

Yo-kokeiden mallivastaukset, kevät 2023

Pitkä matematiikka

Mafy on opettamiseen, oppimiseen sekä opetusteknologiaan erikoistunut yritys. Kehitämme itsenäisen ja tehokkaan oppimisen ratkaisuja. Teemme oppimisesta mahdollista kaikille.

Tiesitkö tämän?



83 %

opiskelijoista kertoi Mafynetin edistymiskäyrän lisänneen motivaatiota opiskeluun.



60 %

PK-seudun lukioista käyttää Mafynettiä.



72 %

lääkiksen pääsykoepaikoista meni Mafyn opiskelijoille vuonna 2022.

Mallivastauksien tekijät

Mallivastaukset laatii Mafyn oppimateriaalitiimi, joka kehittää lukioon tarkoitettuja Mafynetti-oppimateriaaleja.

Oppimateriaalitiimistä mukana olivat Sampsa Kurvinen, Jaakko Alasuvanto, Linnea Tokola ja Tuulia Tokola. Lisäksi työn tukena olivat Matti Virolainen ja Jona Nsuku.

Palveluitamme ovat

- Mafynetti — sähköinen oppimateriaali
- lääketieteen valmennuskurssit
- kauppatieteiden valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- ylioppilaskirjoituksiin valmentavat kurssit.

Julkaisemme verkkosivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kurssistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Käyttöehdot

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafy.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion matematiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukionkurseillasi. Nämä mallivastaukset ovat Mafy Oy:n omaisuutta.

Yhteystiedot

<https://mafy.fi/yhteydenotto>

Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	10
Ratkaisu tehtävään 3	14
Ratkaisu tehtävään 4	17
Ratkaisu tehtävään 5	26
Ratkaisu tehtävään 6	28
Ratkaisu tehtävään 7	34
Ratkaisu tehtävään 8	37
Ratkaisu tehtävään 9	41
Ratkaisu tehtävään 10	48
Ratkaisu tehtävään 11	52
Ratkaisu tehtävään 12	55
Ratkaisu tehtävään 13	60

Malliratkaisut päivitetty 18. maaliskuuta 2024 klo. 11:27.

1. Monivalintatehtäviä (12 p.)

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

1.1. Mittayksiköt (2 p.)

Kuinka monta millimetriä on yksi kilometri?

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " 10^{-6} ", " 10^{-3} ", " 10^0 ", " 10^2 ", " 10^3 ", " 10^4 ", " 10^6 ", " 10^9 ", " 10^{12} ".

1.2. Lieriö (2 p.)

Lieriö, jonka pohja on monikulmio, on nimeltään

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "kartio", "särmio", "tetraedri", "pyramidi".

1.3. Kosinilause (2 p.)

Suorakulmaisessa kolmiossa kosinilause on sama kuin

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "Pythagoraan lause", "sinilause", "kehäkulmalause", "Fermat'n suuri lause".

1.4. Kulmakerroin (2 p.)

Tason suoran $y = ax + b$ kulmakerroin on aina yhtä suuri kuin suoran

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "normaalin kulmakertoimen käänteisluku", "etäisyys origon kautta kulkevasta samansuuntaisesta suorasta", "yhtälöstä muodostetun funktion $f(x) = ax + b$ derivaatan arvo", "suuntakulma".

1.5. Pistetulo (2 p.)

Kahden vektorin pistetulo on aina

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "kokonaisluku", "reaaliluku", "vektori", "suora".

1.6. Leikkauspisteet (2 p.)

Ympyrällä ja paraabelilla on tasossa

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "tasan kaksi leikkauspistettä", "korkeintaan kaksi leikkauspistettä", "tasan neljä leikkauspistettä", "korkeintaan neljä leikkauspistettä".

Ratkaisu.

Vastaukset:

1.1. 10^6 (2 p. (yht. 2 p.))

1.2. särmiö (2 p. (yht. 4 p.))

1.3. Pythagoraan lause (2 p. (yht. 6 p.))

1.4. yhtälöstä muodostetun funktion $f(x) = ax + b$ derivaatan arvo (2 p. (yht. 8 p.))

1.5. reaalityyppi (2 p. (yht. 10 p.))

1.6. korkeintaan neljä leikkauspistettä (2 p. (yht. 12 p.))

Pisteytyksestä: Kohdassa 1.5 vastauksesta ”kokonaistyyppi” annetaan 1 piste.

Perustelut:

1.1. Muunnetaan 1 km millimetreiksi.

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 1\,000\,000 \text{ mm} = 10^6 \text{ mm}$$

1.2. Lieriötä, jonka pohja on monikulmio, kutsutaan särmiöksi.

1.3. Kosinilauseen mukaan

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cos \alpha,$$

jossa kolmion sivut ovat a , b ja c , ja α on sivujen b ja c välinen kulma.

Huomaa, että sivujen ja kulman nimet voivat olla mitkä tahansa, kunhan nimetty kulma on niiden sivujen välinen, jotka ovat kahdestaan yhtälön toisella puolella, kolmannen sivun ollessa yksinään yhtälön toisella puolella. Kosinilause voi olla siis yhtä hyvin esimerkiksi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

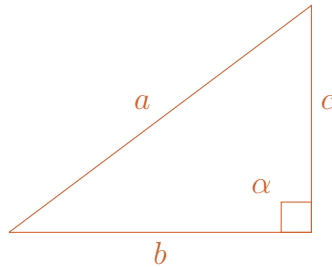
jossa γ on sivujen b ja c välinen kulma, tai

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta,$$

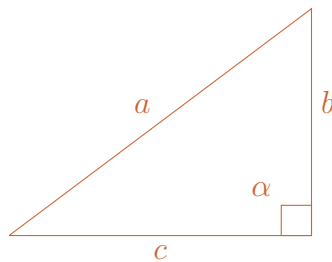
jossa β on sivujen a ja c välinen kulma.

Tutkitaan suorakulmaista kolmiota, jonka sivujen pituudet ovat a , b ja c .

Valitaan ensin kulmaksi α suora kulma. Kosinilausessa sivujen b ja c on oltava kulman α viereiset sivut, joten niiden on oltava kateetteja. Tällöin kolmio näyttää tältä:



joka voidaan piirtää myös näin (molemmissa α on sivujen b ja c välinen kulma ja a hypotenuusa):

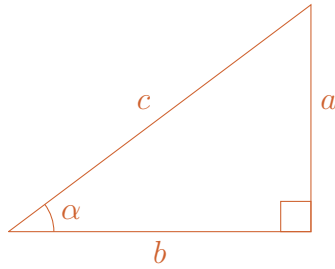


Tällöin kosinilause sanoo seuraavaa:

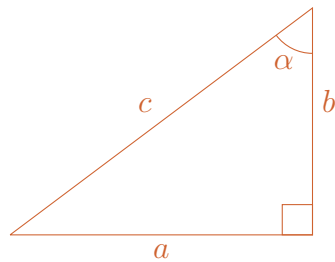
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2ab \cos \alpha && \parallel \gamma = 90^\circ \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2ab \cos 90^\circ && \parallel \cos 90^\circ = 0 \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2ab \cdot 0 \\ a^2 &= b^2 + c^2, \end{aligned}$$

joka on sama kuin Pythagoraan lause.

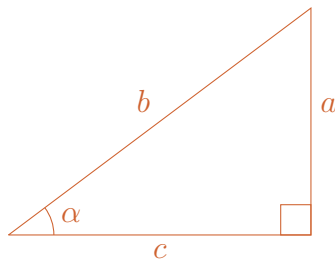
Jos taas kulmaksi α valitaan terävä kulma, kolmio näyttää tältä:



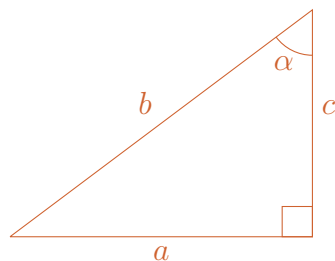
joka voidaan piirtää myös näin (molemmissa α on sivujen b ja c välinen kulma ja c hypotenuusa):



tai tältä:



joka voidaan piirtää myös näin (molemmissa α on sivujen b ja c välinen kulma ja b hypotenuusa):



Tutkitaan, mihin muotoon kosinilause saadaan ylemmän kolmion tapauksessa.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad || \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \frac{b}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b^2$$

$$a^2 = -b^2 + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

joka on sama kuin Pythagoraan lause.

Alemman kolmion tapauksessa kosinilause saadaan seuraavaan muotoon:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad || \cos \alpha = \frac{c}{b}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \frac{c}{b}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c^2$$

$$a^2 = b^2 - c^2$$

$$a^2 + c^2 = b^2$$

joka on sama kuin Pythagoraan lause.

Siis kosinilause on suorakulmaisessa kolmiossa sama kuin Pythagoraan lause.

1.4. Tason suoran $y = ax + b$ kulmakerroin on a .

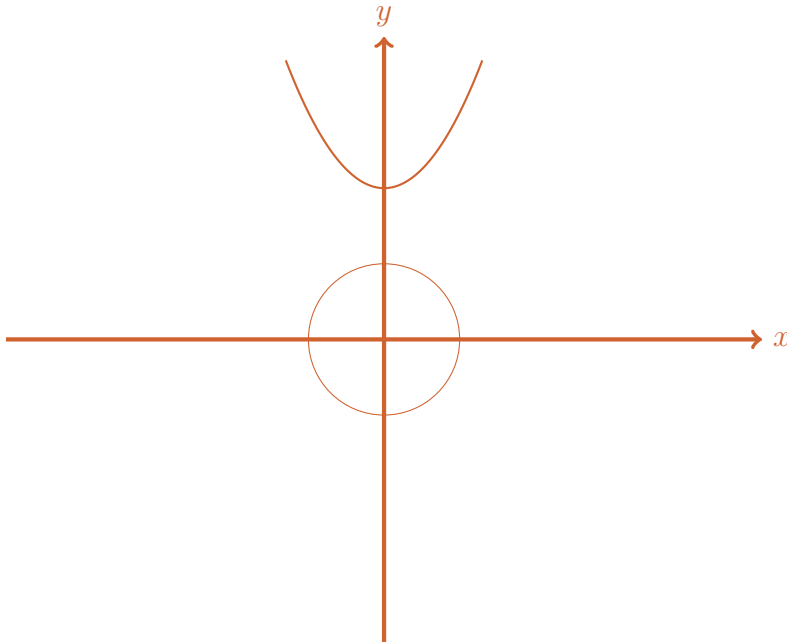
Suoran yhtälöstä muodostetun funktion $f(x) = ax + b$ derivaatafunkti on $f'(x) = a$. Derivaatafunktion arvo kohdassa x ilmoittaa funktion kuvaajalle kohtaan x piirretyn tangentin kulmakertoimen. Koska funktion kuvaaja on suora, kuvaajalle piirretty tangentti on sama kuin funktion kuvaaja, ja tangentin kulmakerroin $f'(x)$ on sama kuin suoran kulmakerroin a .

1.5. Vektorien $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ pistetulo on

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})).$$

Vektorien $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ pituudet ovat reaalitylukuja. Vektorien välisen kulman kosini on reaalityluku. Kun kerrotaan keskenään kolme reaalitylukua, saadaan aina reaalityluku, mutta ei välttämättä kokonaislukua.

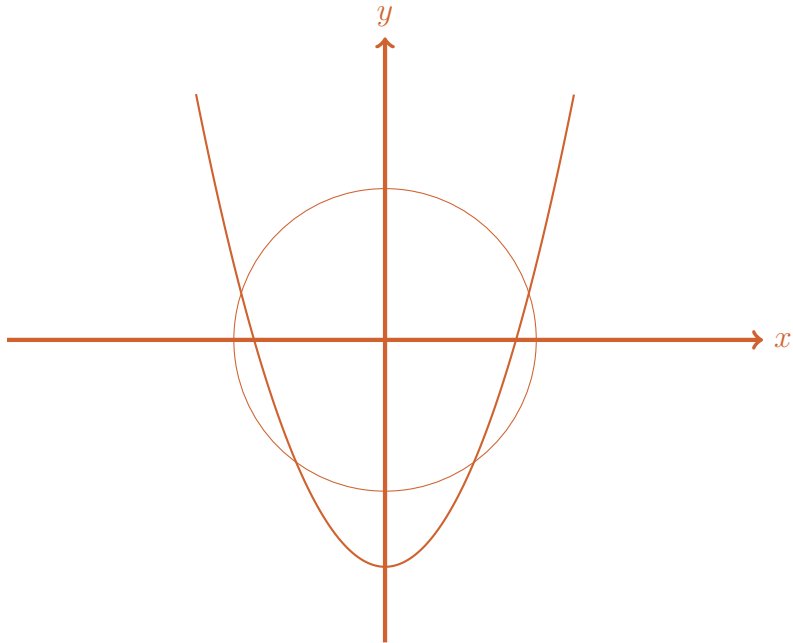
- 1.6. Alla olevasta kuvasta nähdään, että leikkauspisteitä ei välttämättä ole yhtään. Kuvassa on origokeskeinen ympyrä, jonka säde on 1, ja paraabeli $y = x^2 + 2$.



Vastausvaihtoehdot "tasan kaksi leikkauspistettä" ja "tasan neljä leikkauspistettä" ovat siis väärä.

Kun oletetaan, että vastausvaihtoehtojen joukossa on oikea vastaus, niin leikkauspisteiden määrän on oltava korkeintaan kaksi tai korkeintaan neljä.

Alla olevasta kuvasta nähdään, että paraabeli voi leikata ympyrän neljässä pisteessä. Kuvassa on origokeskeinen ympyrä, jonka säde on 2, ja paraabeli $y = x^2 - 3$.



Leikkauspisteitä on siis korkeintaan neljä.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

2. Yhdistely (12 p.)

Aineisto:

2. A [Kuva: Funktioiden kuvaajat](#)

Alla on annettu 12 yhtälöä. Yhdeksää niistä vastaa jokin kuvassa [2.A](#) annetuista kuvaajista. Yhdistä kukin yhtälö sitä vastaavaan kuvaajaan tai merkitse, että sellaista ei ole.

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 1 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

1. $y = x^2$ (1 p.)

2. $y = x^4$ (1 p.)

3. $y = x^3$ (1 p.)

4. $y = x^2 + 1$ (1 p.)

5. $y = (x + 1)^2$ (1 p.)

6. $y = 2x^2$ (1 p.)

7. $y = \cos x$ (1 p.)

8. $y = \sin x$ (1 p.)

9. $y = -2 \cos x + 2$ (1 p.)

10. $y = -\cos(2x)$ (1 p.)

11. $y = 2 \sin(2x)$ (1 p.)

