

Yo-kokeiden mallivastaukset, kevät 2023

Lyhyt matematiikka

Mafy on opettamiseen, oppimiseen sekä opetusteknologiaan erikoistunut yritys.

Kehitämme itsenäisen ja tehokkaan oppimisen ratkaisuja. Teemme oppimisesta mahdollista kaikille.

Tiesitkö tämän?



83 %

opiskelijoista kertoi Mafynetin edistymiskäyrän lisänneen motivaatiota opiskeluun.



60 %

PK-seudun lukioista käyttää Mafynettiä.



72 %

lääkiksen pääsykoepaikoista meni Mafyn opiskelijoille vuonna 2022.

Mallivastauksien tekijät

Mallivastaukset laatii Mafyn oppimateriaaliitiimi, joka kehittää lukioon tarkoitettuja Mafynetti-oppimateriaaleja.

Oppimateriaaliitiimistä mukana olivat Timo Kalinainen, Saija Ojala ja Sakke Suomalainen. Lisäksi työn tukena olivat Matti Virolainen ja Jona Nsuku.

Palveluitamme ovat

- Mafynetti — sähköinen oppimateriaali
- lääketieteen valmennuskurssit
- kauppätieteiden valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- ylioppilaskirjoituksiin valmentavat kurssit.

Julkaisemme verkkosivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kurssleistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Käyttöehdot

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafy.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion matematiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukionkurseillasi. Nämä mallivastaukset ovat Mafy Oy:n omaisuutta.

Yhteystiedot

<https://mafy.fi/yhteydenotto>

Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	6
Ratkaisu tehtävään 3	10
Ratkaisu tehtävään 4	12
Ratkaisu tehtävään 5	16
Ratkaisu tehtävään 6	19
Ratkaisu tehtävään 7	22
Ratkaisu tehtävään 8	25
Ratkaisu tehtävään 9	27
Ratkaisu tehtävään 10	31
Ratkaisu tehtävään 11	37
Ratkaisu tehtävään 12	40
Ratkaisu tehtävään 13	45

Malliratkaisut päivitetty 3. helmikuuta 2025 klo. 15:45.

1. Perusyhtälöitä (12 p.)

Alla on kuusi osatehtävää 1.1–1.6. Kirjoita kunkin osatehtävän vastauskenttään pelkkä laskun lopputulos ilman välivaiheita ja perusteluja. Jokaisen osatehtävän vastaus on kokonaisluku.

Tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria. Kunkin vastauksen maksimipituus on 5 merkkiä. Vastaukset arvostellaan tietokoneavusteisesti, ja ohjeiden noudattamatta jättäminen voi johtaa pistevähennyksiin. Jokaisesta osatehtävästä voi saada 2 pistettä.

1.1. Laske (2 p.)

$$7 \cdot 2^3 - 1 = \boxed{}$$

1.2. Yhtälön $5x - 2 = 13$ ratkaisu on (2 p.)

$$x = \boxed{}$$

1.3. Suora $y = -2x + 14$ leikkaa x -akselin, kun (2 p.)

$$x = \boxed{}$$

1.4. Yhtälön $x^2 = 8x$ suurempi ratkaisu on (2 p.)

$$x = \boxed{}$$

1.5. Potenssiyhtälön $x^3 = 64$ ratkaisu on (2 p.)

$$x = \boxed{}$$

1.6. Eksponenttiyhtälön $2^x - 128 = 0$ ratkaisu on (2 p.)

$$x = \boxed{}$$

Ratkaisu.

Vastaukset:

1.1. 55

1.2. 3

1.3. 7

1.4. 8

1.5. 4

1.6. 7

Pisteytyksestä: Jokaisesta oikeasta vastauksesta annetaan 2 pistettä.

Perustelut:

1.1. Lasketaan vaihe kerrallaan.

$$\begin{aligned}7 \cdot 2^3 - 1 &= 7 \cdot 8 - 1 \\&= 56 - 1 \\&= 55\end{aligned}$$

1.2. Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned}5x - 2 &= 13 && \parallel + 2 \\5x &= 13 + 2 \\5x &= 15 && \parallel : 5 \\x &= 3\end{aligned}$$

1.3. Suora leikkaa x -akselin kohdassa, jossa $y = 0$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan leikkauskohta x .

$$\begin{aligned}y &= -2x + 14 && \parallel y = 0 \\0 &= -2x + 14 && \parallel + 2x \\2x &= 14 && \parallel : 2 \\x &= 7\end{aligned}$$

1.4. Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned}x^2 &= 8x & \| & -8x \\x^2 - 8x &= 0\end{aligned}$$

Yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $1x^2 - 8x + 0 = 0$. Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa.

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \| & a = 1, b = -8, c = 0 \\x &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} \\x &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 0}}{2} \\x &= \frac{8 \pm \sqrt{64}}{2} \\x &= \frac{8 \pm 8}{2} \\x &= \frac{8+8}{2} \text{ tai } x = \frac{8-8}{2} \\x &= \frac{16}{2} \text{ tai } x = \frac{0}{2} \\x &= 8 \text{ tai } x = 0\end{aligned}$$

Suurempi ratkaisusta on $x = 8$.

Yhtälö voidaan ratkaista myös tulon nollasäännöllä: Tulo on nolla täsmälleen silloin kun jokin tekijöistä on nolla.

$$\begin{aligned}x^2 - 8x &= 0 \\x(x - 8) &= 0 \\x &= 0 \text{ tai } x - 8 = 0 \\x &= 0 \text{ tai } x = 8\end{aligned}$$

1.5. Ratkaistaan yhtälö.

$$x^3 = 64$$

$$x = \sqrt[3]{64}$$

$$x = 4$$

1.6. Ratkaistaan yhtälö.

$$2^x - 128 = 0 \quad || + 128$$

$$2^x = 128 \quad || 128 = 2^7$$

$$2^x = 2^7$$

Yhtälön molemmilla puolilla on potenssi, jonka kantaluku on 2. Koska potenssit ovat yhtä suuria, niin eksponentit ovat yhtä suuria. Siis $x = 7$.

Yhtälö voidaan ratkaista myös logaritmin avulla:

$$2^x - 128 = 0 \quad || + 128$$

$$2^x = 128$$

$$x = \log_2 128$$

$$x = 7$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

2. Yhtälöiden ratkaisut (12 p.)

1. Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1. \end{cases}$$

(4 p.)

2. Ratkaise yhtälö $2x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{4} = 0$. Anna suurempi juuri tarkkana arvona sievennetyssä muodossa ja pienempi juuri likiarvona kahden desimaalin tarkkuudella. (8 p.)

Ratkaisu.

1.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Ratkaistaan yhtälöpari yhteenlaskumenetelmällä.

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöt yhteen.

$$x + 2x + y - y = 8 + 1$$

$$3x = 9 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)} \quad || : 3$$

$$x = 3 \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

Sijoitetaan $x = 3$ yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan siitä y :

$$3 + y = 8 \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)} \quad || - 3$$

$$y = 8 - 3$$

$$y = 5 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Vastaus: $x = 3$ ja $y = 5$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Ratkaistaan yhtälöparin

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

ylemmästä yhtälöstä ensin x :

$$x + y = 8 \quad || - y$$

$$x = 8 - y \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

Sijoitetaan $x = 8 - y$ yhtälöparin alempaan yhtälöön ja ratkaistaan y :

$$2x - y = 1 \quad || x = 8 - y$$

$$2(8 - y) - y = 1 \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

$$16 - 2y - y = 1$$

$$16 - 3y = 1 \quad || - 16$$

$$-3y = 1 - 16$$

$$-3y = -15 \quad || : (-3)$$

$$y = 5 \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Lasketaan vielä x :

$$x = 8 - y \quad || y = 5$$

$$x = 8 - 5$$

$$x = 3 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Vastaus: $x = 3$ ja $y = 5$

Yhtälöpari voidaan ratkaista muillakin tavoilla. Esimerkkejä:

- Kerrotaan ylempi yhtälö luvulla -2 ja lasketaan yhtälöt yhteen. Muuttuja x kumoutuu ja saadaan yhtälö, josta ratkaistaan y . Sijoitetaan saatu muuttujan y arvo jompaankumpaan alkuperäisistä yhtälöistä ja ratkaistaan x .

- Ratkaistaan yhtälöparin ylemmästä yhtälöstä muuttuja y ja sijoitetaan tulos alempaan yhtälöön, jolloin saadaan yhtälö, josta ratkaistaan x . Sijoitetaan saatu tulos yhtälöön, jossa y on ratkaistuna, ja lasketaan y .
- Ratkaistaan yhtälöparin alemmasta yhtälöstä muuttuja y ja sijoitetaan tulos ylempään yhtälöön, jolloin saadaan yhtälö, josta ratkaistaan x . Sijoitetaan saatu tulos yhtälöön, jossa y on ratkaistuna, ja lasketaan y .

