$ on kohtisuorassa tasoa T vastaan, eli toisin sanoen se on kohtisuorassa tason virittäviä vektoreita $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ vastaan. Vektorien kohtisuoruusehdon mukaan vektorit ovat kohtisuorassa, jos ja vain jos niiden pistetulo on nolla. 1 p. (yht. 6 p.)

Vektorien $\overline{QP}$ ja $\bar{u}$ kohtisuoruus:

$$\overline{QP} \cdot \bar{u} = 0$$

$$((3s + t - 6)\bar{i} + (s + 2t - 7)\bar{j} - (2s + 2t + 1)\bar{k}) \cdot (3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}) = 0$$

$$(3s + t - 6) \cdot 3 + (s + 2t - 7) \cdot 1 - (2s + 2t + 1) \cdot (-2) = 0$$

$$9s + 3t - 18 + s + 2t - 7 + 4s + 4t + 2 = 0$$

$$14s + 9t - 23 = 0 \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

(1)

Vektorien $\overline{QP}$ ja $\bar{v}$ kohtisuoruus:

$$\overline{QP} \cdot \bar{v} = 0$$

$$((3s + t - 6)\bar{i} + (s + 2t - 7)\bar{j} - (2s + 2t + 1)\bar{k}) \cdot (\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}) = 0$$

$$(3s + t - 6) \cdot 1 + (s + 2t - 7) \cdot 2 - (2s + 2t + 1) \cdot (-2) = 0$$

$$3s + t - 6 + 2s + 4t - 14 + 4s + 4t + 2 = 0$$

$$9s + 9t - 18 = 0 \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

(2)

Vähennetään yhtälöt (1) ja (2) puolittain.

$$(14s + 9t - 23) - (9s + 9t - 18) = 0$$

$$14s + 9t - 23 - 9s - 9t + 18 = 0$$

$$5s - 5 = 0$$

$$5s = 5 \quad || : 5$$

$$s = 1$$

Sijoitetaan $s = 1$ yhtälöön (2) ja ratkaistaan t .

$$9 \cdot 1 + 9t - 18 = 0$$

$$9t = 18 - 9$$

$$9t = 9 \quad || : 9$$

$$t = 1$$

1 p. (yht. 9 p.)

Pisteen P paikkavektoriksi saadaan siis

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= (3s + t)\vec{i} + (s + 2t)\vec{j} - (2s + 2t)\vec{k} \\ &= (3 \cdot 1 + 1)\vec{i} + (1 + 2 \cdot 1)\vec{j} - (2 \cdot 1 + 2 \cdot 1)\vec{k} \\ &= 4\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k},\end{aligned}$$

eli piste P on $P(4, 3, -4)$. 1 p. (yht. 10 p.)

Pisteen Q ja tason T välinen etäisyys on sama kuin pisteen Q ja pisteen P välinen etäisyys, eli

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{(6-4)^2 + (7-3)^2 + (1-(-4))^2} \quad 1 \text{ p. (yht. 11 p.)} \\ &= \sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{45} \\ &= \sqrt{9 \cdot 5} \\ &= \sqrt{3^2 \cdot 5} \\ &= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5} \quad 1 \text{ p. (yht. 12 p.)}\end{aligned}$$

Vastaus: Pisteen $(6, 7, 1)$ etäisyys tasosta T on $3\sqrt{5}$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Vektorit $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ virittävät origon kautta kulkevan tason T . Määritetään tason T normaalivektori laskemalla vektoreiden $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ ristitulo.

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

2 p. (yht. 5 p.)

Muodostetaan ristitulon lauseke ylläolevaa determinanttia apuna käyttäen.

$$\vec{n} = (-2 \cdot 1 - (-2 \cdot 2))\vec{i} - (3 \cdot (-2) - (-2 \cdot 1))\vec{j} + (3 \cdot (2) - (1 \cdot 1))\vec{k} \quad (2 \text{ p. (yht. 7 p.)})$$

$$\vec{n} = (-2 + 4)\vec{i} - (-6 - (-2))\vec{j} + (6 - 1)\vec{k}$$

$$\vec{n} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k} \quad (1 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

Taso kulkee origon kautta, eli sen normaalimuodon vakiotermi $d = 0$. Tason normaalivektorista nähdään, että tason T normaalimuoto on

$$2x + 4y + 5z = 0 \quad (2 \text{ p. (yht. 10 p.)})$$

Tason normaalimuoto on muotoa $ax + by + cz + d = 0$, missä a , b ja c ovat vakiokertoimia ja d vakiotermi. Johdetusta tason yhtälöstä voidaan lukea, että tasolle T , että $a = 2$, $b = 4$, $c = 5$ ja $d = 0$. Pisteiden etäisyys e tasosta saadaan laskettua kaavalla

$$e = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

missä a , b ja c ovat tason normaalimuodon kertoimet ja x_0 , y_0 ja z_0 pisteen koordinaatit. Pisteiden $(6,7,1)$ etäisyys tasosta T

$$\begin{aligned} e &= \frac{|2 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2}} \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)}) \\ &= \frac{|45|}{\sqrt{45}} \\ &= \sqrt{45} \\ &= \sqrt{9 \cdot 5} \\ &= \sqrt{3^2 \cdot 5} \\ &= 3\sqrt{5} \quad (1 \text{ p. (yht. 12 p.)}) \end{aligned}$$

Vastaus: Pisteiden $(6,7,1)$ etäisyys tasosta T on $3\sqrt{5}$.

Ratkaisuvaihtoehto 3

Vektorit $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ virittävät origon kautta kulkevan tason T . Mikä tahansa tason T pisteen $P(x, y, z)$ paikkavektori voidaan ilmaista tason kantavektoreiden avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v} \\ x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} &= s \cdot (3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) + t \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) \\ &= 3s\vec{i} + s\vec{j} - 2s\vec{k} + t\vec{i} + 2t\vec{j} - 2t\vec{k} \\ &= 3s\vec{i} + t\vec{i} + s\vec{j} + 2t\vec{j} - 2s\vec{k} - 2t\vec{k}\end{aligned}$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (3s + t)\vec{i} + (s + 2t)\vec{j} + (-2s - 2t)\vec{k} \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

missä $s, t \in \mathbb{R}$. Vektorien komponenttien yksikäsitteisyyden nojalla on oltava

$$\begin{cases} x = 3s + t \\ y = s + 2t \\ z = -2s - 2t \end{cases}$$

Eliminoidaan yhtälöryhmästä reaalityyppiset s ja t . Näin saadaan tason yhtälö normaalimuodossa. Ylimmästä yhtälöstä saadaan

$$t = x - 3s \quad (1)$$

Sijoitetaan saatu tulos muihin yhtälöihin:

$$\begin{cases} y = s + 2(x - 3s) \\ z = -2s - 2(x - 3s) \end{cases}$$

1 p. (yht. 5 p.)

Ratkaistaan s ylemmästä yhtälöstä.

$$\begin{aligned}y &= s + 2(x - 3s) \\ y &= s + 2x - 6s \\ s &= \frac{y - 2x}{-5} \\ s &= \frac{2x - y}{5} \quad (2)\end{aligned}$$

1 p. (yht. 6 p.)

Sijoitetaan tulokset (1) ja (2) viimeiseen yhtälöryhmän yhtälöön.

$$z = -2s - 2t$$

$$z = -2 \cdot \left(\frac{2x - y}{5} \right) - 2 \cdot (x - 3s) \quad 1 \text{ p. (yht. 7 p.)}$$

$$z = -2 \cdot \left(\frac{2x - y}{5} \right) - 2 \cdot \left(x - 3 \cdot \left(\frac{2x - y}{5} \right) \right) \quad 1 \text{ p. (yht. 8 p.)}$$

$$z = \frac{-4x + 2y}{5} - 2x + 6 \left(\frac{2x - y}{5} \right)$$

$$z = \frac{-4x + 2y}{5} - 2x + \left(\frac{12x - 6y}{5} \right) \quad || \cdot 5$$

$$5z = -4x + 2y - 10x + 12x - 6y$$

$$5z = -2x - 4y$$

$$2x + 4y + 5z = 0 \quad 2 \text{ p. (yht. 10 p.)}$$

Tason normaalimuoto on muotoa $ax + by + cz + d = 0$, missä a , b ja c ovat vakiokertoimia ja d vakiotermi. Johdetusta tason yhtälöstä voidaan lukea, että tasolle T , että $a = 2$, $b = 4$, $c = 5$ ja $d = 0$. Pisteen etäisyys d tasosta saadaan laskettua kaavalla

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

missä a , b ja c ovat tason normaalimuodon kertoimet ja x_0 , y_0 ja z_0 pisteen koordinaatit. Pisteen $(6,7,1)$ etäisyys tasosta T

$$\begin{aligned}d &= \frac{|2 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2}} \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)} \\&= \frac{|45|}{\sqrt{45}} \\&= \sqrt{45} \\&= \sqrt{9 \cdot 5} \\&= \sqrt{3^2 \cdot 5} \\&= 3\sqrt{5} \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}\end{aligned}$$

Vastaus: Pisteiden $(6,7,1)$ etäisyys tasosta T on $3\sqrt{5}$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

5. Matematiikan merkintöjä (12 p.)

Kuinka seuraavat sanalliset kuvaukset voidaan ilmaista symbolein?

Valitse parhaiten soveltuva vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 1 p. tai 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvioitavaksi, poista vastauksesi valitsemalla pudotusvalikosta tyhjä rivi.