12. $y = 2 \sin x$ (1 p.)

Vastauslaatikoiden vaihtoehdot: "Kuvaaja 1", "Kuvaaja 2", "Kuvaaja 3", "Kuvaaja 4", "Kuvaaja 5", "Kuvaaja 6", "Kuvaaja 7", "Kuvaaja 8", "Kuvaaja 9", "Kuvaaja 10", "Kuvaaja 11", "Kuvaaja 12", "Ei kuvaajaa"

Ratkaisu.

Vastaukset:

1. Kuvaaja 9 1 p. (yht. 1 p.)
2. Kuvaaja 2 1 p. (yht. 2 p.)
3. Ei kuvaajaa 1 p. (yht. 3 p.)
4. Kuvaaja 12 1 p. (yht. 4 p.)
5. Kuvaaja 4 1 p. (yht. 5 p.)
6. Kuvaaja 5 1 p. (yht. 6 p.)
7. Kuvaaja 7 1 p. (yht. 7 p.)
8. Kuvaaja 1 1 p. (yht. 8 p.)
9. Kuvaaja 10 1 p. (yht. 9 p.)
10. Ei kuvaajaa 1 p. (yht. 10 p.)
11. Kuvaaja 3 1 p. (yht. 11 p.)
12. Ei kuvaajaa 1 p. (yht. 12 p.)

Perustelut:

1. Yhtälöä $y = x^2$ vastaava kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka kulkee pisteiden $(0, 0)$, $(1, 1)$ ja $(2, 4)$ kautta, sillä

$$y(0) = 0^2 = 0$$

$$y(1) = 1^2 = 1$$

$$y(2) = 2^2 = 4.$$

Aineiston kuvaajista tähän sopii kuvaaja 9.

2. Yhtälöä $y = x^4$ vastaava kuvaaja näyttää hieman samalta kuin kohdan 1 paraabeli, mutta y :n arvot ovat neljännen potenssin takia pienempiä kuin paraabelissa $y = x^2$, kun $-1 < x < 1$, ja suurempia kuin paraabelissa $y = x^2$, kun $x > 1$ tai $x < -1$. Kuvaaja kulkee mm. pisteiden $(0, 0)$ ja $(1, 1)$ kautta, sillä

$$y(0) = 0^4 = 0$$

$$y(1) = 1^4 = 1.$$

Aineiston kuvaajista tähän sopii kuvaaja 2.

3. Yhtälöä $y = x^3$ vastaavassa kuvaajassa y on parittoman potenssin takia negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$. Ainoa tällainen kuvaaja aineistossa on kuvaaja 6. Toisaalta yhtälöä $y = x^3$ vastaava kuvaaja kulkee pisteen $(1, 1)$ kautta, sillä $y = 1^3 = 1$. Aineiston kuvaaja 6 ei kulje pisteen $(1, 1)$ kautta, joten sekään ei ole yhtälöä $y = x^3$ vastaava kuvaaja. Yhtälölle $y = x^3$ ei siis löydy kuvaajaa aineiston vaihtoehtoista.
4. Yhtälöä $y = x^2 + 1$ vastaava kuvaaja on muuten samanlainen kuin kohdan 1 yhtälöä $y = x^2$ vastaava ylöspäin aukeava paraabeli, mutta vakiotermi $+1$ takia se on kussakin kohdassa yhden korkeammalla koordinaatistossa. Aineiston kuvaajista tähän sopii kuvaaja 12.
5. Yhtälöä $y = (x + 1)^2$ vastaava kuvaaja on muuten samanlainen kuin kohdan 1 yhtälöä $y = x^2$ vastaava ylöspäin aukeava paraabeli, mutta paraabelin huippu on kohdassa $x = -1$. Tämän voi päätellä siitä, että suluissa oleva lauseke $x + 1$ on nolla, kun $x = -1$, ja muilla muuttujan x arvoilla neliö $(x + 1)^2$ on positiivinen. Aineiston kuvaajista tähän sopii kuvaaja 4.
6. Yhtälöä $y = 2x^2$ vastaava kuvaaja on muuten samanlainen kuin kohdan 1 yhtälöä $y = x^2$ vastaava ylöspäin aukeava paraabeli, mutta kertoimen 2 takia kukin muuttujan y -arvo on kohdan 1 kuvaajaan verrattuna kaksinkertainen. Aineiston kuvaajista tähän sopii kuvaaja 5.
7. Tiedetään, että $\cos(0) = 1$. Lisäksi kohdissa $x = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$ ja $x = -\frac{\pi}{2} \approx -1,57$ kosinin arvo on nolla. Näiden arvojen lisäksi tiedetään, että kosinin kuvaaja näyttää aaltomaiselta. Aineiston kuvaajista tähän sopii kuvaaja 7.
8. Tiedetään, että $\sin(0) = 0$. Lisäksi kohdassa $x = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$ sinin arvo on 1 ja kohdassa $x = -\frac{\pi}{2} \approx -1,57$ sinin arvo on -1 . Näiden arvojen lisäksi tiedetään,

että sinin kuvaaja näyttää aaltomaiselta. Aineiston kuvaajista tähän sopii kuvaaja 1.

9. Kosinin arvot vaihtelevat välillä $[-1, 1]$, joten lausekkeen $-2 \cos(x) + 2$ pienin arvo on $-2 \cdot 1 + 2 = 0$ ja suurin arvo on $-2 \cdot (-1) + 2 = 4$. Arvot siis vaihtelevat välillä $[0, 4]$.

Kun $x = -\pi$, lausekkeen arvo on $-2 \cos(-\pi) + 2 = -2 \cdot (-1) + 2 = 4$. Kun $x = 0$, lausekkeen arvo on $-2 \cdot \cos(0) = -2 \cdot 1 + 2 = 0$. Kun $x = \pi$, lausekkeen arvo on $-2 \cos(\pi) + 2 = -2 \cdot (-1) + 2 = 4$.

Näin ollen yhtälöä $y = -2 \cos(x) + 2$ vastaava kuvaaja kulkee aaltomaisesti siten, että y -koordinaatti on välillä $[0, 4]$ ja kuvaaja kulkee pisteiden $(-\pi, 4)$, $(0, 0)$ ja $(\pi, 4)$ kautta. Aineiston kuvaajista tähän sopii kuvaaja 10.

10. Kun $x = 0$, lausekkeen $-\cos(2x)$ arvo on $-\cos(2 \cdot 0) = -\cos(0) = -1$. Yhtälöä $y = -\cos(2x)$ vastaava kuvaaja kulkee siis pisteen $(0, -1)$ kautta. Yksikään aineiston kuvaajista ei kulje tämän pisteen kautta, joten yhtälölle $y = -\cos(2x)$ ei siis löydy kuvaajaa aineiston vaihtoehdoista.
11. Yhtälöä $y = 2 \sin(2x)$ vastaava kuvaaja näyttää samankaltaiselta kuin yhtälöä $y = \sin(x)$ vastaava kuvaaja 1 kohdassa 8. Kertoimen 2 takia kuvaaja on kaksi kertaa niin korkea kuin yhtälöä $y = \sin(x)$ vastaava kuvaaja, eli yhtälöä $y = 2 \sin(2x)$ vastaavassa kuvaajassa y :n arvot vaihtelevat aaltomaisesti välillä $[-2, 2]$. Kun $x = 0$, lausekkeen arvo on $2 \sin(2 \cdot 0) = 2 \sin(0) = 0$. Kun $x = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$, lausekkeen arvo on $2 \sin(2 \cdot \frac{\pi}{2}) = 2 \sin(\pi) = 0$. Aineiston kuvaajista tähän sopii kuvaaja 3.
12. Yhtälöä $y = 2 \sin(x)$ vastaava kuvaaja on muuten identtinen yhtälöä $y = \sin(x)$ vastaavan kuvaajan 1 (kohdassa 8) kanssa, mutta kertoimen 2 takia kukin y :n arvo on kaksinkertainen. Aineiston kuvaajissa ei ole tähän sopivaa kuvaajaa.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

3. Ratakisko (12 p.)

Aineisto:

3. A [Kuva: Ratakisko](#)

Kymmenen metriä pitkä museoratakisko on vääntynyt lämpölaajenemisen vuoksi mutkalle, mutta sen päät ovat pysyneet paikoillaan (katso liioiteltu kuva [3.A](#) tilanteesta). Kiskon poikkeama sen alkuperäisestä sijainnista kohtisuoraan mitattuna on muotoa

$$f(x) = \frac{x^3 - 15x^2 + 50x}{1000},$$

kun x on etäisyys kiskon alkupäästä. Missä kohdissa kiskon poikkeama sen alkuperäisestä asemasta on suurin? Määritä myös suurin poikkeama. Muuttujan x ja poikkeaman yksikkönä on metri.

Ratkaisu.

$$f(x) = \frac{x^3 - 15x^2 + 50x}{1000}.$$

Pisteytyksestä: YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 23.3.2023) oli annettu kaksi ensimmäistä pistettä funktion f nollakohtien päättelemisestä ja funktion merkkien päättelemisestä aineiston kuvan avulla. Tämä ei kuitenkaan ollut ratkaisun kannalta tarpeen, joten teimme pisteytysehdotuksen hieman hyvän vastauksen piirteistä poikkeavasti. Suosittelemme kuitenkin antamaan kaksi ensimmäistä pistettä jo siitä, että opiskelija on tehnyt kuvan avulla nämä havainnot, jos opiskelija on niin tehnyt.

Derivoidaan f .

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 30x + 50}{1000}. \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)}$$

Lisäselitys:

$$D \frac{x^3 - 15x + 50x}{1000} = \frac{1}{1000} D(x^3 - 15x^2 + 50x)$$

Termit voidaan derivoida kukin erikseen derivointikaavan $D x^n = nx^{n-1}$ ja derivointikaavan $D x = 1$ avulla seuraavasti:

$$D x^3 = 3x^{3-1} = 3x^2$$

$$D(-15x^2) = -15 \cdot D x^2 = -15 \cdot 2x^{2-1} = -30x$$

$$D(50x) = 50 \cdot D x = 50.$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{3x^2 - 30x + 50}{1000} = 0 \quad || \cdot 1000$$

$$3x^2 - 30x + 50 = 0 \quad (1 \text{ p. (yht. 3 p.)})$$

Tämä on muotoa $ax^2 + bx + c = 0$ oleva toisen asteen yhtälö, jossa kertoimet ovat $a = 3$, $b = -30$ ja $c = 50$. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla saadaan

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 50}}{2 \cdot 3} \quad (1 \text{ p. (yht. 4 p.)})$$

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 600}}{6}$$

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{300}}{6}$$

$$x = 7,886 \dots \quad \text{tai} \quad x = 2,113 \dots \quad (2 \text{ p. (yht. 6 p.)})$$

$$x \approx 7,9 \quad \text{tai} \quad x \approx 2,1 \quad (2 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

Kuvaajan perusteella suurimmat poikkeamat ovat derivaatan nollakohdissa. Lasketaan poikkeamat.

$$f(7,886 \dots) = \frac{(7,886 \dots)^3 - 15 \cdot (7,886 \dots)^2 + 50 \cdot 7,886 \dots}{1000}$$

$$= -0,04811 \dots$$

$$\approx -0,048 \quad (2 \text{ p. (yht. 10 p.)})$$

$$f(2,113 \dots) = \frac{(2,113 \dots)^3 - 15 \cdot (2,113 \dots)^2 + 50 \cdot 2,113 \dots}{1000}$$

$$= 0,04811 \dots$$

$$\approx 0,048 \quad (2 \text{ p. (yht. 12 p.)})$$

Vastaus: Kiskon poikkeama alkuperäisestä asemasta on suurin etäisyyksillä 2,1 ja 7,9 metriä kiskon alkupäästä. Molemmissa kohdissa poikkeaman suuruus on 0,048 metriä.

Huomaa! YTL:n hyvän vastauksen piirteiden (luettu 23.3.2023) ratkaisu vaikutti siltä, että lausekkeeseen $f(x)$ oli sijoitettu derivaatan nollakohtien tarkat arvot, ja lauseke oli sievennetty. Tehtävä ei kuitenkaan käsitellyt ideaalista matemaattista tilannetta, vaan tosielämän tilannetta fysikaalisin yksiköin. Lisäksi lausekkeen $f(x)$ arvon sieventäminen tarkoin arvoin ilman CAS-ohjelmaa olisi tässä tehtävässä varsin työlästä. Mielestämme tämän takia tehtävässä riittää laskea poikkeamat riittävän tarkoin likiarvoin.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

4. Suoran etäisyys kahdesta pisteestä (12 p.)

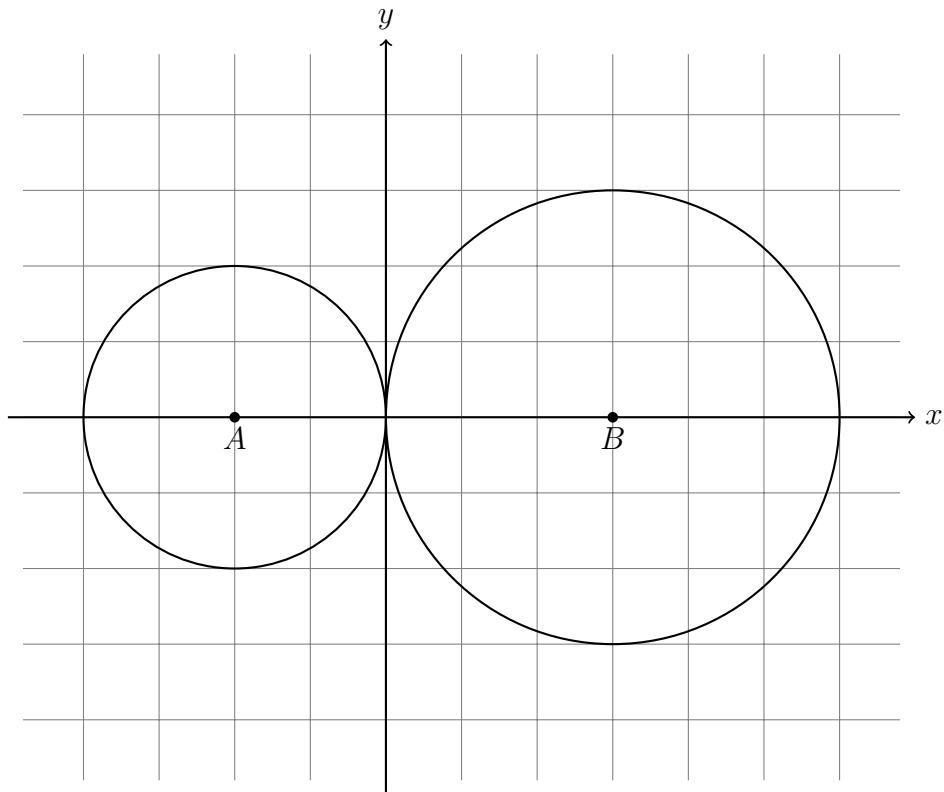
Määritä kaikki suorat, joiden etäisyys pisteestä $A = (-2, 0)$ on 2 ja etäisyys pisteestä $B = (3, 0)$ on 3.