2. Kerrotaan yhtälö ensin luvulla 4:

$$2x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{4} = 0 \quad || \cdot 4$$

$$8x^2 - 10x + 1 = 0 \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)}$$

Ratkaistaan yhtälö toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla:

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1}}{2 \cdot 8} \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 32}}{16}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{68}}{16} \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

Suurempi juuri on

$$x = \frac{10 + \sqrt{68}}{16} \quad \text{2 p. (yht. 10 p.)}$$

Pienempi juuri on

$$x = \frac{10 - \sqrt{68}}{16} = 0,1096 \dots \approx 0,11. \quad \text{2 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: Suurempi juuri on $x = \frac{10 + \sqrt{68}}{16}$ ja pienempi juuri $x \approx 0,11$.

Neliöjuurten laskusäännöt eivät kuulu lyhyen matematiikan opetussuunnitelmaan. Laskusäännön $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ avulla ratkaisu voidaan sieventää, mutta tätä ei rat-

kaisussa vaadita.

$$\begin{aligned}x &= \frac{10 \pm \sqrt{68}}{16} \\&= \frac{10 \pm \sqrt{4 \cdot 17}}{16} \\&= \frac{10 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{17}}{16} \\&= \frac{10 \pm 2 \cdot \sqrt{17}}{16} \\&= \frac{5 \pm \sqrt{17}}{8}\end{aligned}$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

3. Prosentteja (12 p.)

1. Vuonna 2019 sairaanhoitajan keskimääräinen kuukausipalkka oli 2 535 euroa. Eräs sairaanhoitaja sai 6 prosenttia keskimääräistä parempaa palkkaa. Hänen nettopalkkansa, eli tilille kuukausittain maksettava summa, oli 1 777,25 euroa. Kuinka monta prosenttia palkasta meni veroihin ja muihin pidätettäviin maksuihin? (6 p.)
2. Vuonna 2021 koronaviruskotitestin arvonlisävero oli 24 % ja myyntihinta 5,60 euroa. Tutkijaryhmä ehdotti testien arvonlisäveron alentamista 10 %:iin. Kuinka paljon tuote maksaa, jos tällainen veron muutos siirtyy täysimääräisesti hintaan? (6 p.)

Ratkaisu.

1. Sairaanhoitajan kuukausipalkka oli 6 % parempi kuin keskimääräinen kuukausipalkka. Sairaanhoitajan palkka oli siis $100 \% + 6 \% = 106 \%$ keskimääräisestä kuukausipalkasta eli 1,06-kertainen keskimääräiseen kuukausipalkkaan verrattuna. Sairaanhoitajan kuukausipalkka oli siis

$$1,06 \cdot 2535 \text{ €} \quad \boxed{1 \text{ p. (yht. 1 p.)}} = 2687,10 \text{ €}. \quad \boxed{1 \text{ p. (yht. 2 p.)}}$$

Sairaanhoitajan nettopalkka oli 1777,25 euroa, joten sairaanhoitaja maksoi kuukausipalkastaan veroja ja muita pidätettäviä kuluja

$$2687,10 \text{ €} - 1777,25 \text{ €} = 909,85 \text{ €}. \quad \boxed{1 \text{ p. (yht. 3 p.)}}$$

Verojen ja muiden pidätettävien kulujen osuus sairaanhoitajan kuukausipalkasta oli siis

$$\frac{909,85 \text{ €}}{2687,10 \text{ €}} \quad \boxed{1 \text{ p. (yht. 4 p.)}} = 0,33859 \dots \quad \boxed{1 \text{ p. (yht. 5 p.)}}$$

$$= 33,859 \dots \%$$

$$\approx 33,9 \% \quad \boxed{1 \text{ p. (yht. 6 p.)}}$$

Vastaus: Palkasta meni 33,9 % veroihin ja muihin pidätettäviin kuluihin.

2. Merkitään koronaviruskotitestin verotonta hintaa kirjaimella x .

Aronlisävero lisätään tuotteen verottomaan hintaan. Kun arvonlisävero oli 24 %, niin arvonlisäveron suuruus oli $0,24x$ euroa, jolloin tuotteen verollinen hinta oli $x + 0,24x$ euroa. Toisaalta, kun arvonlisävero oli 24 %, oli tuotteen myyntihinta $100 \% + 24 \% = 124 \%$ verottomasta hinnasta.

Verollinen hinta oli 1,24-kertainen verottomaan hintaan nähden eli verollinen hinta oli $1,24x$. Toisaalta verollinen hinta oli 5,6 euroa. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä veroton hinta x .

$$x + 0,24x = 5,6$$

$$1,24x = 5,6 \quad \text{2 p. (yht. 8 p.)} \quad || : 1,24$$

$$x = 4,5161 \dots$$

Koronaviruskotitestin veroton hinta oli siis $4,516 \dots$ euroa. 1 p. (yht. 9 p.)

Jos arvonlisävero olisi 10 %, olisi tuotteen myyntihinta $100 \% + 10 \% = 110 \%$ tuotteen verottomasta hinnasta. Kun arvonlisävero olisi 10 %, olisi tuotteen myyntihinta siis 1,10-kertainen verottomaan hintaan verrattuna. Tällöin tuotteen myyntihinta olisi siis

$$1,10 \cdot 4,516 \dots \text{ €} \quad \text{2 p. (yht. 11 p.)} = 4,967 \dots \text{ €} \approx 4,97 \text{ €}. \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: Tuote maksaisi 4,97 €.

Hyväksytään myös, jos veroton hinta on pyöristetty sentin tarkkuuteen 4,52 euroon, mutta laskettu muuten kuten tässä. Tämä ei vaikuta lopulliseen pyöristykseen.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

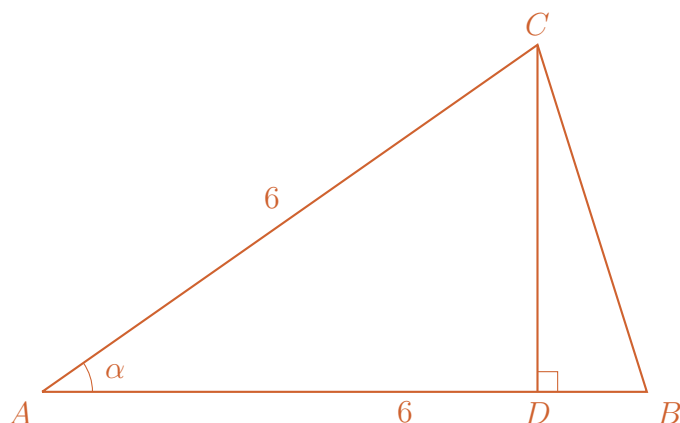
4. Tasakylkinen kolmio (12 p.)

Kolmion ABC sivut AB ja AC ovat 6 senttimetriä pitkiä, ja niiden välinen kulma on α . Piste D sijaitsee sivulla AB niin, että jana CD on kohtisuorassa sivua AB vastaan.

1. Määritä janan CD pituus, kun $\alpha = 30^\circ$. (4 p.)
2. Määritä sellainen α , että kolmion BCD pinta-ala on puolet kolmion ABC pinta-alasta. (4 p.)
3. Määritä janan CD pituus, jos kolmion BCD pinta-ala on kolmasosa kolmion ABC pinta-alasta. (4 p.)

Ratkaisu.

Mallikuvaa ei vaadita tehtävän ratkaisussa, mutta se helpottaa ratkaisun ymmärtämistä. Mallikuvan voi piirtää esim. LibreOffice Draw tai Pinta-ohjelmalla.



1. Koska jana CD on kohtisuorassa sivua AB vastaan, kolmio ADC on suorakulmainen. 1 p. (yht. 1 p.) Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on alkuperäisen kolmion sivu AC , jonka pituus on 6 cm. Janan CD pituus voidaan ratkaista sinin avulla:

$$\sin \alpha = \frac{CD}{AC} \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)} \quad \parallel \cdot AC$$

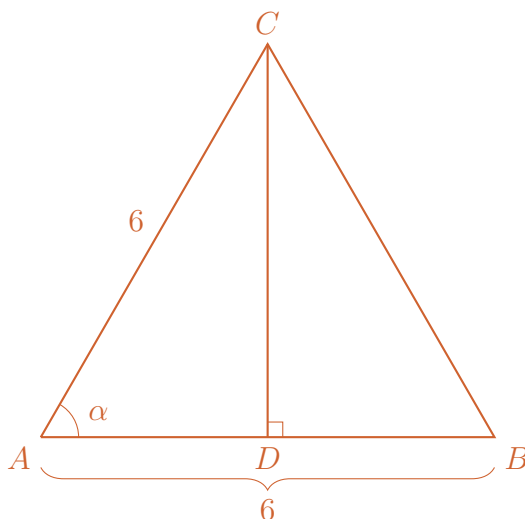
$$CD = AC \sin \alpha \quad \parallel \text{sij. } \alpha = 30^\circ, AC = 6$$

$$= 6 \cdot \sin(30^\circ)$$

$$= 3 \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Vastaus: Janan CD pituus on 3 cm. 1 p. (yht. 4 p.)