5.1. Luvun 6 kuutiojuuri. (1 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " 6^3 ", " $\pm 6^3$ ", " 3^6 ", " $\sqrt[3]{6}$ ", " $\pm \sqrt[3]{6}$ ", " $\sqrt[6]{3}$ ".

5.2. Parilliset kokonaisluvut. (1 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $k \in \mathbb{Z}$ ", " $2k, k \in \mathbb{Z}$ ", " $2k + 1, k \in \mathbb{Z}$ ", " $k + 1, k \in \mathbb{Z}$ ", " $\frac{2}{k}, k \in \mathbb{Z}$ ".

5.3. Luvun $\frac{7}{5}$ käänteisluvun ja vastaluvun summan itseisarvo. (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $|\left(\frac{5}{7}\right)^{-1} + \left(-\frac{7}{5}\right)|$ ", " $|\frac{7}{5} + \left(-\frac{7}{5}\right)|^{-1}$ ", " $|\frac{5}{7} + \left(-\frac{7}{5}\right)|$ ", " $|\frac{5}{7}| + |-\frac{7}{5}|$ ", " $\frac{5}{7} + \frac{7}{5}$ ", " $\left(\frac{7}{5}\right)^{-1} - \frac{7}{5}$ ".

5.4. Luvut A ja B ovat suoraan verrannolliset verrannollisuuskertoimella k . (1 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $A : B = k$ ", " $A : B^{-1} = k$ ", " $A : B^{-1} = 1 : k$ ", " $A^{-1} \cdot B^{-1} = k$ ", " $AB = 1 : k$ ".

- 5.5. Kun kerrotaan kaksi samakantaista potenssia, niin eksponentit lasketaan yhteen. (1 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $x^n x^m = x^{n+m}$ ", " $x^n x^m = x^{nm}$ ", " $x^{n+m} = x^n + x^m$ ", " $x^{n+m} = x^{nm}$ ", " $(x^n)^m = x^{nm}$ ", " $(x^n)^m = x^{n+m}$ ".

- 5.6. Tuotteen lopullinen hinta, kun alkuperäistä hintaa 129 € alennetaan ensin 10 % ja alennettua hintaa myöhemmin vielä 20 %. (1 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $0,7 \cdot 129 \text{ €}$ ", " $129 \text{ €} - 10 \text{ €} - 20 \text{ €}$ ", " $(100 \% - 10 \% - 20 \%) \cdot 129 \text{ €}$ ", " $0,9 \cdot 129 \text{ €} - 0,8 \cdot 129 \text{ €}$ ", " 99 € ", " $0,8 \cdot 0,9 \cdot 129 \text{ €}$ ".

- 5.7. Lukusuoran pisteen x etäisyys pisteestä -2 on 3. (1 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $|x - 2| = 3$ ", " $|x + 3| = 2$ ", " $x^2 + (-2)^2 = 3^2$ ", " $|x - (-2)| = 3$ ", " $|x - 3| = 2$ ", " $x + 5 = 0$ ".

- 5.8. Tason pisteen (x,y) etäisyys pisteestä $(1, -3)$ on 4. (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $|x - 1| + |y + 3| = 4^2$ ", " $\sqrt{(y + 1)^2 + (x - 3)^2} = 4$ ", " $\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 3)^2} = 4$ ", " $(x,y)^2 + (1,-3)^2 = 4^2$ ", " $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4^2$ ", " $|x - 3y| = 4$ ".

5.9. Suorien $2x - 3y = 1$ ja $-x + 4y = -2$ leikkauspiste. (1 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}$ ", " $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 4y = -2 \end{cases}$ ", " $2x - 3y - 1 = -x + 4y + 2$ ", " $(x, y) = (1, -2)$ ", " $(2x - 3y) \cdot (-x + 4y) = 1 \cdot (-2)$ ", " $x + y = -1$ ".

5.10. Funktion f arvo kohdassa 2 on suurempi kuin funktion g arvo kohdassa -3 . (1 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $2 > -3$ ", " $f(x) = 2 > -3 = g(x)$ ", " $f(2) > g(-3)$ ", " $f(2) \leq g(-3)$ ", " $(f(x))^2 > (g(x))^{-3}$ ", " $f'(2) > g'(-3)$ ".

Ratkaisu.

5.1 $\sqrt[3]{6}$ 1 p. (yht. 1 p.)

Kuutiojuuri on sama kuin kolmas juuri, eli luvun 6 kuutiojuuri on $\sqrt[3]{6}$.

5.2 $2k, k \in \mathbb{Z}$ 1 p. (yht. 2 p.)

Merkintä $k \in \mathbb{Z}$ tarkoittaa, että k on kokonaisluku. Parilliset kokonaisluvut ovat jaollisia 2:lla. Näin ollen kukin parillinen kokonaisluku voidaan kirjoittaa muodossa $2k$, missä k on kokonaisluku. Täten oikea vastaus on $2k, k \in \mathbb{Z}$.

5.3 $\left| \frac{5}{7} + \left(-\frac{7}{5} \right) \right|$ 2 p. (yht. 4 p.)

Luvun $\frac{7}{5}$ käänteisluku on $\frac{5}{7}$ ja luvun $\frac{7}{5}$ vastaluku on $-\frac{7}{5}$. Näin ollen käänteisluvun ja vastaluvun summan itseisarvo on

$$\left| \frac{5}{7} + \left(-\frac{7}{5} \right) \right|$$

5.4 $A : B = k$ 1 p. (yht. 5 p.)

Jos luvut A ja B ovat suoraan verrannolliset, niiden osamäärä on vakio, ja tätä vakiota kutsutaan verrannollisuuskertoimeksi. Toisin sanoen jos A ja B ovat suoraan verrannolliset verrannollisuuskertoimella k , niiden välillä pätee joko yhtälö $A : B = k$ tai yhtälö $B : A = k$. Annetuista vaihtoehdoista yksikään ei vastaa yhtälöä $B : A = k$, joten oikea vastaus on $A : B = k$.

5.5 $x^n x^m = x^{n+m}$ 1 p. (yht. 6 p.)

Merkintä x^n on potenssi, jossa luku x on kantaluku ja luku n on eksponentti. Näin ollen kaava $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ vastaa tilannetta, missä kerrotaan kaksi samankantaista potenssia, ja eksponentit lasketaan yhteen.

5.6 $0,8 \cdot 0,9 \cdot 129 \text{ €}$ 1 p. (yht. 7 p.)

Kun alkuperäistä hintaa 129 alennetaan 10%, hinnaksi saadaan

$$(100\% - 10\%) \cdot 129 = 90\% \cdot 129 = 0,9 \cdot 129.$$

Kun tätä hintaa edelleen alennetaan 20%, lopulliseksi hinnaksi saadaan

$$(100\% - 20\%) \cdot 0,9 \cdot 129 = 80\% \cdot 0,9 \cdot 129 = 0,8 \cdot 0,9 \cdot 129.$$

5.7 $|x - (-2)| = 3$ 1 p. (yht. 8 p.)

Lukusuoralla kahden pisteen x ja y välinen etäisyys on $|x - y|$. Näin ollen pisteiden x ja -2 välinen etäisyys on $|x - (-2)|$. Tehtävän tilanteessa tämä etäisyys on 3, joten tilannetta kuvaa yhtälö $|x - (-2)| = 3$.

5.8 $\sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} = 4$ 2 p. (yht. 10 p.)

Kahden pisteen (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) välinen etäisyys on

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Näin ollen pisteen (x, y) etäisyys pisteestä $(1, -3)$ on

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - (-3))^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 3)^2}.$$

Tehtävän tilanteessa tämä etäisyys on 4, joten tilannetta kuvaa yhtälö

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} = 4$$

5.9
$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 4y = -2 \end{cases}$$
 1 p. (yht. 11 p.)

Suorien leikkauspiste (x,y) toteuttaa molempien suorien yhtälöt, joten suorien yhtälöiden muodostama yhtälöpari kuvaa niiden leikkauspistettä. Vaihtoehtoisesti oli annettu myös piste $(x,y) = (1, -2)$, joten oli kokeessa oli viisasta tarkistaa, ettei se ole oikea vastaus. Tämän voi tehdä sijoittamalla arvot $x = 1$ ja $y = -2$ suorien yhtälöihin ja tutkimalla, toteuttaako piste yhtälöt. Esimerkiksi seuraavasti voidaan huomata, että piste ei toteuta suoran $2x - 3y = 1$ yhtälöä, ja siten ei ole suorien leikkauspiste.

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 2 + 6 = 8 \neq 1$$

5.10 $f(2) > g(-3)$ 1 p. (yht. 12 p.)

Funktion f arvoa kohdassa 2 merkitään $f(2)$, ja vastaavasti funktion g arvoa kohdassa -3 merkitään $g(-3)$. Epäyhtälö $f(2) > g(-3)$ kuvaa tilannetta, jossa funktio f arvo kohdassa 2 on suurempi kuin funktion g arvo kohdassa -3 .

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

6. Appelsiinien kuoret (12 p.)

Kaupassa myydään kokonaisia appelsiineja 1,50 euron kilohinnalla ja kuorittuja appelsiineja 9,50 euron kilohinnalla. Kuorimattomien appelsiinien ympärysmitta on 25,0 cm ja kuoren paksuus 6,0 mm.