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Suorat, joiden etäisyys pisteestä $A = (-2, 0)$ on 2, sivuavat ympyrää, jonka keskipiste on A ja säde on 2. Vastaavasti suorat, joiden etäisyys pisteestä $B = (3, 0)$ on 3, sivuavat ympyrää, jonka keskipiste on B ja säde on 3.

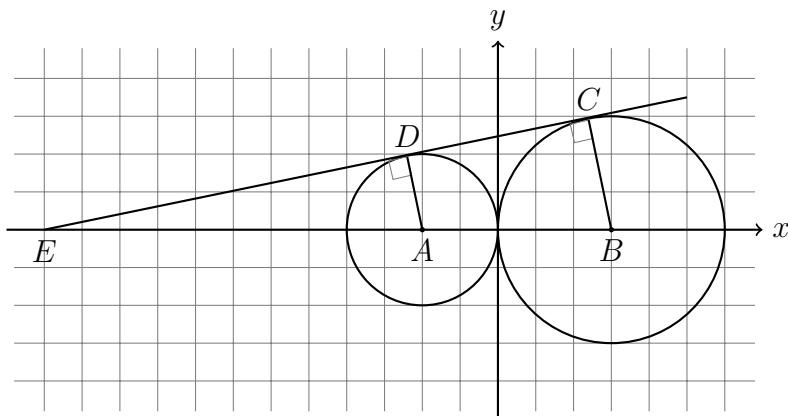
Kuvia ei vaadita ratkaisussa, mutta niiden piirtäminen itseä varten suttupaperille on hyvä ajatus.



Yksi suorista on $x = 0$ 1 p. (yht. 1 p.). Tämän lisäksi on kaksi muuta suoraa, jotka toteuttavat annetut ehdot. Toinen sivuaa ympyröitä x -akselin yläpuolella ja toinen sivuaa

ympyröitä x -akselin alapuolella. Suorat ovat symmetriset x -akselin suhteen. Tarkastellaan ylemmää suoraa. 2 p. (yht. 3 p.)

Merkitään ylemmän suoran ja B -keskisen ympyrän leikkauspistettä C :llä, ylemmän suoran ja A -keskisen ympyrän leikkauspistettä D :llä ja ylemmän suoran ja x -akselin leikkauspistettä E :llä.



Koska suora sivuaa ympyröitä, suoran ja ympyröiden säteiden välinen kulma on suorakulma. Näin ollen kolmiot ADE ja BCE ovat suorakulmaisia kolmioita, joilla on yhteinen kulma E . Kolmiot ovat siis yhdenmuotoiset 2 p. (yht. 5 p.). Muodostetaan verranto:

$$\frac{AD}{BC} = \frac{EA}{EB}$$

$$\frac{AD}{BC} = \frac{EA}{EA + AB}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{EA}{EA + 5} \quad || \cdot 3$$

$$2 = 3 \cdot \frac{EA}{EA + 5} \quad || \cdot (EA + 5)$$

$$2(EA + 5) = 3EA$$

$$2EA + 10 = 3EA$$

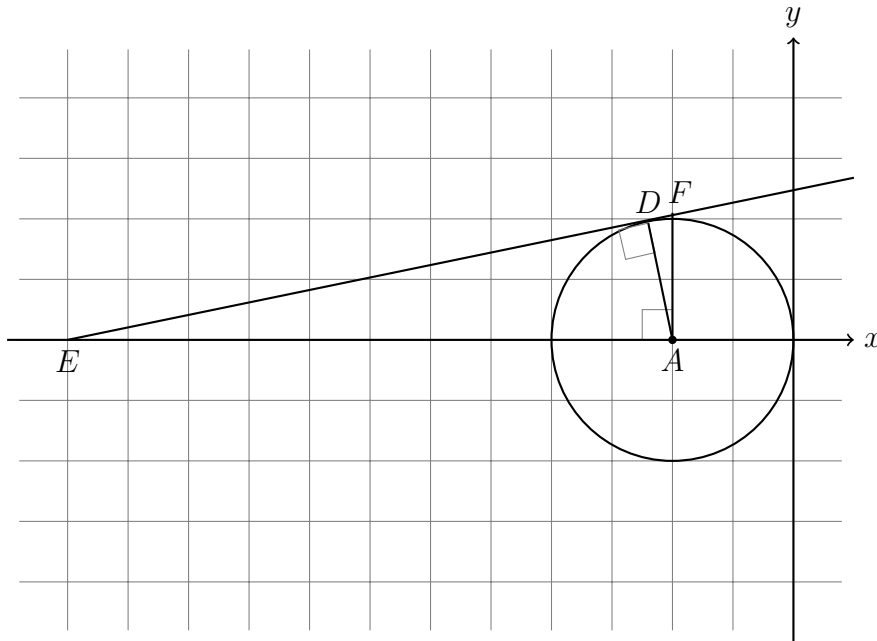
$$10 = 3EA - 2EA$$

$$10 = EA$$

$$EA = 10$$

Pisteen E etäisyys origosta on siis $10 + 2 = 12$, eli suora siis kulkee pisteen $E = (-12, 0)$ kautta. 1 p. (yht. 6 p.)

Merkitään ylemmän suoran kohdassa $x = -2$ olevaa pistettä F :llä.



Suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{AF}{EA}.$$

Kolmio AFE on suorakulmainen ja sillä on kolmion ADE kanssa yhteinen kulma E . Kolmiot AFE ja ADE ovat siis yhdenmuotoiset. 1 p. (yht. 7 p.) Saadaan siis verranto

$$\frac{AF}{EA} = \frac{AD}{ED},$$

eli suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{AD}{ED}. \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

Ratkaistaan janan ED pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$AD^2 + ED^2 = EA^2$$

$$2^2 + ED^2 = 10^2$$

$$ED^2 = 10^2 - 2^2$$

$$ED^2 = 96$$

$$ED = (\pm) \sqrt{96}$$

$$ED = 4\sqrt{6} \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

Suoran kulmakerroin on siis

$$k = \frac{AD}{ED} = \frac{2}{4\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)})$$

Ratkaistaan suoran yhtälö.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 0 = \frac{1}{2\sqrt{6}} \cdot (x - (-12))$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{6}}(x + 12)$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{6}}x + \frac{12}{2\sqrt{6}}$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{6}}x + \frac{6}{\sqrt{6}}$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{6}}x + \sqrt{6}. \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)})$$

Alempi suora on x -akselin suhteen symmetrinen ylemmän suoran kanssa, joten sen yhtälö on

$$y = -\frac{1}{2\sqrt{6}}x - \sqrt{6}. \quad (1 \text{ p. (yht. 12 p.)})$$

Vastaus: Kysytyt suorat ovat $x = 0$, $y = \frac{1}{2\sqrt{6}}x + \sqrt{6}$ ja $y = -\frac{1}{2\sqrt{6}}x - \sqrt{6}$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Yksi suorista on $x = 0$. 1 p. (yht. 1 p.) Tämän lisäksi on kaksi muuta suoraa, jotka toteuttavat annetut ehdot.

Merkitään

$$d_1 = 2$$

$$d_2 = 3$$

Suoran yhtälö on muotoa

$$y = kx + b$$

$$kx - y + b = 0$$

Käytetään kaavaa pisteen etäisyydelle suorasta.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

missä $A = k$, $B = -1$ ja $C = b$. Saadaan yhtälöpari

$$d_1 = \frac{|-2k + b|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} \quad (1)$$

$$d_2 = \frac{|3k + b|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} \quad (2)$$

2 p. (yht. 3 p.)

Ratkaistaan k ja b .

$$2 = \frac{|-2k + b|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$2\sqrt{k^2 + 1} = |-2k + b| \quad || \quad ()^2, \quad 2\sqrt{k^2 + 1} > 0$$

$$4(k^2 + 1) = (-2k + b)^2$$

$$4k^2 + 4 = 4k^2 - 4bk + b^2$$

$$4 + 4kb = b^2 \quad (3)$$

2 p. (yht. 5 p.)

Yhtälöstä (2) saadaan

$$3 = \frac{|3k + b|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}}$$

$$3\sqrt{k^2 + 1} = |3k + b| \quad ||()^2, \quad 3\sqrt{k^2 + 1} > 0$$

$$9(k^2 + 1) = (3k + b)^2$$

$$9k^2 + 9 = 9k^2 + 6kb + b^2 \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)} \quad || \text{ sij. (3)}$$

$$9 = 6kb + 4 + 4kb$$

$$5 = 10kb$$

$$k = \frac{1}{2b}, \quad b \neq 0 \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

Ratkaistaan b yhtälöstä (3).

$$4 + 4 \cdot \frac{1}{2b}b = b^2$$

$$b = \pm\sqrt{6} \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

Ratkaisut ovat siis $b = -\sqrt{6}$ ja $k = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$ tai $b = \sqrt{6}$ ja $k = \frac{1}{2\sqrt{6}}$. 2 p. (yht. 10 p.)

Suorien yhtälöt ovat siis

$$y = -\frac{1}{2\sqrt{6}}x - \sqrt{6} \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{6}}x + \sqrt{6} \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: Kysytyt suorat ovat $x = 0$, $y = \frac{1}{2\sqrt{6}}x + \sqrt{6}$ ja $y = -\frac{1}{2\sqrt{6}}x - \sqrt{6}$.

Ratkaisuvaihtoehto 3

Yksi suorista on y -akselin suuntainen suora $x = 0$. 1 p. (yht. 1 p.) Selvitetään, onko muita suoria, jotka toteuttavat annetut ehdot.

Kun suoran etäisyys pisteestä $(-2, 0)$ on 2, niin suora sivuaa ympyrää, jonka keskipiste on $(-2, 0)$ ja säde 2, eli suoralla ja ympyrällä on täsmälleen yksi yhteinen piste. Vastaavasti kun suoran etäisyys pisteestä $(3, 0)$ on 3, niin suora sivuaa ympyrää,

jonka keskipiste on $(3, 0)$ ja säde 3. 1 p. (yht. 2 p.) Näiden ympyröiden yhtälöt ovat

$$(x + 2)^2 + y^2 = 2^2$$

ja

$$(x - 3)^2 + y^2 = 3^2. \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Kun suora ei ole y -akselin suuntainen, sen yhtälö on $y = kx + b$. Suora sivuaa edellä mainittuja ympyröitä, jos yhtälöllä

$$(x + 2)^2 + (kx + b)^2 = 4$$

on täsmälleen yksi ratkaisu ja yhtälöllä

$$(x - 3)^2 + (kx + b)^2 = 9$$

on täsmälleen yksi ratkaisu. 1 p. (yht. 4 p.) Kummankin yhtälön diskriminantin on siis oltava nolla. 1 p. (yht. 5 p.) Muokataan nämä yhtälöt toiseen muotoon.

$$(x + 2)^2 + (kx + b)^2 = 2^2$$

$$x^2 + 4x + 4 + k^2x^2 + 2bkx + b^2 = 4$$

$$x^2 + k^2x^2 + 4x + 2bkx + b^2 = 0$$

$$(1 + k^2)x^2 + (4 + 2bk)x + b^2 = 0$$

ja

$$(x - 3)^2 + (kx + b)^2 = 9$$

$$x^2 - 6x + 9 + k^2x^2 + 2bkx + b^2 = 9$$

$$(1 + k^2)x^2 + (-6 + 2bk)x + b^2 = 0.$$

Ylemmän yhtälön diskriminantti on

$$D_1 = (4 + 2bk)^2 - 4(1 + k^2)b^2$$

ja alemman yhtälön diskriminantti

$$D_2 = (-6 + 2bk)^2 - 4(1 + k^2)b^2.$$

Koska ylemmän yhtälön diskriminantti on nolla, saadaan

$$(4 + 2bk)^2 - 4(1 + k^2)b^2 = 0 \quad (1 \text{ p. (yht. 6 p.)})$$

$$16 + 16bk + 4b^2k^2 - 4b^2 - 4k^2b^2 = 0$$

$$16 + 16bk - 4b^2 = 0$$

Jos $b = 0$, yhtälö saa muodon $16 = 0$, joka on epätosi riippumatta k :n arvosta. Jos taas $b \neq 0$, niin yhtälöstä voidaan ratkaista k seuraavasti:

$$16 + 16bk - 4b^2 = 0$$

$$16bk = 4b^2 - 16 \quad || : 16b$$

$$k = \frac{4b^2 - 16}{16b}$$

$$k = \frac{b^2 - 4}{4b} \quad (1 \text{ p. (yht. 7 p.)})$$

Koska alemman yhtälön diskriminantti on nolla, saadaan

$$(-6 + 2bk)^2 - 4(1 + k^2)b^2 = 0 \quad (1 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

$$36 - 24bk + 4b^2k^2 - 4b^2 - 4b^2k^2 = 0$$

$$36 - 24bk - 4b^2 = 0 \quad || k = \frac{b^2 - 4}{4b}$$

$$36 - 24b \cdot \frac{b^2 - 4}{4b} - 4b^2 = 0$$

$$36 - 6 \cdot (b^2 - 4) - 4b^2 = 0$$

$$36 - 6b^2 + 24 - 4b^2 = 0$$

$$-10b^2 + 60 = 0$$

$$-10b^2 = -60 \quad || : (-10)$$

$$b^2 = 6$$

$$b = \pm\sqrt{6} \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

Lasketaan vastaavat kulmakertoimen k arvot.

$$\begin{aligned}k &= \frac{b^2 - 4}{4b} \\&= \frac{(\pm\sqrt{6})^2 - 4}{4 \cdot (\pm\sqrt{6})} \\&= \frac{6 - 4}{\pm 4\sqrt{6}} \\&= \frac{2}{\pm 4\sqrt{6}} \\&= \pm \frac{1}{2\sqrt{6}} \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}\end{aligned}$$

Suoran yhtälö on siis

$$y = \frac{1}{2\sqrt{6}}x + \sqrt{6} \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

tai

$$y = -\frac{1}{2\sqrt{6}}x - \sqrt{6}. \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: Kysytyt suorat ovat $x = 0$, $y = \frac{1}{2\sqrt{6}}x + \sqrt{6}$ ja $y = -\frac{1}{2\sqrt{6}}x - \sqrt{6}$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

5. Taikaneliö (12 p.)

Aineisto:

5. A [Kuva: Taikaneliö](#)

Kuparikaiverrus Melankolia I (katso kuva [5.A](#)) on saksalaisen Albrecht Dürerin tunnetuimpia teoksia. Teos sisältää 4×4 -taikaneliön, jossa jokaisen vaaka- ja pystyriivin lukujen summa on 34. Alla olevassa ruudukossa neljä taikaneliön ruutua on esitetty kahden tuntemattoman luvun x ja y avulla. Kun luvut x ja y asetetaan peräkkäin, saadaan tuloksena teoksen valmistumisvuosi. Ratkaise luvut x ja y ja kirjoita kyseessä oleva vuosiluku.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	$\frac{y-2}{2}$	$\frac{x-1}{2}$	12
4	x	y	1

Ratkaisu.