2.



Ratkaisuvaihtoehto 1

Kolmioilla ABC ja BCD on sama korkeus CD . Kun kolmion BCD pinta-ala on puolet kolmion ABC pinta-alasta, on sen kannan DB silloin oltava puolet kolmion ABC kannasta AB . 2 p. (yht. 6 p.) Tällöin myös AD on puolet sivusta AB eli $AD = \frac{6}{2} = 3$.

Kulma α saadaan nyt kolmiosta ADC kosinin avulla:

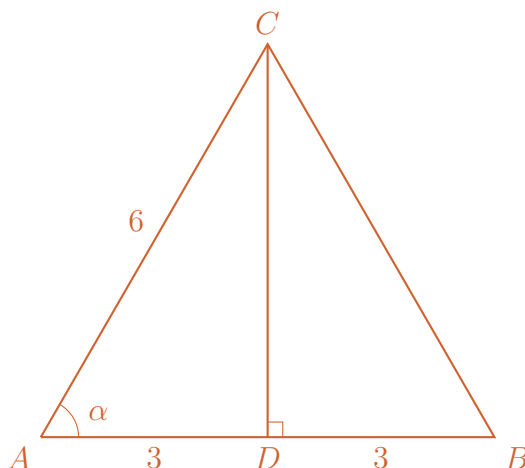
$$\cos \alpha = \frac{AD}{AC} \quad || \text{ sij. } AD = 3, AC = 6$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{6} \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad || \cos^{-1}$$

$$\alpha = 60^\circ \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

Vastaus: Kolmion BCD pinta-ala on puolet kolmion ABC pinta-alasta, kun kulman α suuruus on 60° .



Ratkaisuvaihtoehto 2

Kolmioilla ABC ja BCD on sama korkeus CD . Kun kolmion BCD pinta-ala on puolet kolmion ABC pinta-alasta, on sen kannan DB silloin oltava puolet kolmion ABC kannasta AB . 2 p. (yht. 6 p.) Tällöin myös AD on puolet sivusta AB eli piste D on janan AB keskipiste.

Koska pisteestä C piirretty kolmion ABC korkeusjana jakaa janan AB tasan puoliksi, on kolmio ABC tasakylkinen siten, että sivut AC ja CB ovat yhtä pitkät. 1 p. (yht. 7 p.) Toisaalta tehtävänannon perusteella tiedetään, että sivut AB ja AC ovat yhtä pitkät. Kolmio ABC on siis tasasivuinen, jolloin sen kaikkien kulmien, myös kulman α , suuruus on 60° . 1 p. (yht. 8 p.)

Vastaus: Kolmion BCD pinta-ala on puolet kolmion ABC pinta-alasta, kun kulman α suuruus on 60° .

3. Kolmioilla ABC ja BCD on sama korkeus CD . Kun kolmion BCD pinta-ala on kolmasosa kolmion ABC pinta-alasta, on sen kannan DB silloin oltava kolmasosa kolmion ABC kannasta AB , eli $DB = \frac{6}{3} = 2$. 1 p. (yht. 9 p.) Tällöin sivun AD pituus on $AD = 6 - 2 = 4$. 1 p. (yht. 10 p.)

Nyt janan CD pituus voidaan ratkaista Pythagoraan lauseella kolmiosta ACD :

$$(AC)^2 = (AD)^2 + (CD)^2 \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)} \quad || - (AD)^2$$

$$(CD)^2 = (AC)^2 - (AD)^2$$

$$CD = \pm \sqrt{(AC)^2 - (AD)^2}$$

Koska sivun pituus ei voi olla negatiivinen, hylätään negatiivinen ratkaisu.

$$= \sqrt{6^2 - 4^2}$$

$$= \sqrt{36 - 16}$$

$$= \sqrt{20}$$

$$\approx 4,5$$

Vastaus: Janan CD pituus on 4,5 cm. 1 p. (yht. 12 p.)

Pisteytyksestä: Myös pyöristys 4 cm hyväksytään, sillä tehtävänannon ainoa lukuarvo oli ilmoitettu yhden merkitsevän numeron tarkkuudella.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

5. Erikoiset mittayksiköt (12 p.)

Tämä tästä -ajankohtaishuumoriohjelman jaksossa 119 kerrottiin, että Helsingin alle mahtuu huoltotunneleihin ja muihin tiloihin 500 eduskuntataloa. Eduskuntatalon tilavuus puolestaan kuvailtiin seuraavasti: ”Tavallinen kylpyamme, jollainen voi olla kotona tai hotellihuoneessa, on tilavuudeltaan noin 300 litraa – Jos sinulla on 120 000 tällaista kylpyammetta, niin ne täyttävät neljäsosan eduskuntatalosta.”

1. Mikä on eduskuntatalon tilavuus kuutiometreinä? (6 p.)
2. Usein kuulee verrattavan pinta-aloja jalkapallokenttien kokoon. Jalkapallokenttä on suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat 105 metriä ja 68 metriä. Oletetaan, että huoltotunnelit ja muut tilat ovat suorakulmaisia särmiöitä. Jos huoltotunnelien ja muiden Helsingin alla olevien tilojen korkeus on keskimäärin 4,0 metriä, niin mikä on niiden pohjien yhteenlaskettu pinta-ala jalkapallokenttinä mitattuna? (6 p.)

Ratkaisu.

1.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Tehtävänannosta tiedetään, että 120 000 kylpyammetta, joiden tilavuus on 300 litraa, täyttävät neljäsosan eduskuntatalosta, joten

$$120\,000 \cdot V_{\text{kylpyamme}} = \frac{1}{4} V_{\text{eduskuntatalo}} \quad || \cdot 4$$

$$V_{\text{eduskuntatalo}} = 4 \cdot 120\,000 \cdot V_{\text{kylpyamme}} \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

$$= 4 \cdot 120\,000 \cdot 300 \ell \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

$$= 144\,000\,000 \ell. \quad \text{2 p. (yht. 4 p.)}$$

Vastaus haluttiin kuutiometrinä, joten muunnetaan litrat vielä kuutiometreiksi.

$$144\,000\,000 \ell = 144\,000\,000 \text{ dm}^3$$

$$= 144\,000 \text{ m}^3 \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

$$\approx 140\,000 \text{ m}^3 \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

Vastaus: Eduskuntatalon tilavuus on $140\,000\text{ m}^3$.

Hyväksytään myös vastaus $100\,000\text{ m}^3$, koska tehtävänannon epätarkimmassa lähtöarvossa on vain yksi merkitsevä numero.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Yhden kylpyammeen tilavuus on 300 litraa. Lasketaan 120 000 kylpyammeen tilavuus:

$$\begin{aligned}120\,000 \cdot 300\text{ l} & \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)} = 36\,000\,000\text{ l} \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)} \\ & = 36\,000\,000\text{ dm}^3 \\ & = 36\,000\text{ m}^3 \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}\end{aligned}$$

Eduskuntatalon tilavuus on nelinkertainen tilavuuteen $36\,000\text{ m}^3$ nähden, joten eduskuntatalon tilavuus on

$$4 \cdot 36\,000\text{ m}^3 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} = 144\,000\text{ m}^3 \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)} \approx 140\,000\text{ m}^3. \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

Vastaus: Eduskuntatalon tilavuus on $140\,000\text{ m}^3$.

Hyväksytään myös vastaus $100\,000\text{ m}^3$, koska tehtävänannon epätarkimmassa lähtöarvossa on vain yksi merkitsevä numero.