1. Kuinka suuri osuus appelsiinin tilavuudesta on kuorta? Oletetaan appelsiini palloksi ja kuori tasapaksuksi. (6 p.)
2. Mikä on kuorimistyön osuus hinnasta prosentteina? Oletetaan, että kuoren ja syötävän osan tiheys on sama ja että kuoren arvo on nolla euroa. (6 p.)

Ratkaisu.

6.1

Ratkaisuvaihtoehto 1

Käytetään alaindeksiä k kuorellisille appelsiineille ja i ilman kuorta oleville appelsiineille.

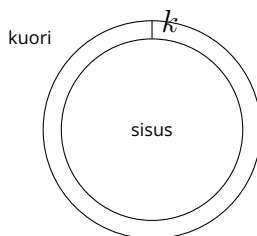
$$h_k = 1,5 \text{ e/kg}$$

$$h_i = 9,5 \text{ e/kg}$$

$$p = 25,0 \text{ cm}$$

$$k = 6,0 \text{ mm} = 0,6 \text{ cm}$$

Appelsiinin poikkileikkaus näyttää tältä:



Kuvaa ei vaadita vastauksessa.

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on suoraan verrannollinen vastinsivujen suhteen kolmanteen potenssiin. Tässä tapauksessa siis kuorittuun ja kuorimattoman appelsiinin tilavuudet ovat suoraan verrannolliset säteiden kolmanteen potenssiin. 2 p. (yht. 2 p.)

Kuorellisen appelsiinin säde r_k saadaan isoympyrän piirin kaavasta

$$p = 2\pi r_k$$

$$r_k = \frac{p}{2\pi} \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Toisaalta ilman kuoria olevan appelsiinin säde r_i saadaan kuorimattoman appelsiinin säteen ja kuoren paksuuden erotuksena:

$$r_i = r_k - k$$

$$= \frac{p}{2\pi} - k \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Sisuksen osuus koko appelsiinista saadaan verrannosta

$$\frac{V_{\text{kuoreton}}}{V_{\text{kok}}} = \frac{r_i^3}{r_k^3}$$

$$= \frac{\left(\frac{p}{2\pi} - k\right)^3}{\left(\frac{p}{2\pi}\right)^3},$$

joten kuoren osuus koko appelsiinista on tällöin

$$\frac{V_{\text{kuori}}}{V_{\text{kok}}} = 1 - \frac{\left(\frac{p}{2\pi} - k\right)^3}{\left(\frac{p}{2\pi}\right)^3}$$

$$= 1 - \frac{\left(\frac{25 \text{ cm}}{2\pi} - 0,6 \text{ cm}\right)^3}{\left(\frac{25 \text{ cm}}{2\pi}\right)^3}$$

$$= 0,38759 \dots$$

$$\approx 39 \% \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)}$$

Vastaus: Kuoren osuus appelsiinista on noin 39 %.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Käytetään alaindeksiä k kuorellisille appelsiineille ja i ilman kuorta oleville appelsiineille.

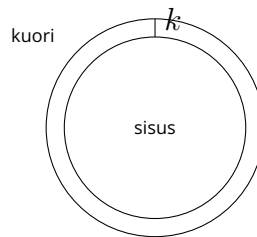
$$h_k = 1,5 \text{ e/kg}$$

$$h_i = 9,5 \text{ e/kg}$$

$$p = 25,0 \text{ cm}$$

$$k = 6,0 \text{ mm} = 0,6 \text{ cm}$$

Appelsiinin poikkileikkaus näyttää tältä:



Kuvaa ei vaadita vastauksessa.

Kuorellisen appelsiinin tilavuus on

$$V_{\text{kok}} = \frac{4}{3} \pi r_k^3$$

Kuorellisen appelsiinin säde voidaan laskea, kun piiri tunnetaan.

$$p = 2\pi r_k$$

$$r_k = \frac{p}{2\pi} \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)} \quad (1)$$

Toisaalta ilman kuoria olevan appelsiinin säde r_i saadaan kuorellisen appelsiinin säteen ja kuoren paksuuden erotuksena:

$$\begin{aligned} r_i &= r_k - k \\ &= \frac{p}{2\pi} - k \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)} \end{aligned}$$

Kuoren tilavuus saadaan koko appelsiinin tilavuuden ja sisuksen tilavuuden erotuksesta:

$$\begin{aligned} V_{\text{kuori}} &= V_{\text{kok}} - V_{\text{sisus}} \\ &= \frac{4}{3}\pi r_k^3 - \frac{4}{3}\pi(r_k - k)^3 \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)} \end{aligned}$$

Kysytty suhde on siis

$$\begin{aligned} \frac{V_{\text{kuori}}}{V_{\text{kok}}} &= \frac{\frac{4}{3}\pi r_k^3 - \frac{4}{3}\pi(r_k - k)^3}{\frac{4}{3}\pi r_k^3} \\ &= \frac{\cancel{\frac{4}{3}\pi}r_k^3 - \cancel{\frac{4}{3}\pi}(r_k - k)^3}{\cancel{\frac{4}{3}\pi}r_k^3} \\ \frac{V_{\text{kuori}}}{V_{\text{kok}}} &= \frac{r_k^3 - (r_k - k)^3}{r_k^3} \end{aligned}$$

Sijoitetaan kuorellisen appelsiinin säteen r_k lauseke yhtälöstä (1) yllä olevaan yhtälöön.

$$\begin{aligned} \frac{V_{\text{kuori}}}{V_{\text{kok}}} &= \frac{\left(\frac{p}{2\pi}\right)^3 - \left(\frac{p}{2\pi} - k\right)^3}{\left(\frac{p}{2\pi}\right)^3} \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} \\ &= \frac{\left(\frac{25 \text{ cm}}{2\pi}\right)^3 - \left(\frac{25 \text{ cm}}{2\pi} - 0,6 \text{ cm}\right)^3}{\left(\frac{25 \text{ cm}}{2\pi}\right)^3} \\ &= 0,38759 \dots \approx 39 \% \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)} \end{aligned}$$

Vastaus: Kuoren osuus appelsiinista on noin 39 %.

6.2

Ratkaisuvaihtoehto 1

$$h_i = 9,50 \text{ e/kg}$$

$$h_k = 1,50 \text{ e/kg}$$

Tarkastellaan massaa m_k kuorellisia appelsiineja. Koska kuoret vievät 38,759... prosenttia appelsiinien massasta, massasta m_k saadaan appelsiinin syötävää osaa tällöin

$$m_i = (1 - 0,38759 \dots) \cdot m_k. \quad (2 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

Kilohinnan avulla voidaan ilmoittaa näiden appelsiinimäärien hinnat:

$$H_k = m_k \cdot h_k$$

$$H_i = m_i \cdot h_i \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

Massasta m_i kuorittuja appelsiineja maksetaan siis summa H_i . Tämä hinta muodostuu appelsiinien hinnasta H_k ja tehdystä työstä. Näin ollen työn hinta on $H_i - H_k$. 1 p. (yht. 10 p.) Verrataan kuorimistyön hintaa maksettavaan kokonaishintaan:

$$\begin{aligned} \frac{H_i - H_k}{H_i} &= \frac{m_i h_i - m_k h_k}{m_i h_i} \\ &= \frac{(1 - 0,38759 \dots) \cdot m_k \cdot h_i - m_k h_k}{(1 - 0,38759 \dots) \cdot m_k \cdot h_i} \\ &= \frac{(1 - 0,38759 \dots) \cdot 9,50 \text{ e/kg} - 1,50 \text{ e/kg}}{(1 - 0,38759 \dots) \cdot 9,50 \text{ e/kg}} \\ &= 0,7421 \dots \\ &\approx 74 \% \quad (2 \text{ p. (yht. 12 p.)}) \end{aligned}$$

Vastaus: Kuorimisen osuus hinnasta on noin 74 %.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Tehtävänannon perusteella kuoren arvo on nolla euroa. Lasketaan, kuinka suuri syötävän osan kilohinta on. Oletetaan, että kuorellisia appelsiineja on $m_k = 1 \text{ kg}$. Tällöin syötävän osan massa m_i on kohdan 1 perusteella

$$\begin{aligned} m_i &= (1 - 0,38759 \dots) \cdot 1 \text{ kg} \\ &= 0,6124 \dots \text{ kg} \quad (2 \text{ p. (yht. 8 p.)}) \end{aligned}$$

Koska appelsiineja on yksi kilogramma, tämän massan hinta on 1,50 e. Koska kuori on arvoton, syötävän osan kilohinnaksi tulee

$$\frac{1,50 \text{ e}}{0,6124 \text{ kg}} = 2,4493 \dots \text{ e/kg} \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

Kuorittujen appelsiinien kilohinta on 9,50 e/kg. Tämä hinta muodostuu syötävän osan hinnasta ja työn hinnasta. Koska yllä syötävän osan kilohinnaksi määritettiin 2,4493 ... e/kg, työn hinnaksi jää

$$9,50 \text{ e/kg} - 2,4493 \dots \text{ e/kg} = 7,0506 \dots \text{ e/kg} \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)})$$

Työn hinnan osuus kuorittujen appelsiinien kokonaishinnasta on

$$\frac{7,0506 \dots \text{ e/kg}}{9,50 \text{ e/kg}} = 0,7421 \dots$$
$$\approx 74 \% \quad (2 \text{ p. (yht. 12 p.)})$$

Vastaus: Kuorimisen osuus hinnasta on noin 74 %.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