Tehtävänannon mukaan kunkin vaakarivin lukujen summa on 34 ja kunkin pystyriivin lukujen summa on 34. Muodostetaan yhtälöt toisen ja kolmannen pystyriivin avulla. Yhtälöt voisi muodostaa myös käyttämällä yhtä pystyriiviä ja yhtä vaakariviä. Huomaa kuitenkin, että molempia vaakarivejä käyttämällä muodostuu kaksi yhtäpitävää yhtälöä, eli niiden avulla ei löydy ratkaisua.

$$3 + 10 + \frac{y-2}{2} + x = 34$$

$$2 + 11 + \frac{x-1}{2} + y = 34 \quad \text{6 p. (yht. 6 p.)}$$

Ratkaistaan yhtälöpari laskinohjelman avulla.

$$x = 15$$

$$y = 14. \quad \text{3 p. (yht. 9 p.)}$$

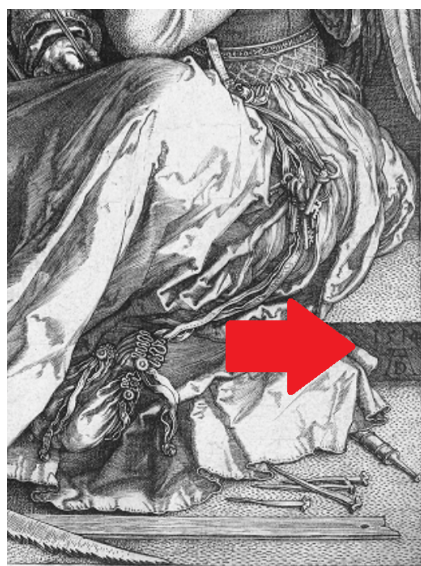
Tarkistetaan, että ratkaisut toteuttavat myös kolmannen ja neljännen vaakarivin yhtälöt.

$$9 + \frac{y-2}{2} + \frac{x-1}{2} + 12 = 9 + \frac{14-2}{2} + \frac{15-1}{2} + 12$$
$$= 34$$

$$4 + x + y + 1 = 4 + 15 + 14 + 1$$
$$= 34. \quad \text{2 p. (yht. 11 p.)}$$

Tehtävässä oli kerrottu, että kyseessä on taikaneliö, joten oli vaikea tietää, että jäljelle jäävien kahden yhtälön tarkistaminen vaaditiin. YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 23.3.2023) kuitenkin jäljelle jäävien yhtälöiden tarkistamisesta sai kaksi pistettä.

Kysytty vuosiluku on siis 1514. 1 p. (yht. 12 p.) Tehtävässä sanottiin, että "luvut x ja y asetetaan peräkkäin". Tästä tuli päätellä, että luku x tulee ensin, eli oikea vuosiluku on 1514 eikä 1415. Tämä ei kuitenkaan ole sanamuodosta päätellen täysin ilmeistä. Tarkkasilmäiset saattoivat kuitenkin huomata, että oikea vuosiluku löytyi myös aineiston kuvasta.



Vastaus: Ratkaisu on $x = 15$ ja $y = 14$. Kysytty vuosiluku on 1514.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

6. Raketin nokkakartio (12 p.)

Erään raketin kärki, eli niin sanottu nokkakartio, saadaan, kun alaspäin aukeava paraabeli pyörähtää symmetria-akselinsa ympäri. Kärjen korkeus on 4,5 metriä, ja sen halkaisija pohjan tasolla on 3,3 metriä. Määritä kärjen tilavuus.

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Taulukoista löytyvän kaavan mukaan pyörähdysparaboloidin tilavuus on

$$V = \frac{1}{2}\pi r^2 h, \quad (4 \text{ p. (yht. 4 p.)})$$

missä r on pohjan säde ja h on korkeus. 1 p. (yht. 5 p.) Tehtävän nokkakartio on pyörähdysparaboloidi, 1 p. (yht. 6 p.) jonka korkeus ja säde ovat metreinä

$$h = 4,5 \quad (1 \text{ p. (yht. 7 p.)})$$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{3,3}{2} = 1,65. \quad (1 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

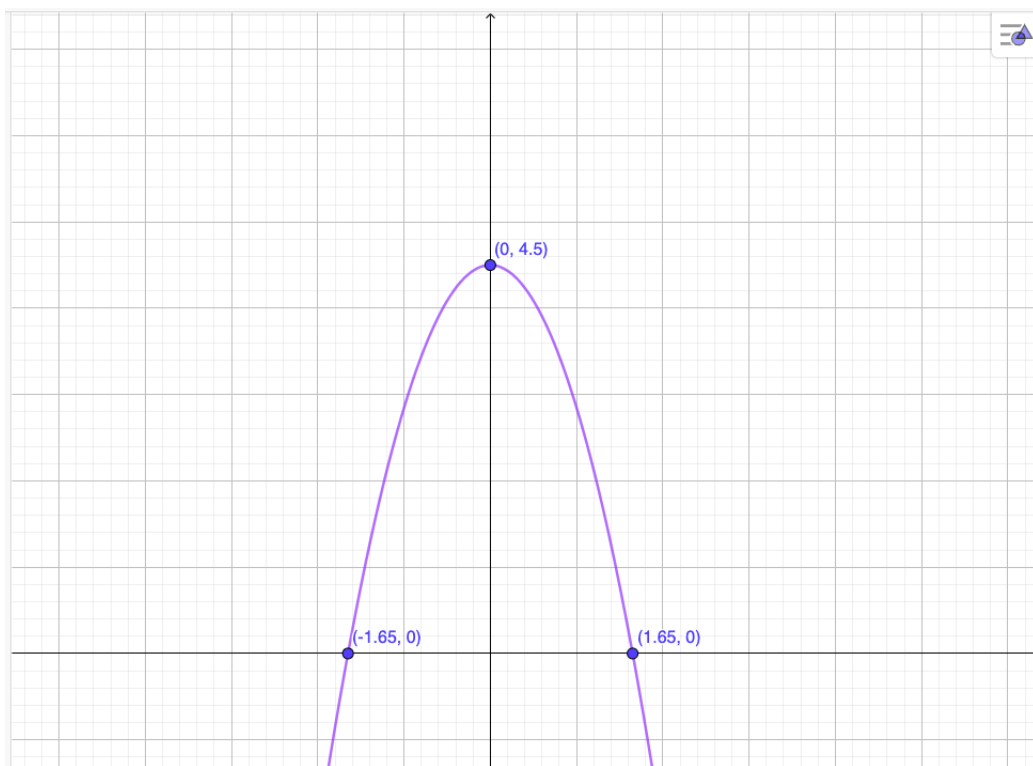
Lasketaan tilavuus kuutiometreinä.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\pi \cdot 1,65^2 \cdot 4,5 \\ &= 19,2442 \dots \\ &\approx 19 \end{aligned}$$

Vastaus: Kärjen tilavuus on noin 19 kuutiometriä. 4 p. (yht. 12 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 2

Määritetään ensin pyörähdyskappaleen muodostavaa paraabelia kuvaava funktio. Sijoitetaan paraabeli koordinaatistoon ja valitaan akseleiden yksiköiksi 1 m. Valitaan paraabeliksi y -akselin suhteen symmetrinen alaspäin aukeava paraabeli. Sijoitetaan nokkakartion pohja x -akselille, jolloin kartiota kuvaavan paraabelin huippu asettuu nokkakartion korkeuden perusteella pisteeseen $(0; 4,5)$. Lisäksi nokkakartion pohjan halkaisija on 3,3 metriä, joten paraabelin nollakohdat ovat symmetrian perusteella $x_1 = -1,65$ ja $x_2 = 1,65$. Piirretään tilanteesta apukuva. 2 p. (yht. 2 p.)



Paraabelin yhtälö on muotoa

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Valitaan paraabelilta kolme pistettä ja muodostetaan yhtälöryhmä, jonka avulla voidaan ratkaista parametrien a , b ja c arvot. Valitaan pisteiksi $(0; 4,5)$, $(-1,65; 0)$ ja $(1,65; 0)$. **Pidetään koordinaatiston yksikkönä 1 m, mutta ratkaistaan tehtävä ilman yksiköitä.**

$$4,5 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$0 = a \cdot 1,65^2 + b \cdot 1,65 + c \quad (1)$$

$$0 = a \cdot (-1,65)^2 + b \cdot (-1,65) + c \quad \text{2 p. (yht. 4 p.)}$$

Ensimmäisen yhtälön perusteella $c = 4,5$. Lasketaan kaksi jälkimmäistä yhtälöä puolittain yhteen, jolloin saadaan yhtälö

$$0 = a \cdot 1,65^2 + a \cdot 1,65^2 + 9.$$

Parametriksi a saadaan

$$a = \frac{-4,5}{1,65^2}.$$

Ratkaistaan lopuksi parametrin b arvo. Sijoitetaan parametrien a ja c arvot yhtälöön (1).

$$0 = \frac{-4,5}{1,65^2} \cdot 1,65^2 + b \cdot 1,65 + 4,5$$

$$0 = b \cdot 1,65$$

$$b = 0 \quad (2 \text{ p. (yht. 6 p.)})$$

Paraabelin yhtälö on siis

$$y = \frac{-4,5}{1,65^2} \cdot x^2 + 4,5.$$

Ratkaistaan seuraavaksi paraabelin yhtälö muuttujan x suhteen.

$$y - 4,5 = \frac{-4,5}{1,65^2} \cdot x^2$$

$$x = (\pm) \sqrt{\frac{(y - 4,5) \cdot 1,65^2}{-4,5}} \quad (2 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

Tilanteessa y kuuluu välille $[0; 4,5]$, joten juuren sisällä oleva lauseke on varmasti ei-negatiivinen.

Tarkastellaan vain x -akselin oikealle puolelle ja y -akselin yläpuolelle jäävää osaa,

$$x = \sqrt{\frac{(y - 4,5) \cdot 1,65^2}{-4,5}}.$$

Nokkakartio muodostuu, kun tämä kuvaaja pyörähtää y -akselin ympäri. Pyörähdyskappaleen tilavuudeksi saadaan

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{4,5} \left(\sqrt{\frac{(y - 4,5) \cdot 1,65^2}{-4,5}} \right)^2 dy \\ &= \pi \int_0^{4,5} \frac{(y - 4,5) \cdot 1,65^2}{-4,5} dy \\ &= \pi \int_0^{4,5} -\frac{1,65^2 \cdot y}{4,5} + 1,65^2 dy. \quad (2 \text{ p. (yht. 10 p.)}) \end{aligned}$$

Ratkaistaan integraalin arvo laskimella. Tilavuudeksi saadaan

$$V = 19,244218 \dots$$
$$\approx 19$$

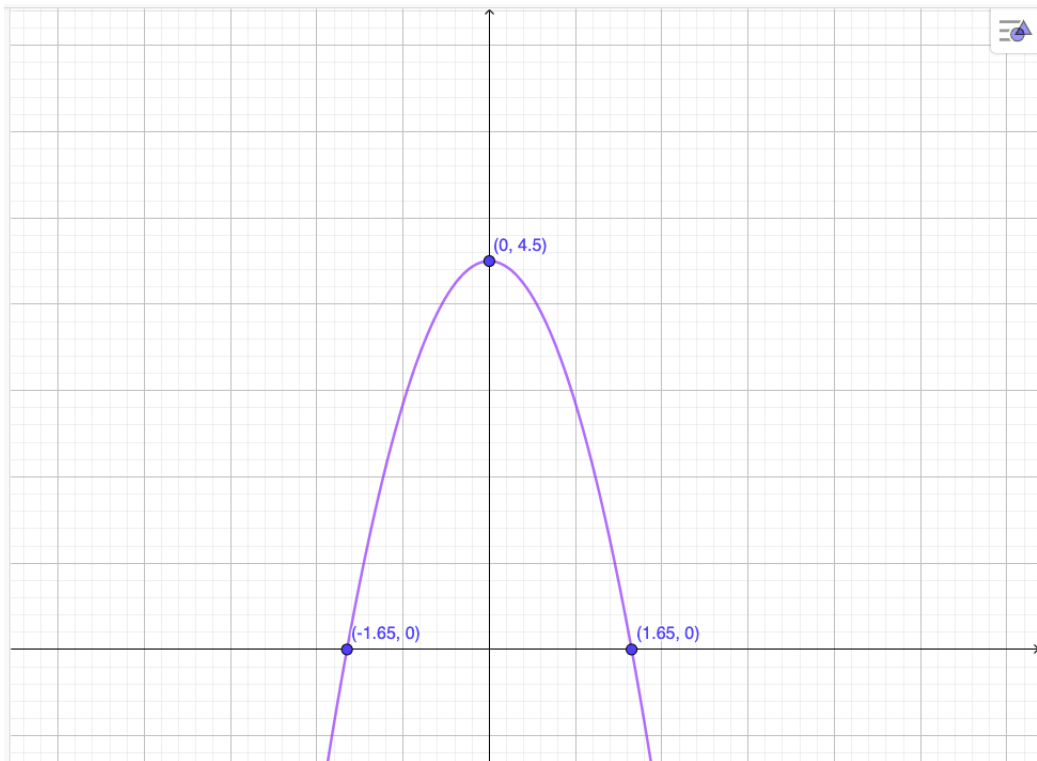
Vastaus: Kärjen tilavuus on noin 19 kuutiometriä.

2 p. (yht. 12 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 3

Määritetään ensin pyörähdyskappaleen muodostavaa paraabelia kuvaava funktio. Sijoitetaan paraabeli koordinaatistoon ja valitaan akseleiden yksiköiksi 1 m. Valitaan paraabeliksi y -akselin suhteen symmetrinen alaspäin aukeava paraabeli. Sijoitetaan nokkakartion pohja x -akselille, jolloin nokkakartiota kuvaavan paraabelin huippu asettuu kärjen korkeuden perusteella pisteeseen $(0; 4,5)$. Lisäksi nokkakartion pohjan halkaisija on 3,3 metriä, joten paraabelin nollakohdat ovat symmetrian perusteella $x_1 = -1,65$ ja $x_2 = 1,65$. Piirretään tilanteesta apukuva.