2. Huoltotunneleihin ja muihin tiloihin mahtuu 500 eduskuntataloa. Yhden eduskuntatalon tilavuus on $144\,000\text{ m}^3$, joten huoltotunnelien ja muiden tilojen tilavuus on

$$\begin{aligned}V_{\text{huoltotunnelit}} & = 500V_{\text{eduskuntatalo}} \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)} \\ & = 500 \cdot 144\,000\text{ m}^3 \\ & = 72\,000\,000\text{ m}^3. \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}\end{aligned}$$

Huoltotunnelien korkeus on $h = 4$ metriä. Huoltotunnelit ovat suorakulmaisia särmiöitä, joten lasketaan huoltotunnelien pohjien yhteenlaskettu pinta-ala:

$$\begin{aligned}
 V &= Ah \\
 A_{\text{huoltotunnelit}} &= \frac{V_{\text{huoltotunnelit}}}{h} \\
 &= \frac{72\,000\,000\text{ m}^3}{4\text{ m}} \quad (1\text{ p. (yht. 9 p.)}) \\
 &= 18\,000\,000\text{ m}^2 \quad (1\text{ p. (yht. 10 p.)})
 \end{aligned}$$

Jalkapallokenttä on suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat 105 metriä ja 68 metriä. Lasketaan jalkapallokentän pinta-ala:

$$\begin{aligned}
 A_{\text{jalkapallokenttä}} &= 68\text{ m} \cdot 105\text{ m} \\
 &= 7140\text{ m}^2 \quad (1\text{ p. (yht. 11 p.)})
 \end{aligned}$$

Lasketaan, kuinka monta jalkapallokenttää mahtuu huoltotunnelien pohjien yhteenlaskettuun pinta-alaan:

$$\begin{aligned}
 \text{jalkapallokenttien määrä} &= \frac{A_{\text{huoltotunnelit}}}{A_{\text{jalkapallokenttä}}} \\
 &= \frac{18\,000\,000\text{ m}^2}{7140\text{ m}^2} \\
 &= 2521,008\dots \\
 &\approx 2500
 \end{aligned}$$

Vastaus: Huoltotunnelien ja muiden tilojen pohjien yhteenlaskettu pinta-ala on 2500 jalkapallokenttää. 1 p. (yht. 12 p.)

6. Lahjavero (12 p.)

Aineisto:

6. A [Taulukko: Lahjaveron määrä](#)

Lahjaveroa on maksettava, kun omaisuus siirtyy toiselle henkilölle lahjana ja lahjan arvo on 5 000 euroa tai enemmän. Lahjavero määräytyy taulukossa [6.A](#) esitetyn mukaisesti. Tarkastellaan tilanteita, joissa annetaan vain yksi lahja.

1. Mikä on 80 000 euron lahjan veron määrä? Kuinka monta prosenttia tästä lahjasta maksetaan veroa? (6 p.)
2. Kuinka suuresta lahjasta maksetaan 4 000 euroa lahjaveroa? (6 p.)

Ratkaisu.

1. Lahjan arvo on 80 000 euroa, joten tarkastellaan taulukon riviä, jossa lahjan arvo on 55 000 – 200 000 euroa. 1 p. (yht. 1 p.) Vero alarajan kohdalla on 4700 euroa ja veroprosentti ylimenevästä osasta 12 %.

Lahjan ensimmäisestä 55 000 eurosta maksetaan veroa siis 4700 euroa. Alarajan ylittävä osuus on $(80\,000 - 55\,000)$ euroa. Tästä ylimenevästä osasta maksetaan veroa 12 %.

Lasketaan maksettavan lahjaveron määrä:

$$4700 \text{ €} + 0,12 \cdot (80\,000 \text{ €} - 55\,000 \text{ €}) = 7700 \text{ €} \quad \text{2 p. (yht. 3 p.)}$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia lahjaveron määrä on lahjan arvosta:

$$\frac{7700 \text{ €}}{80\,000 \text{ €}} \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} = 0,09625 \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)} = 9,625 \% \approx 9,6 \% \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

Vastaus: Lahjaveron määrä on 7700 euroa ja lahjasta maksetaan veroa 9,6 %.

2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Merkitään lahjan arvoa euroina kirjaimella x .

Koska lahjasta maksettavan veron suuruus on 4000 euroa, on lahjan arvo välillä 25 000 – 55 000 euroa. 1 p. (yht. 7 p.) Jos lahjan arvo olisi esimerkiksi välillä 55 000 – 200 000, maksettaisiin veroa jo yli 4000 euroa.

Vero alarajan kohdalla on 1700 euroa.

Alarajan ylittävän osan suuruus on $(x - 25\,000)$ euroa. Tästä osasta maksetaan veroa 10 %.

Lahjasta maksetaan veroa siis yhteensä

$$1700 + 0,10 \cdot (x - 25\,000) \quad \text{2 p. (yht. 9 p.)}$$

euroa. Toisaalta veroa maksetaan 4000 euroa. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä lahjan arvo x .

$$1700 + 0,10 \cdot (x - 25\,000) = 4000 \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

$$1700 + 0,10x - 2500 = 4000$$

$$0,10x - 800 = 4000 \quad || + 800$$

$$0,10x = 4000 + 800$$

$$0,10x = 4800 \quad || : 0,10$$

$$x = 48\,000 \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

Yhtälö voidaan ratkaista myös laskinohjelmalla.

Lahjan arvo on siis 48 000 euroa. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Lahjan arvo on 48 000 euroa.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Koska lahjasta maksettavan veron suuruus on 4000 euroa, on lahjan arvo välillä 25 000 – 55 000 euroa. 1 p. (yht. 7 p.) Jos lahjan arvo olisi esimerkiksi välillä 55 000 – 200 000, maksettaisiin veroa jo yli 4000 euroa.

Vero alarajan kohdalla on 1700 euroa.

Merkitään 25 000 euron ylittävää osaa kirjaimella x . Tästä osasta maksetaan veroa 10 %.

Veroa maksetaan yhteensä $(1700 + 0,10x)$ euroa. 1 p. (yht. 8 p.) Toisaalta veroa maksetaan 4000 euroa. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x .

$$1700 + 0,10x = 4000 \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)} \quad || - 1700$$

$$0,10x = 4000 - 1700$$

$$0,10x = 2300 \quad || : 0,10$$

$$x = 23\,000 \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

Yhtälö voidaan ratkaista myös laskinohjelmalla.

Lahjan arvo siis ylittää 25 000 euron alarajan 23 000 eurolla. Lahjan arvo on tällöin

$$25\,000\text{ €} + 23\,000\text{ €} \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)} = 48\,000\text{ €}. \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: Lahjan arvo on 48 000 euroa.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

7. Kolikko ja noppa (12 p.)

Pelissä heitetään kolikkoa ja tavallista noppaa.

1. Mikä on todennäköisyys sille, että pelaaja A saa yhdellä kolikonheitolla klaavan ja pelaaja B yhdellä nopanheitolla silmäluvun 5? (4 p.)
2. Pelaaja C väittää pelaajalle D: "On todennäköisempää, että minä saan kahdella kolikonheitolla kaksi klaavaa kuin että sinä saat kahdella nopanheitolla summaksi vähintään yhdeksän." Onko pelaaja C oikeassa? (8 p.)

Ratkaisu.

1. Yhdellä kolikonheitolla voi tulla joko klaava tai kruuna. Todennäköisyys, että pelaaja A saa siis yhdellä heitolla klaavan, on

$$P(\text{A saa klaavan}) = \frac{1}{2}. \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

Tavallisessa nopassa on kuusi silmälukua (silmäluvut 1–6). Todennäköisyys, että pelaaja B saa yhdellä nopanheitolla silmäluvun 5, on

$$P(\text{B saa silmäluvun 5}) = \frac{1}{6}. \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

Todennäköisyys, että pelaaja A saa klaavan ja pelaaja B silmäluvun 5, voidaan laskea kertolaskusäännöllä:

$$\begin{aligned} P(\text{A saa klaavan ja B saa silmäluvun 5}) &= P(\text{A saa klaavan}) \cdot P(\text{B saa silmäluvun 5}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)} \\ &= \frac{1}{12} \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} \\ &= 0,08333 \dots \\ &\approx 0,083 \\ &= 8,3 \% \end{aligned}$$

Vastaus: Todennäköisyys on $\frac{1}{12}$.

Hyväksytään myös vastaukset 0,83 ja 8,3 %.