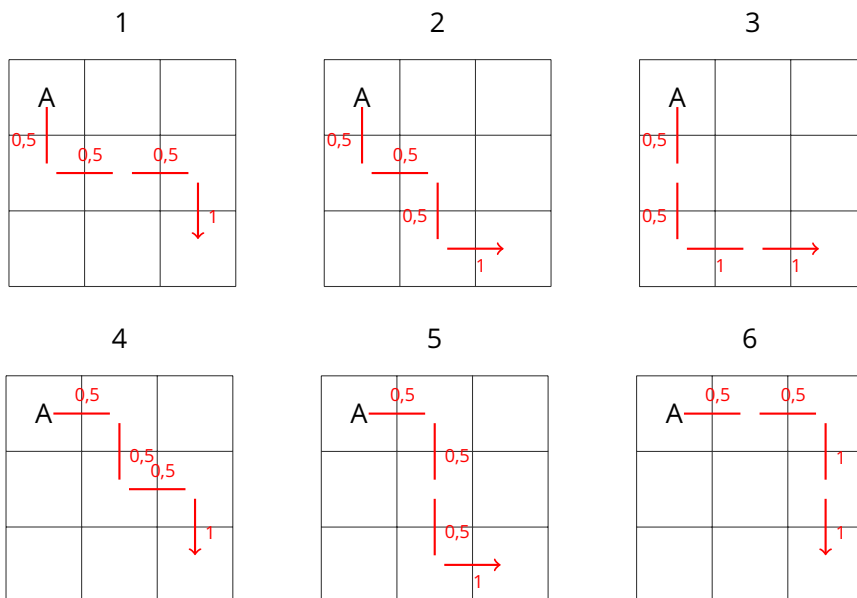
7. Ken Guru hyppii (12 p.)

Ken Guru on 3×3 -ruudukon vasemman yläkulman ruudussa A, ja sen on päästävä hyppimällä oikean alakulman ruutuun B. Yksittäinen hyppy on mahdollinen vain naapuriruutuun joko suoraan oikealle tai suoraan alas, muttei vinottain tai ruudukon ulkopuolelle. Jos mahdollisia vaihtoehtoja on kaksi, niin Ken hyppää niistä kumpaan tahansa todennäköisyydellä 0,5. Muuten se hyppää ainoaan mahdolliseen ruutuun.

1. Määritä jokaisen mahdollisen reitin todennäköisyys. (8 p.)
2. Ken palaa ruudusta B takaisin ruutuun A hyppimällä muuten samalla periaatteella, mutta nyt hyppyt ovat mahdollisia vain suoraan vasemmalle tai suoraan ylös. Kuinka suurella todennäköisyydellä Ken palaa takaisin samaa reittiä (mutta vastakkaiseen suuntaan) kuin menomatalla? (4 p.)

Ratkaisu.

- 7.1 Tutkitaan kaikki mahdolliset reitit. 4 p. (yht. 4 p.) Jos kaikki vaihtoehtoiset reitit oli selitetty muulla tavoin vastauksessa, kuva ei ole välttämätön. Merkitään jokaisen hypyn todennäköisyys kuvaan.



Määritetään jokaisen reitin todennäköisyys. Huomataan, että reiteissä 1,2,4 ja 5 voi tehdä kolme valintaa 1 p. (yht. 5 p.), ja reiteissä 3 ja 6 vain kaksi valintaa 1 p. (yht. 6 p.).

Siis reitit 1,2,4 ja 5 ovat yhtä todennäköiset ja niiden todennäköisyydet ovat

$$P(1) = P(2) = P(4) = P(5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{8} \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

Vastaavasti reitit 3 ja 6 ovat yhtä todennäköiset ja niiden todennäköisyydet ovat

$$P(3) = P(6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

Vastaus: Reittien 3 ja 6 todennäköisyydet ovat $\frac{1}{4}$ ja reittien 1,2,4 ja 5 ovat $\frac{1}{8}$.

Pisteytyksestä:

- Perusteltu kaikki eri reitit 4 p.
- Päätelty erilaisten vaihtoehtojen todennäköisyydet 2 p.
- Oikeat vastaukset 2 p.

7.2 Paluutilanne on symmetrinen menotilanteen kanssa, joten jokaiselle reitille löytyy vastaava paluureitti ja paluureittien todennäköisyydet ovat samat kuin vastaavien menoreittienkin. 2 p. (yht. 10 p.)

Menopaluureittiyhdistelmä voidaan valita kuudella eri tavalla, sillä eri reittivaihtoehtoja oli yhteensä kuusi. Siis todennäköisyys, että meno- ja paluureitti ovat samat, on

$P(\text{Sama meno- ja paluureitti})$

$= P(\text{meno 1 JA paluu 1}) \text{ TAI } P(\text{meno 2 JA paluu 2}) \text{ TAI } \dots \text{ TAI } P(\text{meno 6 JA paluu 6})$

$= P(\text{meno 1}) \cdot P(\text{paluu 1}) + P(\text{meno 2}) \cdot P(\text{paluu 2}) + \dots + P(\text{meno 6}) \cdot P(\text{paluu 6})$

1 p. (yht. 11 p.)

$$= 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{16} \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: Todennäköisyys, että meno- ja paluureitit ovat sama on $\frac{3}{16}$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

8. Ison luvun jaollisuus (12 p.)

1. Määritä suurin luku $k \in \mathbb{N}$, jolle $1023 \equiv -1 \pmod{2^k}$. (3 p.)
2. Todista, että luku $2^{12345678910} - 1$ on jaollinen luvulla 1023. (9 p.)

Ratkaisu.

8.1

$$\begin{aligned}
 1023 &\equiv -1 \pmod{2^k} \\
 \Leftrightarrow 1023 + 1 &\equiv 0 \pmod{2^k} \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)}) \\
 \Leftrightarrow 1024 &\equiv 0 \pmod{2^k} \\
 \Leftrightarrow 2^{10} &\equiv 0 \pmod{2^k}
 \end{aligned}$$

Ehto on siis yhtäpitävä sen kanssa, että luku 2^{10} on jaollinen luvulla 2^k . (1 p. (yht. 2 p.))

Huomataan, että jos $k = 10$, ehto toteutuu, sillä 2^{10} on jaollinen itsellään.

Jos k on suurempi kuin 10, luku 2^k on suurempi kuin 2^{10} . Luku 2^{10} ei voi olla jaollinen itseään suuremmalla kokonaisluvulla, eli ehto ei voi toteutua, kun k on suurempi kuin 10. Näin ollen $k = 10$ on suurin luku $k \in \mathbb{N}$, jolle ehto pätee.

(1 p. (yht. 3 p.))

8.2

Ratkaisuvaihtoehto 1

Olkoon $k = 1234567891$.

$$\begin{aligned}
 1024 &\equiv 1 \pmod{1023} \quad (2 \text{ p. (yht. 5 p.)}) \\
 2^{10} &\equiv 1 \pmod{1023} \quad (1 \text{ p. (yht. 6 p.)})
 \end{aligned}$$

Kongruenttien lukujen potenssit ovat kongruentteja:

$$(2^{10})^k \equiv 1^k \pmod{1023} \quad (2 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

$$2^{10k} \equiv 1 \pmod{1023} \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

$$2^{10k} - 1 \equiv 0 \pmod{1023}$$

$$2^{10 \cdot 1234567891} - 1 \equiv 0 \pmod{1023} \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)})$$

$$2^{12345678910} - 1 \equiv 0 \pmod{1023}$$

Näin ollen luku $2^{12345678910} - 1$ on jaollinen luvulla 1023. Q.E.D. (2 p. (yht. 12 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 2

Olkoon $k = 1234567891$. Tällöin siis

$$2^{12345678910} - 1 = 2^{10 \cdot 1234567891} - 1 = 2^{10k} - 1. \quad (2 \text{ p. (yht. 5 p.)})$$

Huomataan, että tämä luku voidaan esittää tulona seuraavasti

$$\begin{aligned} 2^{10k} - 1 &= 2^{10k} + 2^{10(k-1)} - 2^{10(k-1)} + \dots + 2^{10} - 2^{10} - 1 \\ &= (2^{10} - 1)(2^{10(k-1)} + 2^{10(k-2)} + \dots + 2^{10} + 1) \quad (2 \text{ p. (yht. 7 p.)}) \\ &= (1024 - 1)(2^{10(k-1)} + 2^{10(k-2)} + \dots + 2^{10} + 1) \quad (1 \text{ p. (yht. 8 p.)}) \\ &= 1023 \cdot (2^{10(k-1)} + 2^{10(k-2)} + \dots + 2^{10} + 1) \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)}) \end{aligned}$$

Suluissa kukin termi on positiivinen kokonaisluku, joten suluissa oleva lauseke on myös positiivinen kokonaisluku. (1 p. (yht. 10 p.) Näin ollen siis tehtävän luku $2^{12345678910} - 1$ voidaan esittää luvun 1023 ja positiivisen kokonaisluvun tulona, joten se on jaollinen luvulla 1023. Q.E.D. (2 p. (yht. 12 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

9. Taidemuseon aaltoileva aita (12 p.)

Taidemuseon aita halutaan maalata ja sen pinta-alaa mallinnetaan integraalilla

$$\int_0^4 \left(\frac{\cos(10x + x^2)}{2} + 1 \right) dx.$$

Arvioi integraalia puolisuunnikassäännön avulla käyttäen 10:tä ja 100:aa jakoväliä. Laske näiden arvioiden suhteelliset virheet, kun integraalin arvo viiden desimaalin tarkkuudella on 3,98636.