2 p. (yht. 2 p.)



Paraabelilla on kaksi nollakohtaa. Tällöin paraabelin yhtälö voidaan esittää muodossa

$$y = a(x - x_1)(x - x_2),$$

jossa x_1 ja x_2 ovat paraabelin nollakohdat.

Sijoitetaan yhtälöön nollakohdat $x_1 = -1,65$ ja $x_2 = 1,65$. **Pidetään koordinaatiston yksikkönä 1 m, mutta ratkaistaan tehtävä ilman yksiköitä.**

$$y = a(x + 1,65)(x - 1,65) \quad \text{2 p. (yht. 4 p.)}$$

Toisaalta paraabelin yhtälön tulee toteutua kaikilla paraabelin pisteiden koordinaateilla. Sijoitetaan yhtälöön paraabelin huipun koordinaatit, $(0; 4,5)$.

$$4,5 = a \cdot (0 + 1,65) \cdot (0 - 1,65)$$

$$a = \frac{4,5}{-1,65^2} \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)}$$

Paraabelin yhtälö on siis

$$y = -\frac{4,5}{1,65^2}(x - 1,65)(x + 1,65)$$

$$y = -\frac{4,5}{1,65^2}(x^2 - 1,65^2)$$

$$= -\frac{4,5}{1,65^2}x^2 + 4,5$$

Ratkaistaan seuraavaksi paraabelin yhtälö muuttujan x suhteen.

$$y - 4,5 = \frac{-4,5}{1,65^2} \cdot x^2$$

$$x = (\pm) \sqrt{\frac{(y - 4,5) \cdot 1,65^2}{-4,5}} \quad \text{2 p. (yht. 8 p.)}$$

Tilanteessa y kuuluu välille $[0; 4,5]$, joten juuren sisällä oleva lauseke on varmasti ei-negatiivinen.

Tarkastellaan vain x -akselin oikealle puolelle ja y -akselin yläpuolelle jäävää osaa,

$$x = \sqrt{\frac{(y - 4,5) \cdot 1,65^2}{-4,5}}.$$

Nokkakartio muodostuu, kun tämä kuvaaja pyörähtää y -akselin ympäri. Pyörähdyskappaleen tilavuudeksi saadaan

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{4,5} \left(\sqrt{\frac{(y - 4,5) \cdot 1,65^2}{-4,5}} \right)^2 dy \\ &= \pi \int_0^{4,5} \frac{(y - 4,5) \cdot 1,65^2}{-4,5} dy \\ &= \pi \int_0^{4,5} -\frac{1,65^2 \cdot y}{4,5} + 1,65^2 dy. \end{aligned} \quad \text{2 p. (yht. 10 p.)}$$

Ratkaistaan integraalin arvo laskimella. Tilavuudeksi saadaan

$$\begin{aligned} V &= 19,244218 \dots \\ &\approx 19 \end{aligned}$$

Vastaus: Kärjen tilavuus on noin 19 kuutiometriä. 2 p. (yht. 12 p.)

Pisteytyksestä: Tehtävän ensimmäiset kaksi pistettä saa tilanteen mallintamisesta paraabelin avulla ja paraabelin järkevästä sijoittamisesta koordinaatistoon tehtäväsä annettujen mittojen avulla.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

7. Vektoreiden summa (12 p.)

Tarkastellaan vektoreita $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ ja $\vec{v} = \sin(2t)\vec{i} + \cos(4t)\vec{j}$, missä $t \geq 0$.

1. Määritä vektori $\vec{u} + \vec{v}$, kun $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$ ja $t = \frac{3\pi}{4}$. (4 p.)
2. Mikä tasokuvio muodostuu vektorin $\vec{u} + \vec{v}$ kärkipisteestä, kun t saa arvot välillä $[0, \pi]$? Anna vastaus yhtälönä muodossa $y = f(x)$. Ratkaisussa voi käyttää esimerkiksi kaavaa $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$. (8 p.)

Ratkaisu.

1.

$$\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{v} = \sin(2t)\vec{i} + \cos(4t)\vec{j}$$

Lasketaan vektorisumma eri tilanteissa.

$$\begin{aligned} t = 0, \quad \vec{u} + \vec{v} &= (1 + \sin(2 \cdot 0))\vec{i} + (2 + \cos(4 \cdot 0))\vec{j} \\ &= \vec{i} + 3\vec{j} \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = \frac{\pi}{4}, \quad \vec{u} + \vec{v} &= (1 + \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}))\vec{i} + (2 + \cos(4 \cdot \frac{\pi}{4}))\vec{j} \\ &= 2\vec{i} + \vec{j} \quad (2 \text{ p. (yht. 3 p.)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = \frac{3\pi}{4}, \quad \vec{u} + \vec{v} &= (1 + \sin(2 \cdot \frac{3\pi}{4}))\vec{i} + (2 + \cos(4 \cdot \frac{3\pi}{4}))\vec{j} \\ &= \vec{j} \quad (1 \text{ p. (yht. 4 p.)}) \end{aligned}$$

2. Vektorin kärkipiste riippuu paitsi vektorista itsestään, myös siitä, mikä piste valitaan vektorin alkupisteeksi. Tehtävänannossa ei ole valittu mitään tiettyä alkupistettä. Se, minkä tasokuvion vektorin kärkipiste piirtää, kun t saa arvot välillä $[0, \pi]$, ei riipu vektorin alkupisteen valinnasta – tasokuvio vain siirtyy eri paikkaan, jos alkupiste vaihdetaan. Tasokuvion yhtälö kuitenkin riippuu alkupisteen valinnasta. Alkupisteestä ei puhuttu YTL:n malliratkaisussa, ja YTL:n malliratkaisu on oikein,

jos ja vain jos oletetaan alkupisteen olevan origo. Oikeassa ratkaisussa pitäisi ottaa huomioon käyrän riippuvuus alkupisteen valinnasta, mutta emme usko, että sitä vaaditaan täysien pisteiden saamiseksi.

Summavektori yleisessä muodossa on

$$\bar{u} + \bar{v} = (1 + \sin(2t))\bar{i} + (2 + \cos(4t))\bar{j}$$

Kantavektoriesityksessä $\bar{i}$ vastaa vaaka-akselia ja $\bar{j}$ pystyakselia. Valitaan vektorin $\bar{u} + \bar{v}$ alkupisteeksi origo. Vektorin $\bar{u} + \bar{v}$ kärkipisteen koordinaatit ovat seuraavat:

$$y = 2 + \cos(4t)$$

$$x = 1 + \sin(2t) \Rightarrow \sin(2t) = x - 1 \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)}$$

Nyt y :n lausekkeesta saadaan

$$y = 2 + \cos 4t = 2 + \cos(2 \cdot 2t) \quad \parallel \cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$= 3 - 2\sin^2(2t) \quad \parallel \text{sij. } \sin(2t) = x - 1$$

$$y = 3 - 2(x - 1)^2 \quad \text{2 p. (yht. 8 p.)}$$

Lauseke on toisen asteen yhtälö eli kuvaaja esittää paraabelia. 1 p. (yht. 9 p.)

Kun tarkastellaan väliä $t \in [0, \pi]$, $\sin$ in sisällä $2t$ saa kaikki arvot väliltä $[0, 2\pi]$ ja $\sin$ i väliltä $[-1, 1]$, x saa kaikki arvot väliltä

$$x = 1 + \sin\left(2 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) = 0, \quad \text{kun } t = \frac{3\pi}{4}$$

$$x = 1 + \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 2, \quad \text{kun } t = \frac{\pi}{4} \quad \text{2 p. (yht. 11 p.)}$$

Vastaus: Paraabeli on $y = -2x^2 + 4x + 1$ välillä $[0, 2]$ 1 p. (yht. 12 p.).

Kun alkupiste otetaan huomioon, paraabeli on

$$y = -2(x - x_0)^2 + 4(x - x_0) + 1 + y_0,$$

jossa (x_0, y_0) on vektorille $\bar{u} + \bar{v}$ valittu alkupiste. Esimerkiksi jos alkupiste on $(3, 5)$, niin paraabeli on

$$y = -2(x - 3)^2 + 4(x - 3) + 1 + 5$$

$$y = -2(x - 3)^2 + 4(x - 3) + 6$$

$$y = -2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) + 4x - 12 + 6$$

$$y = -2(x^2 - 6x + 9) + 4x - 6$$

$$y = -2x^2 + 12x - 18 + 4x - 6$$

$$y = -2x^2 + 16x - 24.$$

Uskomme, ettei alkupisteen huomiointia vaadita ratkaisussa.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

8. Polynomien vertailu (12 p.)

1. Osoita induktiolla, että $k^3 \geq k^2 + 4$ kaikilla kokonaisluvuilla $k \geq 2$. (6 p.)
2. Osoita, että osatehtävän 8.1 epäyhtälö ei päde millään kokonaisluvulla $k < 0$. (2 p.)
3. Osoita, että epäyhtälö $x^3 \geq x^2 + 4$ pätee kaikilla reaaliluvuilla $x \geq 2$. (4 p.)

Ratkaisu.

1. Osoitetaan induktion avulla, että epäyhtälö $k^3 \geq k^2 + 4$ pätee kaikilla kokonaisluvuilla $k \geq 2$.

Alkuaskel. Osoitetaan ensin, että väite pätee k :n arvolla $k = 2$:

$$k^3 = 2^3 = 8$$

$$k^2 + 4 = 2^2 + 4 = 8$$

$$8 \geq 8$$

Epäyhtälö siis pätee, kun $k = 2$. 1 p. (yht. 1 p.)

Induktio-oletus. Oletetaan, että väite $k^3 \geq k^2 + 4$ pätee kaikilla arvoilla $k = 2, 3, \dots, n$. 1 p. (yht. 2 p.)

Induktioväite. Tutkitaan, päteekö $k^3 \geq k^2 + 4$, kun $k = n + 1$. 1 p. (yht. 3 p.)

$$k^2 + 4 = (n + 1)^2 + 4 = n^2 + 2n + 1 + 4$$

$$(n + 1)^2 + 4 = n^2 + 2n + 5 \tag{1}$$

Toisaalta:

$$k^3 = (n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \quad \text{Induktio-oletus: } n^3 \geq n^2 + 4 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

$$\geq n^2 + 4 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$= n^2 + 2n + 5 + 3n^2 + n \quad 3n + n \geq 0 \text{ koska } n \geq 2.$$

$$\geq n^2 + 2n + 5 \quad \text{Yhtälö (1)}$$

$$= (n + 1)^2 + 4 \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

Saatiin siis tuloks

$$(n+1)^3 \geq (n+1)^2 + 4$$

Induktioväite on siis tosi, ja tehtävänannon epäyhtälö induktioperiaatteen nojalla myös tosi. ☐ 1 p. (yht. 6 p.)

2. Kun $k < 0$, pariton potenssi $k^3 < 0$ kaikilla k :n arvoilla. Toisaalta vaikka $k < 0$, pätee parillisen potenssin takia $k^2 > 0$ ja myös $k^2 + 4 > 0$ kaikilla k :n arvoilla.

1 p. (yht. 7 p.) Täten epäyhtälö

$$k^3 \geq k^2 + 4$$

ei päde millään k :n arvolla, kun $k < 0$. ☐ 1 p. (yht. 8 p.)

3.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Tutkitaan funktiota $f(x) = x^3 - x^2 - 4$. Jaetaan funktion f lauseke tekijöihin laskinohjelmalla. Saadaan

$$f(x) = (x-2)(x^2 + x + 2) \quad 1 \text{ p. (yht. 9 p.)}$$

Koska kyseessä on todistustehtävä, laskinohjelman antama tulos kannattaa varmistaa käsin laskemalla, jotta varmasti tulee täydet pisteet, varsinkin kun tarkistaminen käsin on helppoa.

Tarkistetaan käyttämättä laskinohjelmaa, että laskinohjelma jakoi tekijöihin oikein:

$$\begin{aligned} (x-2)(x^2 + x + 2) &= x^3 + x^2 + 2x - 2x^2 - 2x - 4 \\ &= x^3 + x^2 - 2x^2 + 2x - 2x - 4 \\ &= x^3 - x^2 - 4 \\ &= f(x), \end{aligned}$$

joten laskinohjelma jakoi tekijöihin oikein.

Kun $x \geq 2$, niin

- $x - 2 \geq 0$
- $x^2 \geq 0$ ja $x \geq 0$, joten $x^2 + x + 2 \geq 0$. 1 p. (yht. 10 p.)

Siis kun $x \geq 2$, niin

$$(x - 2)(x^2 + x + 2) \geq 0 \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

$$f(x) \geq 0$$

$$x^3 - x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^3 \geq x^2 + 4 \quad \square \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Tutkitaan funktiota $f(x) = x^3 - x^2 - 4$ reaaliluvuilla $x \geq 2$.

Funktion f derivaattafunktio on

$$f'(x) = 3x^2 - 2x. \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

Derivaattafunktion nollakohdat ovat

$$3x^2 - 2x = 0$$

$$x(3x - 2) = 0 \quad (\text{tulon nollasääntö})$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 3x - 2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2}{3}. \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

Selvitetään derivaatan merkki, kun $x \geq 2$.

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 8 > 0.$$

Derivaattafunktio on jatkuva funktio, eikä sillä ole nollakohtia, kun $x \geq 2$. Derivaatan merkki on siis positiivinen kaikilla reaaliluvuilla $x \geq 2$ ja funktio f vastaavasti aidosti kasvava, kun $x \geq 2$. 1 p. (yht. 11 p.) Vastaavan päättelyn voisi tehdä esimerkiksi kulkukaavion avulla.

Lasketaan funktion f arvo kohdassa $x = 2$:

$$f(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 0.$$

Kun $x \geq 2$ funktio f on aidosti kasvava ja epänegatiivinen. Sille siis pätee:

$$f(x) \geq 0$$

$$x^3 - x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^3 \geq x^2 + 4 \quad \square \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

Ratkaisuvaihtoehto 3

Kun $x \geq 2$, pätee $1 \geq \frac{4}{x^2}$. Näin ollen:

$$x \geq 2 \geq 1 + 1 \geq 1 + \frac{4}{x^2}$$

$$x \geq 1 + \frac{4}{x^2} \quad \text{2 p. (yht. 10 p.)}$$

Koska $x^2 > 0$, epäyhtälön merkki ei käänny, kun epäyhtälön molemmat puolet kerrotaan termillä x^2 .

$$x \geq 1 + \frac{4}{x^2} \quad || \cdot x^2$$

$$x^3 \geq x^2 + 4 \quad \square \quad \text{2 p. (yht. 12 p.)}$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

9. Integraalialgoritmi (12 p.)

Aineisto:

9. A [Teksti: Integraali-pseudokoodi](#)

Tekstissä [9.A](#) on esitetty pseudokoodilla kirjoitettu algoritmi.