2. Lasketaan ensin todennäköisyys, että pelaaja C saa kahdella kolikonheitolla kaksi klaavaa. Todennäköisyys, että pelaaja saa yhdellä heitolla klaavan, on $\frac{1}{2}$. Tällöin todennäköisyys, että pelaaja C saa kaksi klaavaa, on

$$\begin{aligned}
 P(\text{C saa kaksi klaavaa}) &= P(\text{saa 1. heitolla klaavan ja saa 2. heitolla klaavan}) \\
 &= P(\text{saa 1. heitolla klaavan}) \cdot P(\text{saa 2. heitolla klaavan}) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)} \\
 &= \frac{1}{4} \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)} \\
 &= 0,25.
 \end{aligned}$$

Lasketaan sitten todennäköisyys, että pelaaja D saa kahdella nopanheitolla silmäluvujen summaksi vähintään luvun 9. **Vähintään 9 tarkoittaa, että silmälukujen summa voi olla 9, 10, 11 tai 12.**

Lasketaan ensin, kuinka monta erilaista silmälukuparia kahdella nopalla voidaan saada. Ensimmäisessä nopanheitossa silmäluvulle on 6 vaihtoehtoa. Vastaavasti toisessa nopanheitossa vaihtoehtoja silmäluvulle on 6 kappaletta. Tuloperiaatteella saadaan kaikkien mahdollisten silmälukuparien lukumäärä:

$$\text{kaikkien silmälukuparien lukumäärä} = 6 \cdot 6 = 36. \quad \text{1 p. (yht. 7p.)}$$

Luetellaan suotuisat silmälukuparit eli parit, joiden summa on 9 tai enemmän. Suotuisia pareja ovat seuraavat:

$$\begin{aligned}
 &(3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6) \\
 &(4, 5), (5, 4), (5, 5) \\
 &(6, 3), (6, 4), (6, 5) \quad \text{2 p. (yht. 9 p.)}
 \end{aligned}$$

Suotuisia silmälukupareja on siis 10. 1 p. (yht. 10 p.)

Lasketaan todennäköisyys, että kahdella heitolla silmälukujen summa on vähin-

tään 9:

$$\begin{aligned}P(\text{silmlukujen summa vähintään } 9) &= \frac{\text{suotuisten silmlukuparien lukumäärä}}{\text{kaikkien silmlukuparien lukumäärä}} \\&= \frac{10}{36} \\&= 0,2777 \dots\end{aligned}$$

Todennäköisyys, että pelaaja D saa kahdella heitolla silmlukujen summaksi vähintään 9, on suurempi kuin todennäköisyys, että pelaaja C saa kahdella heitolla kaksi klaavaa. 1 p. (yht. 11 p.) Näin ollen pelaaja C on väärässä. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Pelaaja C ei ole oikeassa.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

8. Paraabelin tangentti (12 p.)

Paraabeli $y = x^2 + bx + c$ kulkee pisteen $(9, 5)$ kautta, ja siinä sen tangentin kulmakerroin on 2. Määritä kertoimet b ja c derivaatan avulla.

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Paraabeli $y = x^2 + bx + c$ on funktion $f(x) = x^2 + bx + c$ kuvaaja.

Funktion f derivaattafunktio on $f'(x) = 2x + b$. 2 p. (yht. 2 p.)

Funktion f kuvaajalle kohtaan $(9, 5)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $f'(9)$. Toisaalta tangentin kulmakerroin on 2. Tästä saadaan seuraava yhtälö:

$$f'(9) = 2 \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Koska paraabeli kulkee pisteen $(9, 5)$ kautta, niin $f(9) = 5$. 1 p. (yht. 4 p.)

Tallennetaan funktio $f(x) = x^2 + bx + c$ laskinohjelman muistiin. On ratkaistava seuraava yhtälöpari:

$$\begin{cases} f'(9) = 2 \\ f(9) = 5 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan $b = -16$, $c = 68$. 8 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: $b = -16$, $c = 68$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Paraabeli $y = x^2 + bx + c$ on funktion $f(x) = x^2 + bx + c$ kuvaaja.

Funktion f derivaattafunktio on $f'(x) = 2x + b$. 2 p. (yht. 2 p.)

Funktion f kuvaajalle kohtaan $(9, 5)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $f'(9)$. Toisaalta tangentin kulmakerroin on 2. Tästä saadaan seuraava yhtälö:

$$f'(9) = 2 \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

$$2 \cdot 9 + b = 2 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

$$18 + b = 2 \quad \parallel - 18$$

$$b = 2 - 18$$

$$b = -16 \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)}$$

Koska paraabeli kulkee pisteen $(9, 5)$ kautta, niin $f(9) = 5$. 1 p. (yht. 7 p.) Tästä saadaan seuraava yhtälö:

$$f(9) = 5$$

$$9^2 + b \cdot 9 + c = 5 \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

$$81 + 9b + c = 5 \quad \parallel b = -16$$

$$81 + 9 \cdot (-16) + c = 5 \quad \text{2 p. (yht. 10 p.)}$$

$$-63 + c = 5 \quad \parallel + 63$$

$$c = 5 + 63$$

$$c = 68 \quad \text{2 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: $b = -16, c = 68$

9. Älypuhelinien käyttöikä (12 p.)

Aineisto:

9. A [Taulukko: Älypuhelinien käyttöikä](#)

Älypuhelinien keskimääräiset käyttöiät eräissä maissa on esitetty taulukossa [9.A](#).

1. Laske taulukossa esitettyjen keskimääräisten käyttöikäien keskiarvo $\bar{x}$ ja keskihajonta s . (4 p.)
2. Miksi osatehtävässä 9.1 laskettu keskiarvo $\bar{x}$ ei tuota kyseisten maiden älypuhelinien käyttöikäien keskiarvoa? (4 p.)
3. Oletetaan, että älypuhelinien käyttöikä koko maailmassa noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 23 kuukautta ja keskihajonta 2,55 kuukautta. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valitun älypuhelimien käyttöikä on vähintään kolme vuotta? (4 p.)

Ratkaisu.

1.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Kopioidaan aineisto LibreOffice Calc-tilukkolaskentaohjelmaan ja lasketaan aineiston keskiarvo ja keskihajonta.

	A	B	C	D
1	Maa	Keskimääräinen käyttöikä (kk)		
2	Meksiko	18		
3	Thaimaa	19		
4	Saudi-Arabia	19		
5	Intia	20		
6	Etelä-Afrikka	21		
7	Saksa	21		
8	Malesia	22		
9	Australia	22		
10	Kiina	22		
11	Japani	26		
12				
13				
14	keskiarvo	21	KESKIARVO(B2:B11)	
15	keskihajonta	2,144761059	KESKIAJONTA.P(B2:B11)	
16	otoskeskihajonta	2,260776661	KESKIAJONTA.S(B2:B11)	

Taulukossa esitettyjen keskimääräisten käyttöikäen keskiarvo on 21 kuukautta ja keskihajonta 2,144... $\approx$ 2,1 kuukautta.

Hyväksytään myös otoskeskihajonta 2,3 kuukautta.

Vastaus: Keskiarvo on 21 kuukautta ja keskihajonta 2,1 kuukautta.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Lasketaan aineiston keskiarvo:

$$\frac{18 + 19 + 19 + 20 + 21 + 21 + 22 + 22 + 22 + 26}{10} = 21$$

Lasketaan aineiston keskihajonta:

$$\begin{aligned}
 s &= \sqrt{\frac{(18 - 21)^2 + 2(19 - 21)^2 + \dots + 3(22 - 21)^2 + (26 - 21)^2}{10}} \\
 &= 2,1447 \dots \\
 &\approx 2,1
 \end{aligned}$$

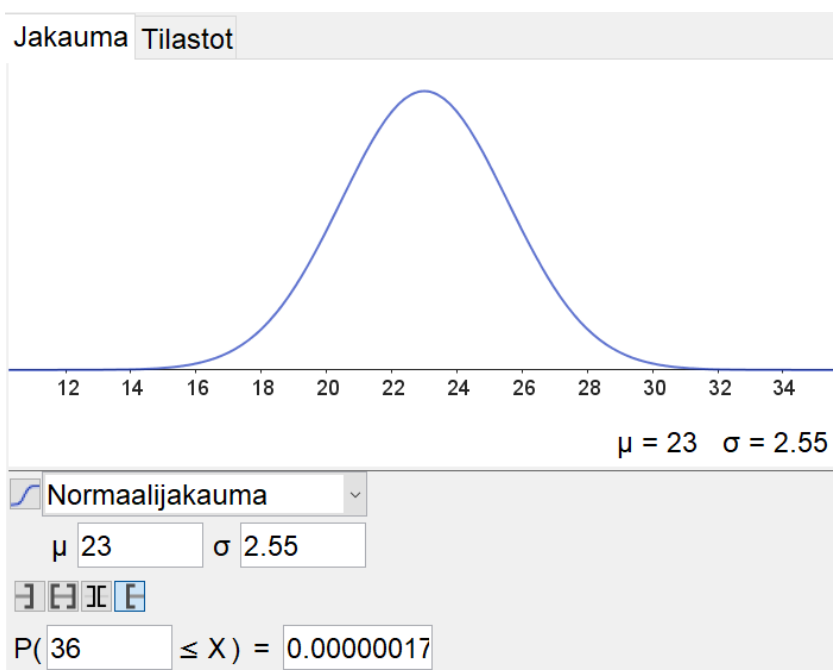
Vastaus: Keskiarvo on 21 kuukautta ja keskihajonta 2,1 kuukautta.