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Tehtävä voidaan ratkaista hyödyntämällä GeoGebran komentoa "Puolisuunnikassumma". Määritetään GeoGebraan tehtävän funktio. Komennon parametrit ovat integroitava funktio, integroimisvälin ala- ja yläraja sekä jakovälien lukumäärä.

☐	$f(x) = \frac{\cos(10x + x^2)}{2} + 1$	
☐	$a = \text{Puolisuunnikassumma}(f, 0, 4, 10)$ $= 4.2882252443$	⋮
☐	$b = \text{Puolisuunnikassumma}(f, 0, 4, 100)$ $= 3.986993452$	⋮

Kun käytetään kymmentä osaväliä, integraalin arvoksi saadaan kahden desimaalin tarkkuudella 4,29. 4 p. (yht. 4 p.)

Kun käytetään sataa osaväliä, integraalin arvoksi saadaan kahden desimaalin tarkkuudella 3,99. 4 p. (yht. 8 p.)

Suhteellinen virhe lasketaan absoluuttisen virheen ja todellisen arvon osamääränä.

Kymmenen osavälin tapauksessa suhteelliseksi virheeksi saadaan

$$\frac{|4,28822 \dots - 3,98636|}{3,98636} = 0,07572 \dots$$

$$\approx 7,6 \%. \quad \text{2 p. (yht. 10 p.)}$$

Sadan osavälin tapauksessa suhteelliseksi virheeksi saadaan

$$\frac{|3,98699 \dots - 3,98636|}{3,98636} = 0,000158 \dots$$

$$\approx 0,016 \%. \quad \text{2 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: Puolisuunnikassäännön avulla kymmentä osaväliä käyttämällä integraalin likiarvoksi saadaan noin 4,29. Suhteellinen virhe on tällöin 7,6 %. Puolisuunnikassäännön avulla sataa osaväliä käyttämällä integraalin likiarvoksi saadaan noin 3,99. Suhteellinen virhe on tällöin 0,016 %.

YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 19.9.2023) integraalin likiarvot oli esitetty kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella ja suhteelliset virheet oli esitetty yhden tai kahden merkitsevän numeron tarkkuudella. Luultavasti pyöristykset 2–5 desimaalin tarkkuuteen hyväksytään.

Pisteytyksestä:

- Integraalin likiarvon ratkaisusta kymmenellä osavälillä = 4 p.
- Suhteellisen virheen ratkaisusta kymmenen osavälin tapauksessa = 2 p.
- Integraalin likiarvon ratkaisusta sadalla osavälillä = 4 p.
- Suhteellisen virheen ratkaisusta sadan osavälin tapauksessa = 2 p.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Hyödynnetään puolisuunnikassäännön kaavaa

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right).$$

Kaavassa n on osavälien lukumäärä ja h osavälin pituus. Esitetään yllä oleva lauseke summalausekkeena:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{1}{2} f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k \cdot h) + \frac{1}{2} f(b) \right)$$

Lasketaan tehtävän integraalin likiarvo sekä kymmenellä että sadalla osavälillä laskinohjelman avulla:

$$f(x) := \frac{\cos(10 \cdot x + x^2)}{2} + 1 \quad \blacktriangleright \text{Valmis}$$

$$a := 0 \quad \blacktriangleright 0$$

$$b := 4 \quad \blacktriangleright 4$$

$$n1 := 10 \quad \blacktriangleright 10$$

$$n2 := 100 \quad \blacktriangleright 100$$

$$h1 := \frac{b-a}{n1} \quad \blacktriangleright \frac{2}{5}$$

$$h2 := \frac{b-a}{n2} \quad \blacktriangleright \frac{1}{25}$$

$$\left(h1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f(a) + \sum_{k=1}^{n1-1} (f(a+k \cdot h1)) + \frac{1}{2} \cdot f(b) \right) \right) \blacktriangleright \text{Decimal} \quad \blacktriangleright 4.288225244$$

$$\left(h2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f(a) + \sum_{k=1}^{n2-1} (f(a+k \cdot h2)) + \frac{1}{2} \cdot f(b) \right) \right) \blacktriangleright \text{Decimal} \quad \blacktriangleright 3.986993452$$

Kun käytetään kymmentä osaväliä, integraalin arvoksi saadaan kahden desimaalin tarkkuudella 4,29. 4 p. (yht. 4 p.)

Kun käytetään sataa osaväliä, integraalin arvoksi saadaan kahden desimaalin tarkkuudella 3,99. 4 p. (yht. 8 p.)

Kymmenen osavälin tapauksessa suhteelliseksi virheeksi saadaan

$$\frac{|4,28822 \dots - 3,98636|}{3,98636} = 0,07572 \dots$$

$$\approx 7,6\% \quad \text{2 p. (yht. 10 p.)}$$

Sadan osavälin tapauksessa suhteelliseksi virheeksi saadaan

$$\frac{|3,98699 \dots - 3,98636|}{3,98636} = 0,000158 \dots$$

$$\approx 0,016\% \quad \text{2 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: Puolisuunnikassäännön avulla kymmentä osaväliä käyttämällä integraalin likiarvoksi saadaan noin 4,29. Suhteellinen virhe on tällöin 7,6%. Puolisuunnikassäännön avulla sataa osaväliä käyttämällä integraalin likiarvoksi saadaan noin 3,99. Suhteellinen virhe on tällöin 0,016%.

YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 19.9.2023) integraalin likiarvot oli esitetty kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella ja suhteelliset virheet oli esitetty yhden tai kahden merkitsevän numeron tarkkuudella. Luultavasti pyöristykset 2–5 desimaalin tarkkuuteen hyväksytään.

Pisteytyksestä:

- Integraalin likiarvon ratkaisusta kymmenellä osavälillä = 4 p.
- Suhteellisen virheen ratkaisusta kymmenen osavälin tapauksessa = 2 p.
- Integraalin likiarvon ratkaisusta sadalla osavälillä = 4 p.
- Suhteellisen virheen ratkaisusta sadan osavälin tapauksessa = 2 p.

Ratkaisuvaihtoehto 3

Hyödynnetään puolisuunnikassäännön kaavaa

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right).$$

Kaavassa n on osavälien lukumäärä ja h osavälin pituus. Ratkaistaan summan likiarvo kirjoittamalla Python-ohjelma.

```
#Kosinin arvojen laskemiseen tarvitaan
#math-kirjastoa.
import math
#Asetetaan jakovälien lukumäärä,
#integroimisrajat ja määritetään jakovälin pituus.
n=10
a=0
b=4
h=(b-a)/n
tarkka_arvo=3.98636
#Alustetaan laskettavan summan arvoksi 0.
```

```

summa = 0
#Lasketaan ensin summan ensimmäinen
#ja viimeinen termi.
summa += 0.5*h*(math.cos(10*(a+0*h)
*****+(a+0*h)**2)/2+1
*****+math.cos(10*(a+n*h)
*****+(a+n*h)**2)/2+1)
#Määritetään summan loput termit for-silmukan
#avulla.
for i in range(1,n):
    summa += h*(math.cos(10*(a+i*h)
*****+(a+i*h)**2)/2+1)
#Lasketaan suhteellinen virhe
e=abs(summa-tarkka_arvo)/tarkka_arvo
print(summa)
print(e)

```

Tulosteiksi saadaan kymmenen osavälin tapauksessa

```

>>>#Running pmyo_s23_t9.py
>>>from pmyo_s23_t9 import *
4.288225244264261
0.07572453171922784

```

Osavälien lukumääräksi voidaan seuraavaksi vaihtaa sata, jolloin tulosteiksi saadaan

```

>>>#Running pmyo_s23_t9.py
>>>from pmyo_s23_t9 import *
3.98699345198732
0.00015890486241074

```

Vastaus: Puolisuunnikkasäännön avulla kymmentä osaväliä käyttämällä integraalin likiarvoksi saadaan noin 4,29. Suhteellinen virhe on tällöin 7,6 %. Puolisuunnikkasäännön avulla sataa osaväliä käyttämällä integraalin likiarvoksi saadaan noin 3,99. Suhteellinen virhe on tällöin 0,016 %.

YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 19.9.2023) integraalin likiarvot oli esitetty kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella ja suhteelliset virheet oli esitetty yhden tai kahden merkitsevän numeron tarkkuudella. Luultavasti pyöristykset 2–5 desimaalin tarkkuuteen hyväksytään.

Pisteytyksestä:

- Osavälin pituuden ratkaiseminen = 1 p.
- Summan termien lausekkeen muodostaminen = 1 p.
- For- tai while-silmukan muodostaminen = 2 p.

- Integraalin likiarvo ratkaistu kymmenellä osavälillä 2 p.
- Integraalin likiarvo ratkaistu kymmenellä osavälillä 2 p.
- Suhteellisen virheen ratkaisusta kymmenen osavälin tapauksessa 2 p.
- Suhteellisen virheen ratkaisusta sadan osavälin tapauksessa 2 p.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

10. Parilliset ja parittomat funktiot (12 p.)

Funktio $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on *parillinen*, jos $h(-x) = h(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja *pariton*, jos $h(-x) = -h(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Valitse osatehtävissä 10.1–10.4 oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 1 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvoستavaksi, poista vastauksesi valitsemalla pudotusvalikosta tyhjä rivi.

Kirjoita osatehtävien 10.5 ja 10.6 vastaukset perusteluineen vastauslaatikkoon.