1. Minkä tuloksen algoritmi antaa, kun $a = 0$, $b = 1$ ja $n = 5$? (2 p.)
2. Tee taulukkolaskenta- tai ohjelmointitoteutus algoritmille, kun $a = -1$, $b = 2$ ja $n = 1000$. Minkä tuloksen se tässä tapauksessa antaa? (4 p.)
3. Mitä integraalia algoritmi approksimoi? Selitä muuttujien a , b , n , h , r , k ja f roolit algoritmossa. (6 p.)

Ratkaisu.

1.

Ratkaisuvaihtoehto 1

	A	B	C
1	a	0	
2	b	1	
3	n	5	
4	h	0.2	
5			
6	k	f(k)	r
7	1	1.04	0.208
8	2	1.16	0.44
9	3	1.36	0.712
10	4	1.64	1.04
11	5	2	1.44

Solun B_4 arvo on laskettu kaavalla

$$=(B2-B1)/B3$$

Solun $B7$ arvo on laskettu kaavalla

$$=(B\$1+A7*B\$4)^2+1$$

ja siitä alaspäin B -sarakkeen solujen arvot on laskettu vastaavasti.

Solun $C7$ arvo on laskettu kaavalla

$$=B7*B\$4$$

Solun $C8$ arvo on laskettu kaavalla

$$=C7+B8*B\$4$$

ja siitä alaspäin C -sarakkeen solujen arvot on laskettu vastaavasti.

Vastaus: Algoritmi antaa tuloksen 1,44. 2 p. (yht. 2 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 2

Kirjoitetaan Python-ohjelma tuloksen laskemiseksi.

```
integraali.py
from math import *

def integraali(a,b,n):
    h=(b-a)/n
    r=0
    for k in range(1,n+1):
        f = pow((a+k*h),2)+1
        r=r+f*h
    return r
```

```
>>>#Running integraali.py
>>>from integraali import *
>>>integraali(0,1,5)
1.44
```

Vastaus: Algoritmi antaa tuloksen 1,44. 2 p. (yht. 2 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 3

Parametrien arvot ovat

$$a = 0$$

$$b = 1$$

$$n = 5$$

Algoritmin ensimmäisessä osassa lasketaan h :n arvo:

$$h = \frac{(b - a)}{n} = \frac{1 - 0}{5} = \frac{1}{5}.$$

Sitten lasketaan arvoilla $k = 1, 2, 3, 4$ ja 5 arvo funktiolle $f(k) = (a + kh)^2 + 1$.

$$f(1) = \left(0 + 1 \cdot \frac{1}{5}\right)^2 + 1 = \frac{1}{25} + 1 = \frac{26}{25}$$

$$f(2) = \left(0 + 2 \cdot \frac{1}{5}\right)^2 + 1 = \frac{4}{25} + 1 = \frac{29}{25}$$

$$f(3) = \left(0 + 3 \cdot \frac{1}{5}\right)^2 + 1 = \frac{9}{25} + 1 = \frac{34}{25}$$

$$f(4) = \left(0 + 4 \cdot \frac{1}{5}\right)^2 + 1 = \frac{16}{25} + 1 = \frac{41}{25}$$

$$f(5) = \left(0 + 5 \cdot \frac{1}{5}\right)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Lopuksi summataan $f(k) \cdot h$:n arvot, jonka tuloksena on lopullinen muuttujan r arvo.

$$\begin{aligned}
 r &= f(1)h + f(2)h + f(3)h + f(4)h + f(5)h \\
 &= (f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5))h \\
 &= \left(\frac{26}{25} + \frac{29}{25} + \frac{34}{25} + \frac{41}{25} + 2 \right) \cdot \frac{1}{5} \\
 &= \frac{36}{25} \\
 &= 1,44.
 \end{aligned}$$

Vastaus: Algoritmi antaa tuloksen 1,44. 2 p. (yht. 2 p.)

2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Käytetään samaa taulukkolaskentaa kuin kohdassa 1 ([ratkaisuvaihtoehdossa 1](#)).

	A	B	C
1	a	-1	
2	b	2	
3	n	1000	
4	h	0.003	
5			
6	k	f(k)	r
7	1	1.994009	0.005982027
8	2	1.988036	0.011946135
9	3	1.982081	0.017892378
10	4	1.976144	0.02382081
11	5	1.970225	0.029731485
12	6	1.964324	0.035624457
13	7	1.958441	0.04149978
14	8	1.952576	0.047357508
15	9	1.946720	0.053197605

1000	994	4.928324	5.915043015
1001	995	4.940225	5.92986369
1002	996	4.952144	5.944720122
1003	997	4.964081	5.959612365
1004	998	4.976036	5.974540473
1005	999	4.988009	5.9895045
1006	1000	5	6.0045045
1007			
1008			

Algoritmin tulos on

$$6,004504 \dots \approx 6,005.$$

Vastaus: Algoritmi antaa tuloksen 6,005. 4 p. (yht. 6 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 1

Käytetään samaa Python-ohjelmaa kuin kohdassa 1 (ratkaisuvaihtoehdossa 2).

```
integraali.py
from math import *

def integraali(a,b,n):
    h=(b-a)/n
    r=0
    for k in range(1,n+1):
        f = pow((a+k*h),2)+1
        r=r+f*h
    return r
```

```
>>>#Running integraali.py
>>>from integraali import *
>>>integraali(0,1,5)
1.44
>>>integraali(-1,2,1000)
6.004504499999999
```

Algoritmin tulos on

$$6,004504\dots \approx 6,005.$$

Vastaus: Algoritmi antaa tuloksen 6,005.

4 p. (yht. 6 p.)

3. Algoritmi approksimoi integraalia

$$\int_a^b x^2 + 1 \, dx.$$

2 p. (yht. 8 p.)

Osatehtävässä 1 algoritmi siis approksimoi integraalia

$$\int_0^1 x^2 + 1 \, dx$$

ja osatehtävässä 2 integraalia

$$\int_{-1}^2 x^2 + 1 \, dx.$$

YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 23.3.2023) integraali oli annettu osatehtävän 2 perusteella, mutta tehtävänannosta ei käynyt ilmi, viitattiinko osatehtävässä 3 nimenomaan osatehtävään 2 vai koko tehtävään yleisesti.

Muuttuja a on integrointivälin alkupiste ja muuttuja b on integrointivälin päätepiste. Muuttuja n kertoo, kuinka moneen osaväliin väli $[a, b]$ jaetaan ja muuttuja h on yhden osavälin pituus. Muuttuja k kuvaa sitä, kuinka monetta osaväliä ollaan

laskemassa. Muuttuja f on funktion f arvo k :nnen osavälin kohdalla. Muuttuja r kuvaa integraalin arvoa integrointivälin alkupisteestä tarkasteltavan osavälin kohdalle. 4 p. (yht. 12 p.)

Ihmettelitkö, miksi funktio on $x^2 + 1$? Tarkastellaan lauseketta $a + kh$. Lausekkeessa a on integrointivälin alkupiste ja kh on etäisyys alkupisteen ja k :nnen osavälin välillä. Näin ollen $a + kh$ on siis x :n arvo k :nnen osavälin kohdalla.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

10. Positroniemissiotomografia (12 p.)

Aineisto:

10. A [Taulukko: PET-kuvantamisen tulos](#)

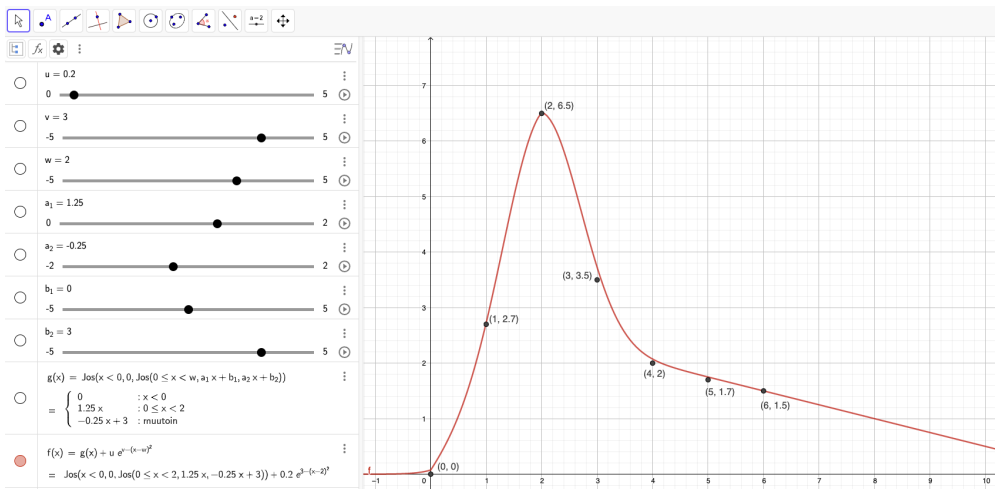
Positroniemissiotomografia (PET) on lääketieteellinen kuvantamismenetelmä, jonka avulla voidaan mallintaa sisäelinten toimintaa. PET-kuvan avulla on mahdollista muodostaa aika-aktiivisuuskäyrä, joka on muotoa $f(t) = g(t) + ue^{v-(t-w)^2}$, missä $u, v, w > 0$ ja

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < 0, \\ a_1t + b_1, & \text{kun } 0 \leq t < w, \\ a_2t + b_2, & \text{kun } t \geq w. \end{cases}$$

1. Taulukko [10.A](#) sisältää erään PET-kuvan mittausarvot ajan funktiona. Mittaus voidaan mallintaa funktion f avulla, kun $u = \frac{1}{5}$, $v = 3$, $w = 2$, $a_1 = \frac{5}{4}$, $b_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{4}$ ja $b_2 = 3$. Piirrä funktion f kuvaaja ja mittausarvot koordinaatistoon. (4 p.)
2. Miten parametrit u, v ja w vaikuttavat funktion kuvaajaan? (4 p.)
3. Mitkä ehdot parametrien w, a_1, b_1, a_2 ja b_2 tulee toteuttaa, jotta funktio f on jatkuva? (4 p.)

Ratkaisu.

1. Määritetään kuvaajanpiirto-ohjelmaan liukusäätimien avulla parametrien arvot ja piirretään mittauspisteet sekä funktion kuvaaja samaan koordinaatistoon. **Huomaa! Ei ole välttämätöntä käyttää liukusäätimiä, mutta niiden käyttö voi olla hyödyllistä hahmottamisen apuna.**



4 p. (yht. 4 p.)

2. Tutkittava funktio on

$$f(t) = g(t) + u e^{v-(t-w)^2},$$

jossa

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < 0, \\ a_1 t + b_1, & \text{kun } 0 \leq t < w, \\ a_2 t + b_2, & \text{kun } t \geq w. \end{cases}$$

Parametri u on eksponenttifunktion kerroin. Kertoimen kasvattaminen kasvattaa funktion arvoja, joten kuvaaja ikään kuin venyy sitä korkeammaksi, mitä suurempi u :n arvo on. 1 p. (yht. 5 p.)

Funktion eksponenttissa oleva osa on $v - (t - w)^2$. Eksponenttifunktion arvot kasvavat, kun eksponentin arvot kasvavat. Koska v :n kasvattaminen kasvattaa eksponentin arvoa, v :n arvon kasvattaminen kasvattaa myös funktion arvoa. Kuvaaja siis ikään kuin venyy sitä korkeammaksi, mitä suurempi v :n arvo on. 1 p. (yht. 6 p.)

Vaihtoehtoisesti päätelmät v :n vaikutuksesta voi tehdä myös seuraavasti. Potenssin laskusääntöjen perusteella

$$u \cdot e^{v-(t-w)^2} = u \cdot e^v \cdot e^{-(t-w)^2}.$$

Koska v esiintyy luvun e eksponenttina ja eksponenttifunktio on aidosti kasvava funktio, funktio saa sitä suurempia arvoja, mitä suurempi v :n arvo on.

Parametri w vaikuttaa funktion huipun sijaintiin. Eksponenttifunktion arvo riippuu eksponentin arvosta: Mitä suurempi eksponentin arvo on, sitä suurempi on eksponenttifunktion arvo. Eksponentissa oleva lauseke $v - (t - w)^2$ riippuu muuttujan t sekä parametrien v ja w arvoista. Eksponentissa olevan lausekkeen kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten voidaan päätellä, että se saavuttaa maksimiarvonsa, kun $t = w$. Näin ollen w :n arvon kasvattaminen siirtää huippua t -akselin suhteen oikealle ja pienentäminen vasemmalle. 1 p. (yht. 7 p.)

Toisaalta w vaikuttaa myös paloittain määriteltyyn funktioon. Mitä suurempi w :n arvo on, sitä suuremmalla t :n arvolla siirrytään käyttämään funktiota $g(t) = a_2t + b_2$, sillä rajana on $t = w$. 1 p. (yht. 8 p.)

Parametrien arvojen vaikutusta kuvaajan muotoon voi testata hyödyntämällä liukusäätiä.

3. Funktio $f(t)$ on kahden funktion summa. Se on jatkuva, jos termeinä esiintyvät funktiot ovat jatkuvia. Funktio $ue^{v-(t-w)^2}$ on eksponenttifunktiona jatkuva.

Tarkastellaan funktion $g(t)$ jatkuvuutta. Tarkastellaan erityisesti pisteitä, joissa funktion määrittelevä lauseke vaihtuu, sillä lausekkeet itsessään ovat vakio- tai polynomifunktioina jatkuvia. 1 p (yht. 9 p.)

Funktio on jatkuva jos ja vain jos toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret kuin funktion arvo tässä pisteessä.

Tarkastellaan kohtaa $t = 0$. Funktion $g(t)$ vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa $t = 0$ on

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0.$$

Funktion $g(t)$ oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa $t = 0$ on

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} a_1t + b_1 = a_1 \cdot 0 + b_1 = b_1.$$

Funktion arvo on

$$g(0) = a_1 \cdot 0 + b_1 = b_1$$

On oltava voimassa

$$b_1 = 0. \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)})$$

Tarkastellaan kohtaa $t = w$. Funktion $g(t)$ vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa $t = w$ on

$$\lim_{t \rightarrow w^-} a_1 t + b_1 = a_1 \cdot w + 0.$$

Funktion $g(t)$ oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa $t = w$ on

$$\lim_{t \rightarrow w^+} a_2 t + b_2 = a_2 \cdot w + b_2.$$

Funktion arvo on

$$g(w) = a_2 \cdot w + b_2$$

On oltava voimassa

$$a_2 \cdot w + b_2 = a_1 \cdot w$$

$$b_2 = (a_1 - a_2)w. \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)})$$

Tämän ehdon voi esittää myös ratkaistuna jonkin muun parametrin (a_1 , a_2 tai w) suhteen.