2. Kohdassa 9.1 laskettu keskiarvo on laskettu kunkin maan älypuhelinien käyttöikien keskiarvoa käyttäen. Älypuhelinien lukumäärä vaihtelee kussakin maassa, joten osa-aineistojen avulla laskettu keskiarvo ei vastaa kaikkien kyseisten maiden älypuhelinien käyttöikien keskiarvoa. 4 p. (yht. 8 p.)

3.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Käytetään GeoGebran todennäköisyyslaskuria.



Todennäköisyys, että satunnaisesti valitun älypuhelimien käyttöikä on vähintään kolme vuotta (36 kuukautta), on $1,71589... \cdot 10^{-7} \approx 1,7 \cdot 10^{-7}$. 4 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Todennäköisyys on $1,7 \cdot 10^{-7}$.

Vastaus voidaan antaa myös muodossa 0,000 000 17.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Ratkaistaan tehtävä TI-Nspirellä.

Älypuhelinien käyttöikä koko maailmassa noudattaa tehtävänannon mukaan normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on $\mu = 23$ kuukautta ja keskihajonta $\sigma = 2,55$ kuukautta. Lasketaan todennäköisyys, että satunnaisesti valitun puhelimen käyttöikä on vähintään 3 vuotta eli 36 kuukautta:

$$\begin{aligned}P(\text{käyttöikä vähintään 36 kuukautta}) &= \text{normCdf}(36, \text{infinity}, 23, 2.55) \\&= 1,71589... \cdot 10^{-7} \\&\approx 1,7 \cdot 10^{-7} \quad \text{4 p. (yht. 12 p.)}\end{aligned}$$

Vastaus: Todennäköisyys on $1,7 \cdot 10^{-7}$.

Vastaus voidaan antaa myös muodossa 0,000 000 17.

10. Hirsitalo painuu kokoon (12 p.)

Hirsitalon rakentamisessa pitää huomioida, että rakennus painuu kokoon muutamman vuoden ajan. Tämä tehdään jättämällä rako eli niin sanottu painumavara esimerkiksi ovien ja ikkunoiden päälle. Eräs uuden hirsitalon omistaja arvioi, että hirsien painumista tapahtuu kahdeksan vuoden ajan ja vuotuiset painumat muodostavat geometrisen lukujonon. Hänen talonsa painumavara on 6,0 cm.

1. Auta talon omistajaa esittämällä geometrinen lukujono, joka kuvaa talon vuosittaista painumista. Lukujono täyttää seuraavat ehdot:

- Ensimmäinen jäsen kuuluu välille [2,0 cm; 3,0 cm].
- Kahdeksan ensimmäisen jäsenen summa S kuuluu välille [5,0 cm; 6,0 cm].

Ilmoita vastauksessa lukujonon suhdeluku q ja osoita laskulla, että summa S kuuluu vaaditulle välille. (8 p.)

2. Piirrä pylväsdiagrammi kahdeksan ensimmäisen vuoden vuosittaisista painumista. (4 p.)

Ratkaisu.

1.

Ratkaisuvaihtoehto 1: Taulukkolaskentaohjelmalla

Muodostetaan taulukkolaskentaohjelmaan taulukko, johon voidaan syöttää mahdollisia lukujonon ensimmäisen jäsenen a_1 arvoja sekä erilaisia lukujonon suhdelukuja q . Alla olevassa kuvassa on ensin esitetty käytetyt laskukaavat ja sen jälkeen eräs mahdollinen ratkaisu.

	A	B	C	D	E
1	a1	2,5			
2	a2	=B1*\$E\$2		q=	0,55
3	a3	=B2*\$E\$2			
4	a4	=B3*\$E\$2			
5	a5	=B4*\$E\$2		Summa:	=SUMMA(B1:B8)
6	a6	=B5*\$E\$2			
7	a7	=B6*\$E\$2			
8	a8	=B7*\$E\$2			
9					

	A	B	C	D	E
1	a1	2,5			
2	a2	1,375		q=	0,55
3	a3	0,75625			
4	a4	0,4159375			
5	a5	0,228765625		Summa:	5,509036701172
6	a6	0,125821094			
7	a7	0,069201602			
8	a8	0,038060881			
9					

Vastaus: Ehdot toteutuvat, jos lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 2,5$ ja suhdeluku on $q = 0,55$.

Pisteytyksestä:

- Valittu ensimmäinen jäsen ja suhdeluku niin, että ehdot täyttyvät. 4 p. (yht. 4 p.)
- Laskettu lukujonon jäsenet järjestysluvuilla $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. 2 p. (yht. 6 p.)
- Laskettu kahdeksan ensimmäisen jäsenen summa. Jäsenten ei tarvitse olla samat kuin yllä olevassa laskussa, kunhan vaaditut ehdot täyttyvät. 2 p. (yht. 8 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 2: Kokeilemalla käyttäen geometrisen summan kaavaa

Geometrisen lukujonon kahdeksan ensimmäisen jäsenen summa voidaan laskea kaavalla

$$S_8 = \frac{a_1(1 - q^8)}{1 - q}, \quad \text{jos } q \neq 1. \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)}$$

Kokeillaan erilaisia ensimmäisen jäsenen ja suhdeluvun lukuarvoja, kunnes löydetään sellaiset, joilla tehtävän vaatimukset toteutuvat. Valitaan ensimmäiseksi jäseneksi $a_1 = 3$. (Tämä kuuluu tehtävänannossa annetulle sallitulle välille.)

2 p. (yht. 4 p.)

Valitaan suhdeluvuksi $q = \frac{1}{2}$.

2 p. (yht. 6 p.)

Summa on tällöin

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{a_1(1 - q^8)}{1 - q} \\ &= \frac{3 \cdot (1 - (\frac{1}{2})^8)}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{3 \cdot (1 - \frac{1}{2^8})}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3 \cdot (1 - \frac{1}{256})}{\frac{1}{2}} \\ &= 5,976\,562\,5 \end{aligned}$$

1 p. (yht. 7 p.)

Painuma on siis 5,976 . . . cm, joka kuuluu välille [5,0 cm; 6,0 cm].

1 p. (yht. 8 p.)

Vastaus: Ehdot toteutuvat, jos lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 3$ ja suhdeluku on $q = \frac{1}{2}$.

Pisteytyksestä: Myös muut lukuarvot hyväksytään, kunhan tehtävänannon ehdot toteutuvat niillä.

Ratkaisuvaihtoehto 3: Ilman taulukkolaskentaa ja geometrisen summan kaavaa

Kokeillaan erilaisia ensimmäisen jäsenen ja suhdeluvun lukuarvoja, kunnes löydetään sellaiset, joilla tehtävän vaatimukset toteutuvat. Valitaan ensimmäiseksi jäseneksi $a_1 = 3$. (Tämä kuuluu tehtävänannossa annetulle sallitulle välille.)

2 p. (yht. 2 p.)

Valitaan suhdeluvuksi $q = \frac{1}{2}$.

2 p. (yht. 4 p.)

Määritetään lisää lukujonon jäseniä. Jäsenestä saadaan seuraava jäsen kertomal-

la suhdeluvulla $q = \frac{1}{2}$.

$$a_2 = a_1 \cdot q = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$a_5 = a_4 \cdot q = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

$$a_6 = a_5 \cdot q = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{32}$$

$$a_7 = a_6 \cdot q = \frac{3}{32} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{64}$$

$$a_8 = a_7 \cdot q = \frac{3}{64} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{128} \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)}$$

Summa on tällöin

$$\begin{aligned} S_8 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \\ &= 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{3}{64} + \frac{3}{128} \\ &= 5,976\,562\,5 \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)} \end{aligned}$$

Painuma on siis 5,976... cm, joka kuuluu välille [5,0 cm; 6,0 cm]. 1 p. (yht. 8 p.)

Vastaus: Ehdot toteutuvat, jos lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 3$ ja suhdeluku on $q = \frac{1}{2}$.