1. Funktio $a(x) = \sin x$ (1 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "on parillinen", "on pariton", "ei ole parillinen eikä pariton".

2. Funktio $b(x) = \cos x$ (1 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "on parillinen", "on pariton", "ei ole parillinen eikä pariton".

3. Funktio $c(x) = x \sin x$ (1 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "on parillinen", "on pariton", "ei ole parillinen eikä pariton".

4. Funktio $d(x) = \sin x + \cos x$ (1 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "on parillinen", "on pariton", "ei ole parillinen eikä pariton".

5. Oletetaan, että f on pariton. Osoita, että $f(0) = 0$. (4 p.)

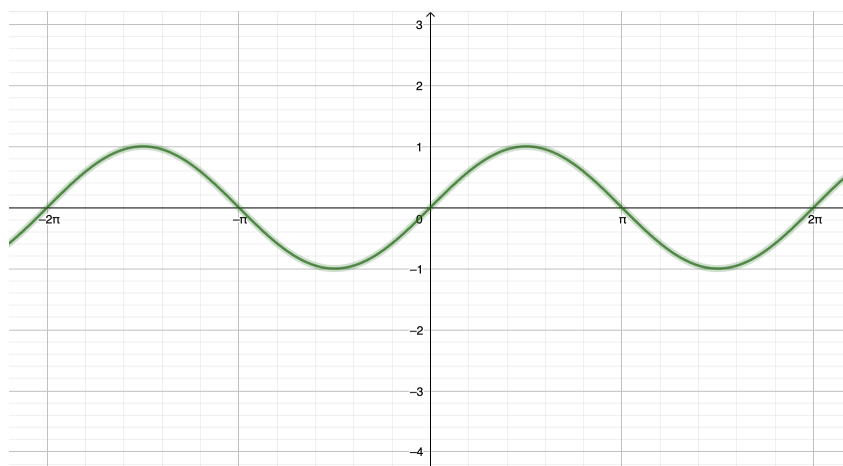
6. Oletetaan, että g on parillinen ja derivoituva. Osoita, että g' on pariton. (4 p.)

Ratkaisu.

10.1 Funktio $a(x) = \sin(x)$ on pariton. 1 p. (yht. 1 p.)

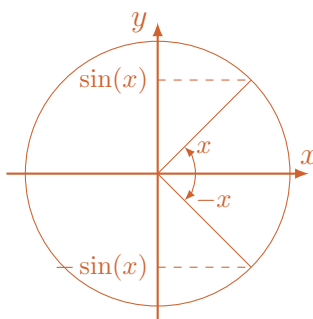
Ratkaisuvaihtoehto 1

Piirretään sinifunktion kuvaaja. Kuvaajasta huomataan, että funktio saa pisteissä x ja $-x$ arvot, jotka ovat toistensa vastaluvut. Esimerkiksi kohdassa $\pi/2$ funktio saa arvon 1 ja kohdassa $-\pi/2$ funktio saa arvon -1 . Koska sinifunktio on tunnetusti jaksollinen, päätelmä on mahdollista tehdä tarkastelemalla kuvaajaa.



Ratkaisuvaihtoehto 2

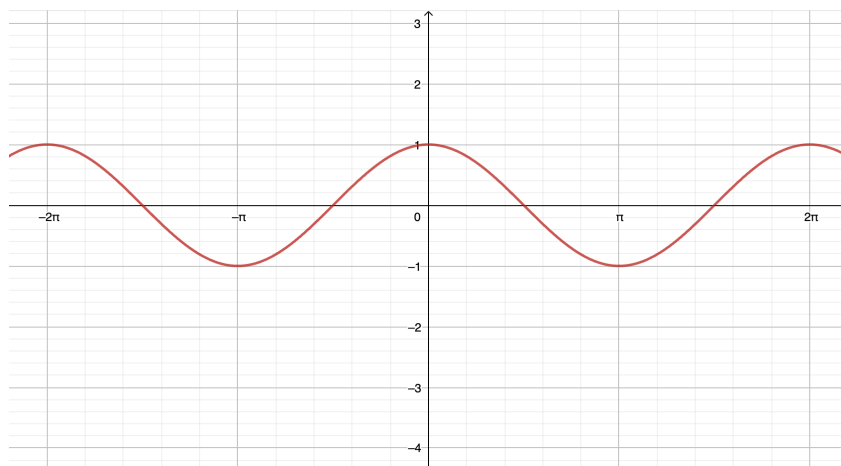
Tarkastellaan sinifunktion saamia arvoja yksikköympyrän avulla. Koska sinifunktion arvo on yksikköympyrän kehän pisteen y -koordinaatti, yksikköympyrästä nähdään, että vastalukujen sinit ovat toistensa vastaluvut, siis $\sin(-x) = -\sin(x)$.



10.2 Funktio $b(x) = \cos(x)$ on parillinen. 1 p. (yht. 2 p.)

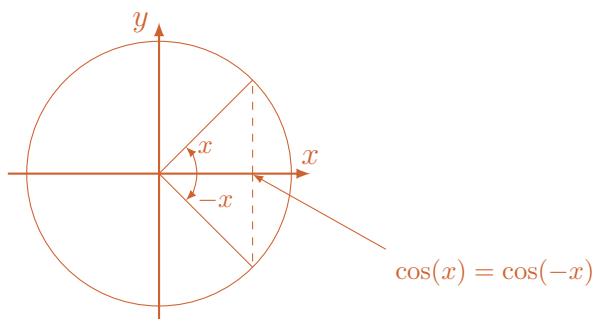
Ratkaisuvaihtoehto 1

Piirretään kosinifunktion kuvaaja. Kuvaajasta huomataan, että funktio saa pisteissä x ja $-x$ saman arvon. Esimerkiksi kohdassa π funktio saa arvon -1 ja kohdassa $-\pi$ funktio saa myös arvon -1 . Koska kosinifunktio on tunnetusti jaksollinen, päätelmä on mahdollista tehdä tarkastelemalla kuvaajaa.



Ratkaisuvaihtoehto 2

Tarkastellaan kosinifunktion saamia arvoja yksikköympyrän avulla. Koska kosinifunktion arvo on yksikköympyrän kehän pisteen x -koordinaatti, yksikköympyrästä nähdään, että vastalukujen kosinit tuottavat saman arvon, siis $\cos(-x) = \cos(x)$.



Tiedetään, että sinifunktio on jaksollinen. Piirretään sinifunktion kuvaaja. Kuvaajasta huomataan, että

10.3 Funktio $c(x) = x \sin(x)$ on parillinen. 1 p. (yht. 3 p.)

Tämän voi perustella seuraavasti, kun tiedetään, että $\sin(-x) = -\sin(x)$.

$$c(-x) = -x \sin(-x) = -x \cdot (-\sin(x)) = x \sin(x) = c(x)$$

10.4 Funktio $d(x) = \sin(x) + \cos(x)$ ei ole parillinen eikä pariton. 1 p. (yht. 4 p.)

Tämän voi perustella esimerkiksi laskemalla arvot

$$d\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$d\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,$$

joiden avulla huomataan, että $x = \frac{\pi}{4}$ on esimerkki arvosta, jolla ei ole voimassa ehto $d(-x) = -d(x)$ eikä ehto $d(-x) = d(x)$. Näin ollen funktio $d(x)$ ei ole parillinen eikä pariton, sillä parillisuuden tai parittomuuden ehdon täytyy toteutua kaikilla x :n arvoilla, jotta funktio on parillinen tai pariton.

10.5 Oletetaan, että funktio f on pariton. Tällöin pätee $f(-x) = -f(x)$. Sijoitetaan $x = 0$ ja tarkastellaan yhtälöä.

$$f(-0) = -f(0) \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)} \quad \parallel -0 = 0$$

$$f(0) = -f(0) \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

$$f(0) + f(0) = 0$$

$$2f(0) = 0 \quad \parallel : 2$$

$$f(0) = 0 \quad \text{2 p. (yht. 8 p.)} \quad \text{Q.E.D.}$$

10.6 Oletetaan, että g on parillinen ja derivoituva. Täten $g(-x) = g(x)$. Derivoidaan yhtälö puolittain **muuttujan x suhteen**.

$$D g(-x) = D g(x) \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

$$g'(-x) \cdot (-1) = g'(x) \quad \text{2 p. (yht. 11 p.)} \quad \parallel \cdot (-1)$$

$$g'(-x) = -g'(x) \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)} \quad \text{Q.E.D.}$$

Yllä yhtälön vasemman puolen derivoinnissa hyödynnettiin sisäfunktion derivaatan kaavaa

$$D u(s(x)) = u'(s(x)) \cdot s'(x),$$

jossa tämän tehtävän tapauksessa $u(x) = g(x)$ ja $s(x) = -x$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

11. Väliarvolauseen ehdot (12 p.)

Tässä tehtävässä tutkitaan, milloin välillä $[-1,1]$ määritelty funktio f toteuttaa väliarvolause-ehdon:

$$f'(a) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \quad \text{jollakin luvulla } a \in]-1,1[.$$

Vastaa perustellen seuraaviin osatehtäviin.