Parametreille on siis oltava voimassa

$$b_1 = 0 \quad \text{ja} \quad b_2 = (a_1 - a_2)w,$$

jotta funktio on jatkuva. 1 p. (yht. 12 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

11. Nopanheiton opetus (12 p.)

1. Eeri haluaa valita kahdesta nopasta paremman. Hän heittää niitä kerran ja valitsee nopan, joka antaa suuremman tuloksen. Jos kumpikin noppa antaa saman tuloksen, hän valitsee toisen nopista. Kummassakin tapauksessa Eeri heittää valitsemaansa noppaa uudestaan. Millä todennäköisyydellä nopan tulos toisella heitolla on pienempi kuin ensimmäisellä heitolla? (9 p.)
2. Laajasti levinneen uutisen mukaan maailman kymmenen rikkaimman ihmisen omaisuus kaksinkertaistui koronapandemian kahden ensimmäisen vuoden aikana. Väite perustui ilmeisesti siihen, että ajanjakson lopulla oli laskettu kymmenen rikkaimman ihmisen omaisuuden arvo ja verrattu sitä heidän omaisuuteensa kaksi vuotta aikaisemmin. Tähän sisältyy ajatusvirhe, joka tulee esiin myös Eerin nopanheitossa. Mikä se on? (3 p.)

Ratkaisu.

1. Olkoon tapahtuma A, että saadaan jokin silmäluku ja tapahtuma B, että toisella heitolla saatu silmäluku on enimmäistä pienempi. Listataan kaikki vaihtoehdot ensimmäisessä nopanheitossa. **Ruudukosta käy ilmi kussakin heitossa tullut suurempi luku.**

6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	5	5	6
4	4	4	4	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6

Kuvaa ei vaadita ratkaisussa.

Tarkastellaan eri tilanteita. Lasketaan, millä todennäköisyydellä tulos on tietty silmäluku:

A	$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	$P(4)$	$P(5)$	$P(6)$
	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

3 p. (yht. 3 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 1:

Päätellään, millä todennäköisyydellä toisella heitolla tulos on pienempi kuin ensimmäisellä heitolla.

Silmäluku A	1	2	3	4	5	6
$P(B)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$

2 p. (yht. 5 p.)

Kertolaskusäännöllä saadaan yhteen heittopariin liittyvä todennäköisyys. Tarkastellaan yhteenlaskusäännöllä kaikkia tapahtumia, kun heitot ovat erillisiä. Kysytty todennäköisyys on siis

$$\begin{aligned} & \frac{1}{36} \cdot 0 + \frac{3}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{36} \cdot \frac{2}{6} + \frac{7}{36} \cdot \frac{3}{6} + \frac{9}{36} \cdot \frac{4}{6} + \frac{11}{36} \cdot \frac{5}{6} \\ &= \frac{125}{216} \\ &\approx 57,9\% \end{aligned}$$

Ratkaisuvaihtoehto 2:

Merkitään toista heittoa kirjaimella B. Ratkaistaan kysytty todennäköisyys siten, että tarkastellaan uudet heitot tulosvaihtoehto kerrallaan ja lasketaan, montako vaihtoehtoa ensimmäisellä heitolla on toteuttaa ehto $B < A$.

Eli jos toisen heiton tulos $B = 6$, mikään vaihtoehto ensimmäisellä heitolla ei ole pienempi. Jos $B = 5$, vaihtoehdot, joissa $A = 6$ käyvät ja niitä on 11. Jos $B = 4$, A voi olla 5 tai 6, joten vaihtoehtoja on 20 jne.

Saadaan

$$\begin{aligned}
 P(B < A) &= P(B = 6 < A) + P(B = 5 < A) + \dots + P(B = 1 < A) \quad (2 \text{ p. (yht. 5 p.)}) \\
 &= 0 + \frac{1}{6} \cdot \frac{11}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{20}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{27}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{32}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{35}{36} \quad (2 \text{ p. (yht. 7 p.)}) \\
 &= \frac{125}{216} \quad (2 \text{ p. (yht. 9 p.)}) \\
 &\approx 57,9\%
 \end{aligned}$$

2. Nopanheitossa Eeri valitsi ensimmäisen heiton jälkeen suuremman tai yhtä suuren tuloksen antaneen nopan ja heittää sitä uudestaan. Koska ensimmäinen tulos oli valittu siten, että siihen valikoidaan keskimääräistä suurempia tuloksia, on seuraavan nopanheiton tuloksella enemmän mahdollisuuksia olla pienempi kuin suurempi verrattuna ensimmäiseen tulokseen. Tämän takia todennäköisyys sille, että nopanheiton tulos pienenee on yli puolet.

Rikkaiden ihmisten valinta vastaisi tilannetta, jossa useita noppia heitettäisiin kaksi kertaa ja valittaisiin tarkasteluun ne nopat, jotka jälkimmäisellä heitolla tuottivat suuren silmäluvun. Koska näiden noppien ensimmäiset silmäluvut olivat tasajakautuneita ja jälkimmäiset nyt valinnan perusteella suuria, ovat näiden noppien silmäluvut todennäköisesti kasvaneet ensimmäisestä heitosta toiseen.

Varakkaiden ihmisten tapauksessa valitsemalla pandemian jälkeen kymmenen rikkainta ollaan tällä valinnalla mahdollisesti rajattu pois sellaisia henkilöitä, joiden varallisuus ennen pandemiaa olisi nostonut heidät kymmenen rikkaimman ihmisen joukkoon mutta heidän omaisuutensa arvo pieneni eivätkä he sen takia tule valituksi tarkasteluun. Tällainen valinta siis preferoi ihmisiä, joiden varallisuus kasvoi pandemian aikana, minkä takia heidän varallisuutensa muutos välttämättä kuvaa kaikkien varakkaiden ihmisten varallisuuden muutosta.

Tutkimus olisi ollut relevantti, jos oltaisiin valittu 10 rikkainta henkilöä ennen pandemian alkua ja tarkasteltu, mitä heidän varallisuudelleen tapahtui. (3 p. (yht. 12 p.))

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

12. Polynomikonstruktio (12 p.)

Anna esimerkki polynomista $P(x)$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

Yhtälöllä $P(x) = 1$ on täsmälleen kaksi erisuurta ratkaisua, ja yhtälöllä $P(x) = -1$ on ainakin neljä erisuurta ratkaisua.

Täysien pisteiden arvoinen ratkaisu sisältää laskut, joista voidaan nähdä, että esimerkki toteuttaa vaaditut ehdot. Graafinen perustelu tai yhtälön ratkaisukäskyn käyttö eivät yksinään riitä täysiin pisteisiin.

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Etsitään GeoGebralla kokeilemalla neljännen asteen polynomi 1 p. (yht. 1 p.), joka täyttää annetut ehdot. Löydettiin polynomi $P(x)$ muotoa:

$$P(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 \quad \text{2 p. (yht. 3 p.)}$$

Näytetään nyt, että vaaditut ehdot käyvät toteen:

$$P(x) = 1 \Leftrightarrow P(x) - 1 = 0$$

$$P(x) = -1 \Leftrightarrow P(x) + 1 = 0$$

Muodostetaan ensiksi funktio $g(x) = P(x) + 1$. Halutaan näyttää, että $g(x)$:llä on ainakin neljä erisuurta nollakohtaa. Derivoidaan $g(x)$.

$$g(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + 1$$

$$g'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 10x \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} \tag{1}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$4x^3 + 3x^2 - 10x = 0 \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

Laskimella saadaan ratkaisut

$$x = -2$$

$$x = 0$$

$$x = \frac{5}{4}.$$

Lasketaan nyt derivaattafunktion arvoja nollakohtien molemmilla puolilla

$$g'(-3) = 4 \cdot (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 10 \cdot (-3) = -51 < 0$$

$$g'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 10 \cdot (-1) = 9 > 0$$

$$g'(1) = 4 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 = -3 < 0$$

$$g'(2) = 4 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 = 24 > 0$$

ja muodostetaan funktion $g(x)$ kulkukaavio. 1 p. (yht. 6 p.)

	-2	0	5/4	
$g'(x)$				
$g(x)$				

$g(x)$ on jatkuva koko reaalilukujen joukossa, koska se on polynomifunktio. Kulkukaaviosta nähdään, että $g(x)$ on aidosti monotoninen väleillä $]-\infty; -2]$, $[-2; 0]$, $\left[0; \frac{5}{4}\right]$

ja $\left[\frac{5}{4}; \infty\right]$. **Bolzanon lauseen nojalla** kullakin välillä voi olla korkeintaan yksi nollakohta. Lasketaan $g(x)$:n arvoja:

$$g(-3) = (-3)^4 + (-3)^3 - 5 \cdot (-3)^2 + 1 = 10 > 0$$

$$g(-2) = (-2)^4 + (-2)^3 - 5 \cdot (-2)^2 + 1 = -11 < 0$$

$$g(0) = 0^4 + 0^3 - 5 \cdot 0^2 + 1 = 1 > 0$$

$$g\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^4 + \left(\frac{5}{4}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 + 1 = \frac{-619}{256} < 0$$

$$g(2) = 2^4 + 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 1 = 5 > 0$$

Koska $g(-3) > 0$, $g(-2) < 0$ ja $g(x)$ on monotoninen ja jatkuva tällä välillä, sillä on tasan yksi nollakohta tällä välillä. Vastaavasti funktiolla g on tasan yksi nollakohta väleillä $[-2; 0]$, $\left[0; \frac{5}{4}\right]$ ja $\left[\frac{5}{4}; 2\right]$ - yhteensä siis tasan neljä erisuurta nollakohtaa

2 p. (yht. 8 p.)

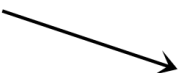
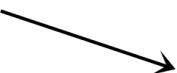
Näin ollen yhtälöllä $P(x) = -1$ on tasan neljä erisuurta ratkaisua, eli ainakin neljä erisuurta ratkaisua.

Muodostetaan nyt funktio $f(x) = P(x) - 1$ ja derivoidaan sen lauseke 1 p. (yht. 9 p.). Halutaan näyttää, että $f(x)$:llä on tasan kaksi erisuurta nollakohtaa.

$$f(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 - 1$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 10x$$

Koska funktion f derivaattafunktio on identtinen funktion g derivaattafunktion kanssa (yhtälö (1)), funktion f kulkukaaviokin on identtinen:

	-2	0	5/4	
$f'(x)$				
$f(x)$				

Lasketaan vastaavasti funktion f arvoja. 1 p. (yht. 10 p.)

$$f(-3) = (-3)^4 + (-3)^3 - 5 \cdot (-3)^2 - 1 = 8 > 0$$

$$f(-2) = (-2)^4 + (-2)^3 - 5 \cdot (-2)^2 - 1 = -13 < 0$$

$$f(0) = 0^4 + 0^3 - 5 \cdot 0^2 - 1 = -1 < 0$$

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^4 + \left(\frac{5}{4}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1 = \frac{-1131}{256} < 0$$

$$f(2) = 2^4 + 2^3 - 5 \cdot 2^2 - 1 = 3 > 0$$

Funktion f arvo on siis negatiivinen derivaatan nollakohdissa $x = -2$, $x = 0$ ja $x = \frac{5}{4}$, joten kuvaaja ei ylitä vaaka-akselia derivaatan nollakohtien välillä.

Tuloksista nähdään, että funktiolla f on tasan yksi nollakohta välillä $[-3; -2]$ ja tasan yksi nollakohta välillä $\left[\frac{5}{4}; 2\right]$. Muita nollakohtia ei ole. Yhtälöllä $P(x) = 1$ on siis tasan kaksi erisuurta juurta. 2 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Esimerkki ehdot täyttävästä polynomista on $P(x) = x^4 + x^3 - 5x^2$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Polynomifunktioista tiedetään, että niillä on nollakohtia korkeintaan niiden asteluvun verran. Kysytyn polynomien on siis oltava vähintään 4. astetta 1 p. (yht. 1 p.). Etsitään yksinkertaisuuden vuoksi neljännen asteen polynomi.

Polynomien pitää saada arvo 1 tasan kahdessa kohdassa, jotta yhtälöllä $P(x) = 1$ olisi tasan kaksi erisuurta ratkaisua. Tämä tarkoittaa, että yhtälöllä $P(x) - 1 = 0$ pitää olla täsmälleen kaksi ratkaisua 1 p. (yht. 2 p.). On siis oltava

$$P(x) - 1 = a \cdot (x - r_1)^2 \cdot (x - r_2)^2,$$

missä a on nolasta poikkeava vakio, ja r_1 ja r_2 erisuuret nollakohdat. Valitaan helpouden vuoksi $r_1 = -1$ ja $r_2 = 1$. 2 p. (yht. 4 p.)

Asetetaan nyt $P(x) = a \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 1)^2 + 1$ 2 p. (yht. 6 p.) ja yritetään löytää sopiva kertoimen a arvo. Polynomifunktion derivaattafunktioksi saadaan laskimella

$$P'(x) = 4ax^3 - 4ax.$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$P'(x) = 0$$

$$4ax^3 - 4ax = 0$$

Laskimella saadaan ratkaisuiksi

$$x = -1$$

$$x = 0$$

$$x = 1.$$

Polynomifunktion ääriarvo kohdassa $x = 0$ on $P(0) = a + 1$. Jos tämä ääriarvo olisi alle -1 , polynomifunktio saisi arvon -1 neljä kertaa. 1 p. (yht. 7 p.) **Tämän keksimiseksi voi hakea inspiraatiota esim. GeoGebrasta.** Valitaan $a = -4$. Näin saatu polynomi olisi $P(x) = -4 \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 1)^2 + 1$ ja sen ääriarvot olisivat

$$P(-1) = 1$$

$$P(0) = -3$$

$$P(1) = 1. \quad \text{3 p. (yht. 10 p.)}$$

Kulkukaavio:

	-1	0	1	
$P'(x)$	+	-	+	-
$P(x)$	↗	↘	↗	↘

Koska polynomifunktio on jatkuva ja väleillä monotoninen, se saa arvon -1 kerran välillä $[-1; 0]$ ja $[0; 1]$. Myös koska $P(2) = P(-2) = -35$, polynomifunktio $P(x)$ saa arvon -1 myös väleillä $[-2; -1]$ ja $[1; 2]$ 2 p. (yht. 12 p.). Yhteensä siis neljä kertaa.