Ratkaisuvaihtoehto 4: Geometrisen summan kaavalla toisella tavalla

Geometrisen lukujonon kahdeksan ensimmäisen jäsenen summa voidaan laskea kaavalla

$$S_8 = \frac{a_1(1 - q^8)}{1 - q} \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)}, \quad \text{jos } q \neq 1.$$

Valitaan ensimmäiseksi jäseneksi $a_1 = 2,5$. (Tämä kuuluu tehtävänannossa annetulle sallitulle välille.) 2 p. (yht. 4 p.) Kahdeksan ensimmäisen jäsenen summa on tällöin

$$S_8 = \frac{2,5(1 - q^8)}{1 - q}.$$

Ratkaistaan, mikä suhdeluvun q tulee olla, jotta summa olisi 5,5 (joka on vaadittavan välin $[5,0 \text{ cm}; 6,0 \text{ cm}]$ keskipisteessä). Yhtälön

$$\frac{2,5(1 - q^8)}{1 - q} = 5,5$$

ratkaisuksi saadaan laskinohjelmalla $q = 0,549\,217\dots$ 1 p. (yht. 5 p.) Valitaan tätä ratkaisua lähellä oleva arvo $q = 0,55$. 1 p. (yht. 6 p.) Todetaan laskemalla, että summa on tällöin välillä $[5,0 \text{ cm}; 6,0 \text{ cm}]$.

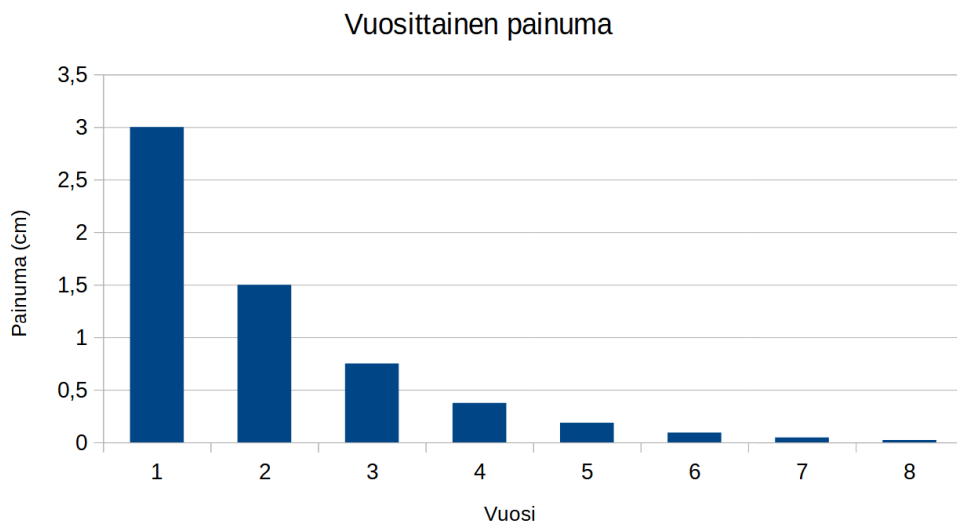
Lasketaan summa, kun $a_1 = 2,5$ ja $q = 0,55$.

$$S_8 = \frac{2,5 \cdot (1 - 0,55^8)}{1 - 0,55} = 5,509\dots$$
 1 p. (yht. 7 p.)

Painuma on siis $5,509\dots \text{ cm}$, joka kuuluu välille $[5,0 \text{ cm}; 6,0 \text{ cm}]$. 1 p. (yht. 8 p.)

Vastaus: Ehdot toteutuvat, jos lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 2,5$ ja suhdeluku on $q = 0,55$.

2. Piirretään pyydetty pylväsdiagrammi. Pylväsdiagrammissa on käytetty kohdan 1 ratkaisuvaihtoehtojen 1-3 lukuarvoja.



4 p. (yht. 12 p.)

Pylväskaavion akselien nimeämistä ei vaadita. Pylväskaavioon hyväksytään muitakin lukuarvot, kunhan tehtävänannon ehdot toteutuvat niillä.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

11. Reunapalat (12 p.)

Tuhannen palan palapelin koko on $70\text{ cm} \times 50\text{ cm}$. Arvioi, kuinka suuri osuus paloista on reunapaloja. Kirjoita näkyviin, mitä oletuksia arvioinnissasi teet.

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Palapelin koko on $70\text{ cm} \times 50\text{ cm}$. Lasketaan palapelin pinta-ala:

$$\begin{aligned} A_{\text{palapeli}} &= 70\text{ cm} \cdot 50\text{ cm} \\ &= 3500\text{ cm}^2 \end{aligned} \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

Palapelissä on 1000 palaa, joten yhden palan keskimääräinen pinta-ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{pala}} &= \frac{A_{\text{palapeli}}}{1000} \\ &= 3,5\text{ cm}^2. \end{aligned} \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

Oletetaan, että palat ovat neliön muotoisia. 2 p. (yht. 4 p.)

Lasketaan yhden neliön muotoisen palan keskimääräinen sivun pituus a :

$$\begin{aligned} a^2 &= 3,5 \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)} \\ a &= \pm\sqrt{3,5} \\ a &= \pm 1,87082 \dots \end{aligned}$$

Sivun pituus ei voi olla negatiivinen, joten hylätään ratkaisu $a = -1,87082 \dots\text{ cm}$.

Palan keskimääräinen sivun pituus on siis $a = 1,87082 \dots\text{ cm}$. 1 p. (yht. 6 p.)

Lasketaan, kuinka monta palaa palapelin 70 cm pitkälle sivulle keskimäärin mahtuu:

$$\frac{70\text{ cm}}{1,87082 \dots\text{ cm}} = 37,416 \dots \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

Lasketaan vastaavasti, kuinka monta palaa palapelin 50 cm pitkälle sivulle keskimäärin mahtuu:

$$\frac{50\text{ cm}}{1,87082 \dots\text{ cm}} = 26,726 \dots \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

Lasketaan, kuinka monta palaa on arviolta palapelin reunoilla:

$$2 \cdot 26,726 \dots + 2 \cdot 37,416 \dots - 4 = 124,285 \dots \quad (2 \text{ p. (yht. 10 p.)})$$

Jotta nurkkapaloja ei lasketa kahteen kertaan, vähennetään 70 cm pitkällä sivulla ja 50 cm pitkällä sivulla olevien palojen summasta luku 4.

Palapelin reunoilla olevia paloja on siis arviolta 124,285 ...

Paloja oli yhteensä 1000 kappaletta, joten reunalla olevien palojen osuus on

$$\begin{aligned} \text{reunapalojen osuus} &= \frac{\text{reunapalojen määrä}}{\text{palojen määrä yhteensä}} \\ &= \frac{124,285 \dots}{1000} \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)}) \\ &= 0,12428 \dots \\ &= 12,428 \dots \% \\ &\approx 12 \% \quad (1 \text{ p. (yht. 12 p.)}) \end{aligned}$$

Vastaus: Reunapalojen osuus on arviolta 12 %.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Oletetaan, että palapelin palat ovat neliön muotoisia. (2 p. (yht. 2 p.)

Lasketaan palapelin sivujen pituuksien suhde:

$$\frac{70 \text{ cm}}{50 \text{ cm}} = 1,4 \quad (1 \text{ p. (yht. 3 p.)})$$

Palapelissä on tuhat palaa. Etsitään kaksi lukua, joiden tulo on 1000 ja joiden suhde on lähellä lukua 1,4. (1 p. (yht. 4 p.) Tällaiset luvut ovat esimerkiksi luvut 25 ja 40, koska

$$25 \cdot 40 = 1000 \quad (1 \text{ p. (yht. 5 p.)})$$

$$\frac{40}{25} = 1,6 \quad (1 \text{ p. (yht. 6 p.)})$$

Palapelin 70 cm pitkällä sivulla on paloja siis 40 ja 50 cm pitkällä sivulla 25. 2 p. (yht. 8 p.)

Lasketaan reunapalojen lukumäärä:

$$40 \cdot 2 + 25 \cdot 2 - 4 = 126 \quad \text{2 p. (yht. 10 p.)}$$

Jotta nurkkapaloja ei lasketa kahteen kertaan, vähennetään 70 cm pitkällä sivulla ja 50 cm pitkällä sivulla olevien palojen summasta luku 4.

Palapelin reunoilla olevia paloja on siis arviolta 126.