1. Anna esimerkki funktiosta, joka on jatkuva suljetulla välillä $[-1,1]$, derivoituva avoimella välillä $] -1,1[$ ja toteuttaa väliarvolause-ehdon. (4 p.)
2. Anna esimerkki funktiosta, joka on jatkuva suljetulla välillä $[-1,1]$ mutta joka ei ole derivoituva avoimella välillä $] -1,1[$ eikä toteuta väliarvolause-ehto. (4 p.)
3. Anna esimerkki funktiosta, joka on derivoituva avoimella välillä $] -1,1[$ mutta joka ei ole jatkuva suljetulla välillä $[-1,1]$ eikä toteuta väliarvolause-ehto. (4 p.)

Ratkaisu.

- 11.1 Tarkastellaan esimerkiksi funktiota f , jolle $f(x) = x$. Funktio on polynomi-funktiona tunnetusti jatkuva ja derivoituva kaikilla reaaliluvuilla x , joten se on myös jatkuva suljetulla välillä $[-1,1]$ ja derivoituva avoimella välillä $] -1,1[$.

1 p. (yht. 1 p.)

Funktion derivaatta on

$$f'(x) = 1. \quad 1 \text{ p. (yht. 2 p.)}$$

Toisaalta väliarvolause-ehdon mukainen arvo on

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - (-1)}{1 - (-1)} = 1.$$

1 p. (yht. 3 p.)

Näin ollen

$$f'(a) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}$$

kaikilla $a \in] -1,1[$, joten funktio toteuttaa väliarvolause-ehdon.

1 p. (yht. 4 p.)

Vastaukseksi käy mikä tahansa muukin ehdot toteuttava funktio riittävin perusteluin.

11.2 Tarkastellaan esimerkiksi funktiota g , jolle $g(x) = |x|$. Funktio on tunnetusti jatkuva kaikilla reaaliluvuilla x , joten se on myös jatkuva suljetulla välillä $[-1, 1]$.

1 p. (yht. 5 p.)

Positiivisilla luvuilla x funktion lauseke on $g(x) = |x| = x$, joten se on polynomifunktiona tunnetusti derivoituva ja sen derivaatta positiivisilla luvuilla x on siis

$$g'(x) = 1.$$

Vastaavasti negatiivisilla luvuilla x funktion lauseke on $g(x) = |x| = -x$, joten se on polynomifunktiona tunnetusti derivoituva ja sen derivaatta negatiivisilla luvuilla x on siis

$$g'(x) = -1.$$

Funktio $g(x)$ ei ole derivoituva nollassa, sillä lähestyttäessä positiivisten lukujen puolelta erotusosamäärän raja-arvo (derivaatta) on 1 ja lähestyttäessä negatiivisten lukujen puolelta erotusosamäärän raja-arvo (derivaatta) on -1 , joten erotusosamäärällä ei ole raja-arvoa kohdassa $x = 0$, ja täten siis funktiolla $g(x)$ ei ole derivaattaa kohdassa $x = 0$.

1 p. (yht. 6 p.)

YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 19.9.2023) oli vain todettu perustelematta, että funktio ei ole derivoituva nollassa, joten luultavasti pisteen saa ilman perusteluakin.

Väliarvolause-ehdon mukainen arvo on

$$\frac{g(1) - g(-1)}{1 - (-1)} = \frac{|1| - |-1|}{1 - (-1)} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0.$$

1 p. (yht. 7 p.)

Toisaalta yllä näytettiin, että funktion g derivaatta ei ole 0 missään kohdassa välillä $] -1, 1[$. Täten funktio ei toteuta väliarvolause-ehtoa.

1 p. (yht. 8 p.)

Vastaukseksi käy mikä tahansa muukin ehdot toteuttava funktio riittävän perusteluin.

11.3 Tarkastellaan funktiota

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } -1 \leq x < 1 \\ -1, & \text{kun } x = 1 \end{cases}$$

Avoimella välillä $] -1, 1[$ funktion lauseke on $h(x) = x$, joten se on polynomi-funktiona tunnetusti derivoituva. 1 p. (yht. 9 p.)

Funktion arvo kohdassa $x = 1$ on $h(1) = -1$, mutta raja-arvo, kun x lähestyy lukua 1, on

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1.$$

Täten funktio ei siis ole jatkuva suljetulla välillä $[-1, 1]$. 1 p. (yht. 10 p.)

YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 19.9.2023) oli vain todettu perustelematta, että funktio ei ole jatkuva, joten luultavasti pisteen saa ilman perusteluakin.

Väliarvolause-ehdon mukainen arvo on

$$\frac{h(1) - h(-1)}{1 - (-1)} = \frac{-1 - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{-1 + 1}{1 + 1} = 0.$$

1 p. (yht. 11 p.)

Toisaalta yllä näytettiin, että funktion h derivaatan arvo on koko avoimella välillä 1, joten funktio ei siis toteuta väliarvolause-ehdot. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaukseksi käy mikä tahansa muukin ehdot toteuttava funktio riittävin perusteluin.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

12. Palautuskaavat (12 p.)

1. Olkoon $f_n(x) = x^n \sin x$ ja $g_n(x) = x^n \cos x$, kun $n = 0, 1, 2, \dots$. Laske derivaatat $f'_n(x)$ ja $g'_n(x)$. (2 p.)

2. Merkitään

$$S_n = \int_0^\pi x^n \sin x \, dx \quad \text{ja} \quad C_n = \int_0^\pi x^n \cos x \, dx.$$

Laske S_0 ja C_0 . (2 p.)

3. Oletetaan, että integraaleille S_n ja C_n pätevät rekursiokaavat

$$S_n = nC_{n-1} + \pi^n \quad \text{ja} \quad C_n = -nS_{n-1},$$

kun $n = 1, 2, 3, \dots$. Laske näitä kaavoja käyttämällä integraalin S_4 arvo. (2 p.)

4. Integroi osatehtävässä 1 saadut derivaattakaavat puolittain välillä $[0, \pi]$ ja johda tulosten avulla osatehtävän 3 molemmat rekursiokaavat. (6 p.)

Ratkaisu.

12.1. Tarkastellaan ensin tilannetta, jossa $n = 1, 2, 3, \dots$

Tulon derivoimiskaava on

$$D(s(x) \cdot t(x)) = s'(x) \cdot t(x) + s(x) \cdot t'(x).$$

Valitaan funktion $f_n(x)$ tapauksessa $s(x) = x^n$, jolloin $s'(x) = nx^{n-1}$, ja $t(x) = \sin(x)$, jolloin $t'(x) = \cos(x)$. Sijoitetaan nämä lausekkeet tulon derivoimiskaavaan, jolloin funktion $f_n(x)$ derivaataksi saadaan

$$f'_n(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot \sin(x) + x^n \cdot \cos(x). \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

Vastaavasti funktion $g_n(x)$ tapauksessa $s(x) = x^n$, jolloin $s'(x) = nx^{n-1}$, ja $t(x) = \cos(x)$, jolloin $t'(x) = -\sin(x)$. Sijoitetaan nämä lausekkeet tulon derivaatan kaavaan, jolloin funktion $g_n(x)$ derivaataksi saadaan

$$g'_n(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot \cos(x) - x^n \cdot \sin(x). \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta $n = 0$. Tällöin funktioita $f_n(x)$ ja $g_n(x)$ ei ole määritelty kohdassa $x = 0$, sillä potenssia 0^0 ei ole määritelty. Kun $x \neq 0$, $x^0 = 1$, joten derivaatafunktioksi saadaan

$$f'_0(x) = \cos(x)$$

ja

$$g'_0(x) = -\sin(x).$$

Huomataan myös, että jos oletetaan, että $x \neq 0$, yllä saadut derivoimiskaavat voidaan samastaa tilanteessa $n = 0$, sillä

$$\begin{aligned} f'_0(x) &= 0 \cdot x^{0-1} \cdot \sin(x) + x^0 \cdot \cos(x) \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} g'_0(x) &= 0 \cdot x^{0-1} \cdot \cos(x) - x^0 \cdot \sin(x) \\ &= -\sin(x) \end{aligned}$$

Jos siis oletetaan, että $x \neq 0$, alussa johdetut derivaatafunktiot ovat voimassa kaikilla $n = 0, 1, 2, \dots$

Vastaus: Funktion $f'_n(x)$ derivaatafunktio on

$$f'_n(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot \sin(x) + x^n \cdot \cos(x)$$

ja funktion $g'_n(x)$ derivaatafunktio on

$$g'_n(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot \cos(x) - x^n \cdot \sin(x).$$

12.2.

$$S_n = \int_0^{\pi} x^n \sin(x) \, dx$$

Sijoitetaan $n = 0$ ja lasketaan integraalin arvo:

$$\begin{aligned} S_0 &= \int_0^{\pi} x^0 \sin(x) \, dx \\ &= \int_0^{\pi} \sin(x) \, dx \\ &= \left/ -\cos(x) \right. \\ &= - \left/ \cos(x) \right. \\ &= -(\cos(\pi) - \cos(0)) \\ &= -(-1 - 1) \\ &= 2 \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)} \end{aligned}$$

$$C_n = \int_0^{\pi} x^n \cos(x) \, dx$$

Sijoitetaan $n = 0$ ja lasketaan integraalin arvo:

$$\begin{aligned} C_0 &= \int_0^{\pi} x^0 \cos(x) \, dx \\ &= \int_0^{\pi} \cos(x) \, dx \\ &= \left/ \sin(x) \right. \\ &= \sin(\pi) - \sin(0) \\ &= 0 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} \end{aligned}$$

Tarkalleen ottaen integroitavia funktioita ei ole määritelty integroimisvälin alarajalla $x = 0$, sillä potenssia 0^0 ei ole määritelty. Näin ollen integraalien arvot tulisi laskea epäoleellisena integraalina. Integraali S_0 määritetään seuraavasti:

$$\begin{aligned} S_0 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{\pi} \sin(x) \, dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[-\cos(x) \right]_a^{\pi} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(-\cos(\pi) - (-\cos(a)) \right) \\ &= -\cos(\pi) + \lim_{a \rightarrow 0^+} (\cos(a)) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Vastaavasti integraaliksi C_0 saadaan

$$\begin{aligned} C_0 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{\pi} \cos(x) \, dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\sin(x) \right]_a^{\pi} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} (\sin(\pi) - \sin(a)) \\ &= \sin(\pi) - \lim_{a \rightarrow 0^+} (\sin(a)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Yllä olevaa päättelyä ei kuitenkaan vaadita ratkaisussa.