Vastaus: Esimerkki ehdot täyttävästä polynomista on $P(x) = -4 \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 1)^2 + 1$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

13. Integraalin ja raja-arvon järjestyksen vaihto (12 p.)

Olkoon $f(x, s) = \frac{1-s}{(1+x^2-2sx)^2}$, kun $0 < s < 1$ ja $0 \leq x \leq 1$. Tarkastellaan vasemmanpuoleista raja-arvoa $\lim_{s \rightarrow 1} \int_0^1 f(x, s) dx$, jota joskus merkitään $\lim_{s \rightarrow 1} \int_0^1 f(x, s) dx$.

1. Määritä $g(x) = \lim_{s \rightarrow 1} f(x, s)$ kaikilla $0 \leq x < 1$, ja laske $\int_0^1 g(x) dx$. (3 p.)
2. Määritä sellainen $x_0 < 1$, että $f(x_0, s) = f(1, s)$, ja laske $\int_{x_0}^1 f(x_0, s) dx$. (3 p.)
3. Osoita, että $f(x, s) \geq f(x_0, s)$, kun $x \in [x_0, 1]$ ja x_0 on määritetty osatehtävässä 13.2. (3 p.)
4. Osoita, että $\int_0^1 \lim_{s \rightarrow 1} f(x, s) dx \neq \lim_{s \rightarrow 1} \int_0^1 f(x, s) dx$. (3 p.)

Ratkaisu.

1.

$$f(x, s) = \frac{1-s}{(1+x^2-2sx)^2}$$

Tarkastellaan osoittajaa $1-s$, kun $s \rightarrow 1$.

$$\lim_{s \rightarrow 1} 1-s = 1-1 = 0.$$

Tarkastellaan nimittäjää $(1+x^2-2sx)^2$, kun $s \rightarrow 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} (1+x^2-2sx)^2 &= (1+x^2-2 \cdot 1 \cdot x)^2 \\ &= (1+x^2-2x)^2 \\ &= (x^2-2x+1)^2 \\ &= ((x-1)^2)^2 \\ &= (x-1)^4. \end{aligned}$$

Nimittäjän raja-arvo on siis positiivinen, kun $0 \leq x < 1$. Näin ollen

$$g(x) = \lim_{s \rightarrow 1} f(x, s) = \frac{0}{(x-1)^4} = 0. \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

kun $0 \leq x < 1$. Kysytty integraali on siis

$$\int_0^1 g(x) \, dx = \int_0^1 0 \, dx = 0. \quad \text{2 p. (yht. 3 p.)}$$

2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Sievennetään $f(1, s)$.

$$\begin{aligned} f(1, s) &= \frac{1-s}{(1+1^2-2s \cdot 1)^2} \\ &= \frac{1-s}{(2-2s)^2} \\ &= \frac{1-s}{(2(1-s))^2} \\ &= \frac{\cancel{1}-s}{2^2 \cdot (1-s)^{\cancel{2}}} \\ &= \frac{1}{4(1-s)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Etsitään ehdon mukainen x_0 .

$$\begin{aligned} f(x_0, s) &= f(1, s) \\ \frac{1-s}{(1+x_0^2-2sx_0)^2} &= \frac{1}{4(1-s)} \end{aligned}$$

Laskinohjelmalla ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned} x_0 &= 2s - 1 \quad \text{tai} \\ x_0 &= \sqrt{s^2 + 2s - 3} + s \quad \text{tai} \\ x_0 &= -\sqrt{s^2 + 2s - 3} + s \quad \text{tai} \\ x_0 &= 1 \end{aligned}$$

Koska $0 < s < 1$,

$$s^2 + 2s - 3 < 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 0,$$

joten ratkaisut

$$x_0 = \sqrt{s^2 + 2s - 3} + s$$

$$x_0 = -\sqrt{s^2 + 2s - 3} + s$$

eivät ole reaalityyppisiä. Tehtävässä etsittiin arvoa, joka toteuttaa ehdon $x_0 < 1$, joten myöskään ratkaisu $x_0 = 1$ ei kelpaa. Ainoa ratkaisu on siis $x_0 = 2s - 1$.

1 p. (yht. 4 p.)

Huomaa! Tehtävänannon oletusten perusteella täytyy olla $0 \leq x_0 < 1$, eli

$$0 \leq 2s - 1 < 1$$

$$1 \leq 2s < 2$$

$$\frac{1}{2} \leq s < 1.$$

Ehtojen mukaista arvoa x_0 ei siis löydy kaikille s :n arvoille, vaan ainoastaan, jos s on vähintään $\frac{1}{2}$.

Tarkistetaan, että $x_0 = 2s - 1$ on todella yhtälön ratkaisu.

$$1 + (2s - 1)^2 - 2s \cdot (2s - 1) = 2 - 2s.$$

Nyt lausekkeeseen (1) vertaamalla nähdään, että $x_0 = 2s - 1$ on todella yhtälön ratkaisu.

1 p. (yht. 5 p.)

Lasketaan kysytty integraali, kun tiedetään, että $f(x_0, s) = f(1, s)$. Huomaa, että integraalin sisällä oleva lauseke $f(1, s)$ ei riipu muuttujasta x , eli se on integroin-

nin kannalta vakio.

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^1 f(x_0, s) \, dx &= \int_{2s-1}^1 f(1, s) \, dx \\
 &= \int_{2s-1}^1 (f(1, s) \cdot x) \\
 &= f(1, s) \cdot 1 - f(1, s) \cdot (2s - 1) \\
 &= f(1, s) - 2sf(1, s) + f(1, s) \\
 &= 2f(1, s) - 2sf(1, s) \\
 &= 2(1 - s)f(1, s) \\
 &= \cancel{2(1-s)} \cdot \frac{1}{\cancel{4(1-s)}} \\
 &= \frac{2}{4} \\
 &= \frac{1}{2}. \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}
 \end{aligned}$$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Etsitään ehdon mukainen x_0 .

$$\begin{aligned}
 f(x_0, s) &= f(1, s) \\
 \frac{1-s}{(1+x_0^2-2sx_0)^2} &= \frac{1-s}{(1+1^2-2s \cdot 1)^2} \\
 \frac{1-s}{(1+x_0^2-2sx_0)^2} &= \frac{1-s}{(2-2s)^2} \\
 (1+x_0^2-2sx_0)^2 &= (2-2s)^2 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Yhtälön oikealla puolella sulkujen sisällä oleva lauseke on positiivinen, sillä $0 < s < 1$. Vastaavasti yhtälön vasemmalla puolella $2sx_0 < 2x_0$, joten sulkujen sisällä oleva lauseke on

$$1 + x_0^2 - 2sx_0 > 1 + x_0^2 - 2x_0 = x_0^2 - 2x_0 + 1 = (x_0 - 1)^2 \geq 0.$$

Yhtälön (2) kaikki ratkaisut saadaan siis yhtälöstä

$$1 + x_0^2 - 2sx_0 = 2 - 2s \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Tämä on helpointa ratkaista suoraan CAS-ohjelman solve-toiminnolla, mutta yhtälön voisi ratkaista myös käsin esimerkiksi toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla. Alla on näytetty esimerkin vuoksi, miten yhtälön voi ratkaista käsin.

$$x_0^2 - 2sx_0 + 2s + 1 - 2 = 0$$

$$x_0^2 - 2sx_0 + 2s - 1 = 0$$

Yhtälö on muotoa $ax^2 + bx + c = 0$ oleva toisen asteen yhtälö, missä $x = x_0$ ja kertoimet ovat $a = 1$, $b = -2s$ ja $c = 2s - 1$. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

$$x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_0 = \frac{-(-2s) \pm \sqrt{(-2s)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2s - 1)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_0 = \frac{2s \pm \sqrt{4s^2 - 8s + 4}}{2}$$

$$x_0 = \frac{2s \pm \sqrt{4(s^2 - 2s + 1)}}{2}$$

$$x_0 = \frac{2s \pm \sqrt{2^2(s - 1)^2}}{2}$$

$$x_0 = \frac{2s \pm 2(s - 1)}{2}$$

$$x_0 = \frac{2s + 2(s - 1)}{2}$$

tai

$$x_0 = \frac{2s - s(s - 1)}{2}$$

$$x_0 = 2s - 1$$

tai

$$x_0 = 1$$

Laskinohjelmalla ratkaisuksi saadaan

$$x_0 = 2s - 1 \quad \text{tai}$$

$$x_0 = 1$$

Tehtävässä etsittiin arvoa, joka toteuttaa ehdon $x_0 < 1$, joten ratkaisu $x_0 = 1$ ei kelpaa. Ainoa ratkaisu on siis $x_0 = 2s - 1$. 1 p. (yht. 5 p.) **Huomaa!** Tehtävänannon oletusten perusteella täytyy olla $0 \leq x_0 < 1$, eli

$$0 \leq 2s - 1 < 1$$

$$1 \leq 2s < 2$$

$$\frac{1}{2} \leq s < 1.$$

Ehtojen mukaista arvoa x_0 ei siis löydy kaikille s :n arvoille, vaan ainoastaan, jos s on vähintään $\frac{1}{2}$.

Lasketaan kysytty integraali, kun tiedetään, että

$$\begin{aligned} f(x_0, s) &= f(1, s) \\ &= \frac{1-s}{(2-2s)^2} \\ &= \frac{\cancel{1}-s}{2^2(1-s)^2} \\ &= \frac{1}{4(1-s)}. \end{aligned}$$

Huomaa, että integraalin sisällä oleva lauseke $f(1, s)$ ei riipu muuttujasta x , eli se on integroinnin kannalta vakio.

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^1 f(x_0, s) \, dx &= \int_{2s-1}^1 f(1, s) \, dx \\
&= \int_{2s-1}^1 (f(1, s) \cdot x) \\
&= f(1, s) \cdot 1 - f(1, s) \cdot (2s - 1) \\
&= f(1, s) - 2sf(1, s) + f(1, s) \\
&= 2f(1, s) - 2sf(1, s) \\
&= 2(1 - s)f(1, s) \\
&= \cancel{2(1-s)} \cdot \frac{1}{\cancel{4(1-s)}} \\
&= \frac{2}{4} \\
&= \frac{1}{2}. \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}
\end{aligned}$$

3. Olkoon $x_0 = 2s - 1$ kohdassa 2 määritetty arvo. Kohdan 2 perusteella siis

$$f(x_0, s) = f(1, s).$$

Tarkasteltavan välin $[x_0, 1]$ päätepisteissä siis $f(x, s) = f(x_0, s)$.

Osoitetaan seuraavaksi, että päätepisteiden välissä $f(x, s)$ on suurempi kuin päätepisteissä. Merkitään

$$f(x, s) = \frac{1 - s}{(1 + x^2 - 2sx)^2} = \frac{1 - s}{(h(x))^2}.$$

Toisin sanoen

$$h(x) = 1 + x^2 - 2sx = x^2 - 2sx + 1.$$

Funktion h derivaatta on

$$h'(x) = 2x - 2s.$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta.

$$h'(x) = 0$$

$$2x - 2s = 0$$

$$x = s.$$

Tiedetään, että $s < 1$, eli $s - 1 < 0$, joten

$$x_0 = 2s - 1 = s + (s - 1) < s + 0 = s.$$

Näin ollen derivaatan nollakohta $x = s$ kuuluu tarkasteltavalle välille $2s - 1 < x < 1$. Derivaatta $h'(x) = 2x - 2s$ on positiivinen, kun $x > s$ ja negatiivinen, kun $x < s$. Funktio h on siis aidosti kasvava, kun $x > s$ ja aidosti vähenevä, kun $x < s$. 1 p. (yht. 7 p.) Funktion h kulun voisi perustella tässä myös vedoten siihen, että h :n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Toisaalta koska $0 < s < 1$,

$$h(x) = x^2 - 2sx + 1 > x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0.$$

Näin ollen myös $(h(x))^2$ on aidosti kasvava, kun $x > s$ ja aidosti vähenevä, kun $x < s$. 1 p. (yht. 8 p.)

Funktion f lauseke on

$$f(x, s) = \frac{1 - s}{(h(x))^2},$$

joten f on aidosti kasvava, kun $(h(x))^2$ on aidosti vähenevä, ja vastaavasti f on aidosti vähenevä, kun $(h(x))^2$ on aidosti kasvava. Funktio f on siis aidosti kasvava, kun $x_0 < x < s$, ja aidosti vähenevä, kun $s < x < 1$.

Tästä seuraa, että välillä $x_0 < x < s$ pätee

$$f(x, s) > f(x_0, s)$$

ja välillä $s < x < 1$ pätee

$$f(x, s) > f(1, s).$$

Toisaalta $f(x_0, s) = f(1, s)$, joten koko välillä $[x_0, 1]$ pätee

$$f(x, s) \geq f(x_0, s). \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

4. Kohdan 1 nojalla

$$\int_0^1 \lim_{s \rightarrow 1} f(x, s) \, dx = 0. \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

Lausekkeen $f(x, s)$ osoittaja $1 - s$ on positiivinen kaikilla $0 < s < 1$ ja sen nimittäjä on neliönä epänegatiivinen. Näin ollen $f(s, x)$ ja sen integraali millä vain välillä $0 \leq x \leq 1$ osavälillä on epänegatiivinen. Olkoon x_0 kohdassa 2 määritetty luku. Täten siis

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, s) \, dx &= \int_0^{x_0} f(x, s) \, dx + \int_{x_0}^1 f(x, s) \, dx \\ &\geq 0 + \int_{x_0}^1 f(x, s) \, dx \\ &= \int_{x_0}^1 f(x, s) \, dx. \end{aligned}$$

Kohdan 3 nojalla välillä $x_0 < x < 1$ pätee $f(x, s) \geq f(x_0, s)$, joten

$$\int_{x_0}^1 f(x, s) \, dx \geq \int_{x_0}^1 f(x_0, s) \, dx.$$

Kohdan 2 perusteella

$$\int_{x_0}^1 f(x_0, s) \, dx = \frac{1}{2}.$$

Näin ollen siis

$$\int_0^1 f(x, s) \, dx \geq \frac{1}{2}.$$

Jos funktion arvo on vähintään $1/2$ kaikilla s , myös sen raja-arvo on vähintään $1/2$, kun $s \rightarrow 1$.

$$\lim_{s \rightarrow 1} \int_0^1 f(x, s) \, dx \geq \frac{1}{2}. \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

Näin ollen

$$\int_0^1 \lim_{s \rightarrow 1} f(x, s) \, dx \neq \int_0^1 f(x, s) \, dx. \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!