Vastaus: Integraalin S_0 arvo on 2 ja integraalin C_0 arvo on 0.

12.3. Määritetään S_4 annettujen rekursiokaavojen avulla:

$$\begin{aligned}
 S_4 &= 4 \cdot C_3 + \pi^4 \\
 &= 4 \cdot (-3 \cdot S_2) + \pi^4 \quad (1 \text{ p. (yht. 5 p.)}) \\
 &= -12S_2 + \pi^4 \\
 &= -12 \cdot (2 \cdot C_1 + \pi^2) + \pi^4 \\
 &= -24C_1 - 12\pi^2 + \pi^4 \\
 &= -24 \cdot ((-1) \cdot S_0) - 12\pi^2 + \pi^4 \\
 &= 24 \cdot S_0 - 12\pi^2 + \pi^4
 \end{aligned}$$

Sijoitetaan kohdassa 2 saatu $S_0 = 2$ yllä olevaan yhtälöön.

$$\begin{aligned}
 S_4 &= 24 \cdot 2 - 12\pi^2 + \pi^4 \\
 &= 48 - 12\pi^2 + \pi^4 \quad (1 \text{ p. (yht. 6 p.)})
 \end{aligned}$$

YTL:n hyvän vastuksen piirteissä (luettu 19.9.2023) oli annettu myös integraalin likiarvo. Mielestämme tehtävänannon perusteella on tarkoituksenmukaisempaa antaa vastaukseksi tarkka arvo, joten uskomme, että tarkka arvo vaaditaan täysien pisteiden saamiseksi ja likiarvoa ei tarvitse esittää.

Vastaus: Integraalin S_4 arvo on $48 - 12\pi^2 + \pi^4$.

12.4. Kohdan 1 nojalla

$$f'_n(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot \sin(x) + x^n \cdot \cos(x) \quad (1)$$

$$g'_n(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot \cos(x) - x^n \cdot \sin(x). \quad (2)$$

Tarkastellaan ensin derivaattafunktiota $f'_n(x)$. Integroidaan yllä oleva yhtälö (1)

puolittain:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f'_n(x) &= \int_0^{\pi} n \cdot x^{n-1} \cdot \sin(x) + x^n \cdot \cos(x) \, dx \\ f_n(\pi) - f_n(0) &= \int_0^{\pi} n \cdot x^{n-1} \cdot \sin(x) \, dx + \int_0^{\pi} x^n \cdot \cos(x) \, dx \\ \pi^n \sin(\pi) - 0^n \sin(0) &= n \int_0^{\pi} x^{n-1} \cdot \sin(x) \, dx + \int_0^{\pi} x^n \cdot \cos(x) \, dx \quad (3)\end{aligned}$$

Kohdassa 2 esitettyjen integraalien nojalla

$$\int_0^{\pi} x^{n-1} \cdot \sin(x) \, dx = S_{n-1}$$

ja

$$\int_0^{\pi} x^n \cdot \cos(x) \, dx = C_n. \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

Lisäksi sekä $\sin(\pi)$ että $\sin(0)$ ovat kummatkin nollia, joten yhtälö (3) saadaan muotoon

$$\pi^n \cdot 0 - 0^n \cdot 0 = n \cdot S_{n-1} + C_n$$

$$0 = n \cdot S_{n-1} + C_n \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)} \quad || - nS_{n-1}$$

$$C_n = -nS_{n-1}. \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

Tarkastellaan seuraavaksi derivaattafunktiota $g'_n(x)$. Integroidaan yhtälö (2) puo-

littain:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} g'_n(x) &= \int_0^{\pi} n \cdot x^{n-1} \cdot \cos(x) - x^n \cdot \sin(x) \, dx \\ g_n(\pi) - g_n(0) &= \int_0^{\pi} n \cdot x^{n-1} \cdot \cos(x) \, dx - \int_0^{\pi} x^n \cdot \sin(x) \, dx \\ \pi^n \cos(\pi) - 0^n \cos(0) &= n \int_0^{\pi} x^{n-1} \cdot \cos(x) \, dx - \int_0^{\pi} x^n \cdot \sin(x) \, dx \quad (4)\end{aligned}$$

Kohdassa 2 esitettyjen integraalien nojalla

$$\int_0^{\pi} x^{n-1} \cdot \cos(x) \, dx = C_{n-1}$$

ja

$$\int_0^{\pi} x^n \cdot \sin(x) \, dx = S_n. \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

Lisäksi $\cos(\pi) = -1$ ja $\cos(0) = 1$, joten yhtälö (4) saadaan muotoon

$$\begin{aligned}\pi^n \cdot (-1) - 0^n \cdot 1 &= n \cdot C_{n-1} - S_n \\ -\pi^n - 0 &= n \cdot C_{n-1} - S_n \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)} \\ S_n &= nC_{n-1} + \pi^n. \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}\end{aligned}$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

13. Kertoman arviointi (12 p.)

Perustele seuraavat epäyhtälöt.

1. $\ln k \leq \int_k^{k+1} \ln x \, dx$, kun $k = 1, 2, 3, \dots$ (3 p.)
2. $\sum_{k=1}^n \ln k \leq \int_1^{n+1} \ln x \, dx$, kun $n = 1, 2, 3, \dots$ (3 p.)
3. $n! \leq e \left(\frac{n+1}{e} \right)^{n+1}$, kun $n = 1, 2, 3, \dots$ (6 p.)

Ratkaisu.

13.1 Logaritmifunktio on aidosti kasvava, joten $\ln(x) \geq \ln(k)$, kun $k \leq x \leq k+1$.
Näin ollen

$$\begin{aligned}
 \int_k^{k+1} \ln(x) \, dx &\geq \int_k^{k+1} \ln(k) \, dx && \text{1 p. (yht. 1 p.)} \\
 &= \int_k^{k+1} (\ln(k) \cdot x) \\
 &= \ln(k) \cdot (k+1) - \ln(k) \cdot k \\
 &= \ln(k) \cdot k + \ln(k) - \ln(k) \cdot k \\
 &= \ln(k) && \text{1 p. (yht. 2 p.)}
 \end{aligned}$$

Täten siis

$$\ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(x) \, dx. \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)} \quad \square$$

13.2 Kohdan 1. nojalla

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \ln(k) &\leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \ln(x) \, dx \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} \\
&= \int_1^2 \ln(x) \, dx + \int_2^3 \ln(x) \, dx + \dots + \int_n^{n+1} \ln(x) \, dx \\
&= \int_1^{n+1} \ln(x) \, dx \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)} \quad \square
\end{aligned}$$

Yllä hyödynnettiin integraalikaavaa

$$\int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx.$$

13.3 Luvun n kertoma $n!$ tarkoittaa positiivisten kokonaislukujen tuloa luvusta 1 lukuun n , eli tuloa $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

$$\begin{aligned}
\ln(n!) &= \ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) \\
&= \ln(1) + \ln(2) + \ln(3) + \dots + \ln(n) \\
&= \sum_{k=1}^n \ln(k) \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}
\end{aligned}$$

Yllä hyödynnettiin logaritmikaavaa

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y).$$

Kohdan 2 nojalla

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \ln(k) &\leq \int_1^{n+1} \ln(x) \, dx \\
 &= \left/ \begin{matrix} n+1 \\ 1 \end{matrix} (x \ln(x) - x) \right. \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)} \\
 &= (n+1) \ln(n+1) - (n+1) - (1 \cdot \ln(1) - 1) \\
 &= (n+1) \ln(n+1) - n - 1 - 1 \cdot 0 + 1 \\
 &= (n+1) \ln(n+1) - n \\
 &= \ln((n+1)^{n+1}) - n \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}
 \end{aligned}$$

Saadaan siis epäyhtälö

$$\ln(n!) \leq \ln((n+1)^{n+1}) - n.$$

Täten

$$\begin{aligned}
 e^{\ln(n!)} &\leq e^{\ln((n+1)^{n+1}) - n} \\
 n! &\leq e^{\ln((n+1)^{n+1}) - n} \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)} \quad (\text{kaava } e^{\ln(x)} = x) \\
 &= e^{\ln((n+1)^{n+1})} \cdot e^{-n} \quad (\text{kaava } e^{x+y} = e^x \cdot e^y) \\
 &= (n+1)^{n+1} \cdot \frac{1}{e^n} \quad (\text{kaava } e^{\ln(x)} = x) \\
 &= (n+1)^{n+1} \cdot \frac{e}{e^{n+1}} \\
 &= e \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} \\
 &= e \left(\frac{n+1}{e} \right)^{n+1} \quad \text{2 p. (yht. 12 p.)} \quad \square
 \end{aligned}$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!