Paloja oli yhteensä 1000 kappaletta, joten reunalla olevien palojen osuus on

$$\begin{aligned} \text{reunapalojen osuus} &= \frac{\text{reunapalojen määrä}}{\text{palojen määrä yhteensä}} \\ &= \frac{126}{1000} \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)} \\ &= 0,126 \\ &= 12,6 \% \\ &\approx 13 \% \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)} \end{aligned}$$

Vastaus: Reunapalojen osuus on arviolta 13 %.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

12. Peruskoulujen lukumäärä Suomessa (12 p.)

Aineisto:

12. A [Taulukko: Peruskoulujen lukumäärä](#)

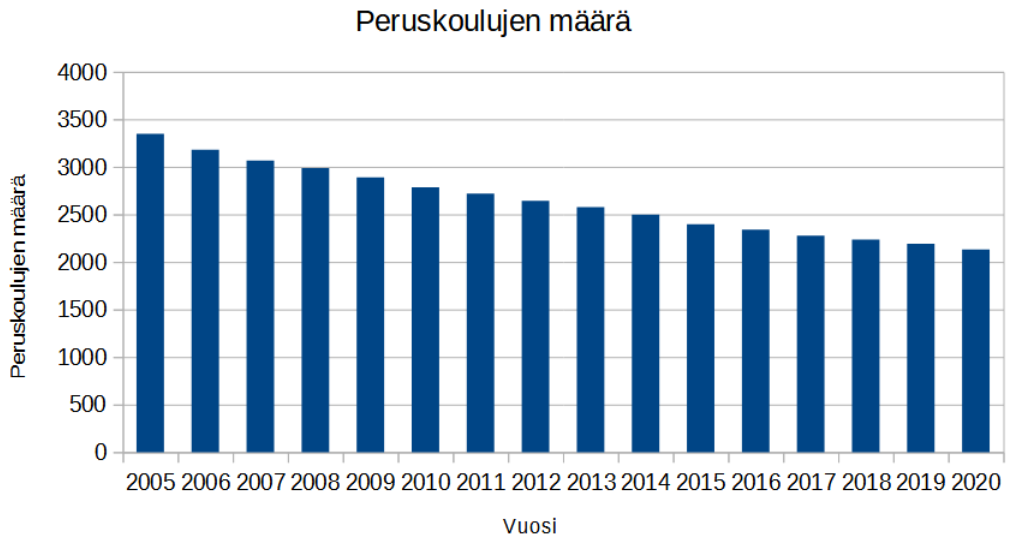
Peruskoulujen lukumäärä Suomessa vuosina 2005–2020 on esitetty taulukossa [12.A](#).

1. Piirrä diagrammi, joka esittää peruskoulujen lukumäärät vuosina 2005–2020. (2 p.)
2. Sovita aineistoon regressiosuora $y = a + bx$, kun vuosi on x -akselilla ja peruskoulujen määrä y -akselilla. Selitä sanallisesti kertoimien a ja b merkitys. (4 p.)
3. Sovita aineistoon regressiosuora käyttäen vain vuosien 2005–2008 peruskoulujen lukumääriä. (2 p.)
4. Arvioi kummankin mallin perusteella vuosi, jolloin peruskoulut häviävät Suomesta. (4 p.)

Ratkaisu.

1. Kopioidaan aineisto taulukkolaskentaohjelmaan ja piirretään pylväskaavio. **Myös viivakaavio hyväksytään.** Alla olevassa kuvassa on käytetty LibreOffice Calc -ohjelmaa. Kaavio voidaan tehdä millä tahansa Abitin ohjelmalla, joka osaa piirtää kaavion. Alla olevassa kaaviossa on otsikko ja akselien nimet näkyvissä, mutta niitä ei vaadita vastauksessa.

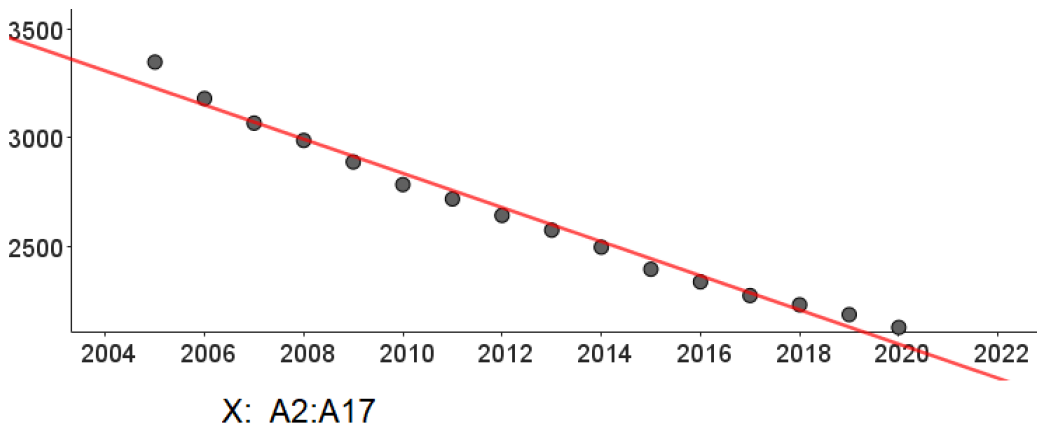
Vastaus:



2 p. (yht. 2 p.)

2. Sovitetaan aineistoon suora. Alla olevassa kuvassa on käytetty GeoGebran toimintoa Kahden muuttujan regressioanalyysi. Suoran sovitus voidaan tehdä millä tahansa Abitin ohjelmalla, joka osaa sovittaa suoran.

Y: B2:B17



Regressiomalli

Lineaarinen

$$y = -78.2794x + 160178.4412$$

Suoran yhtälö on

$$y = -78,2794x + 160\,178,4412$$

2 p. (yht. 4 p.)

eli kysytyssä muodossa

$$y = 160\,178,4412 - 78,2794x.$$

Kysyttiin muotoa $y = a + bx$ olevan yhtälön kertoimia a ja b . Vakiotermi on siis a ja kulmakerroin b . Siis

$$a = 160\,178,4412 \approx 160\,000$$

ja

$$b = -78,2794 \approx -78,3.$$

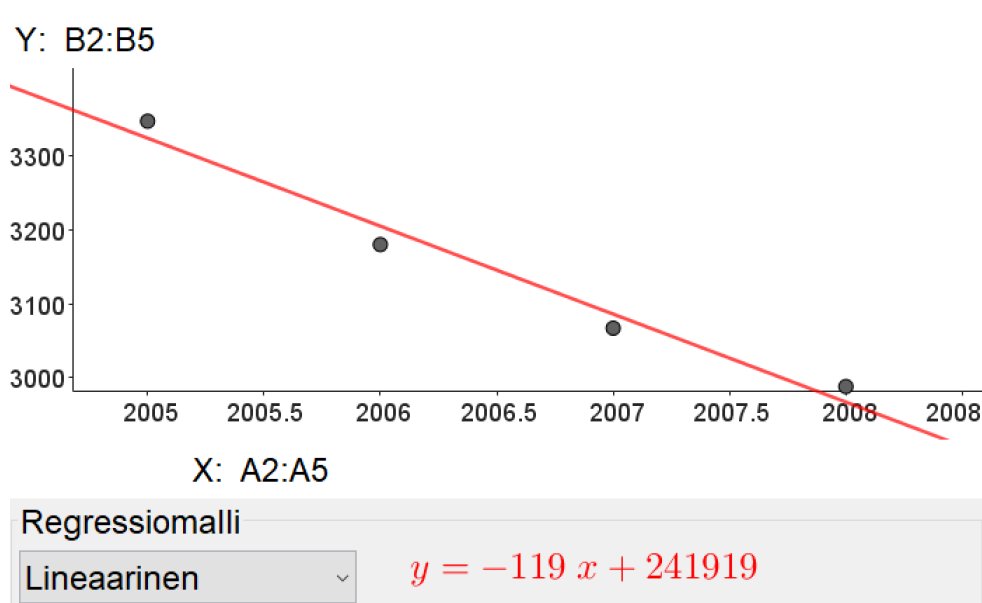
Parametri a ilmaisee peruskoulujen määrän ajanlaskun alussa. 1 p. (yht. 5 p.) Koska vuotta 0 ei ole, niin ajanlaskun alku tarkoittaa tässä tapauksessa vuotta 1 eaa. Parametri b ilmaisee, kuinka monella peruskoululla peruskoulujen määrä muuttuu vuosittain. 1 p. (yht. 6 p.)

Vastaus: Regressiosuoran yhtälö on

$$y = -78,3x + 160\,000.$$

Parametri a ilmaisee peruskoulujen määrän ajanlaskun alussa. Parametri b ilmaisee, kuinka monella peruskoululla peruskoulujen määrä muuttuu vuosittain.

3. Sovitetaan suora vain vuosien 2005–2008 tietoihin.



Suoran yhtälö on

$$y = -119x + 241\,919 \quad (2 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

eli kysytyssä muodossa

$$y = 241\,919 - 119x.$$

Kysyttiin muotoa $y = a + bx$ olevan yhtälön kertoimia a ja b . Vakiotermi on siis a ja kulmakerroin b . Siis

$$a = 241\,919 \approx 242\,000$$

ja

$$b = -119.$$

Vastaus: Regressiosuoran yhtälö on $y = -119x + 242\,000$.

4.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Arvioidaan kohdan 2 mallin mukaan vuosi, jona peruskoulut häviävät Suomesta.

Yhtälön

$$-78,2794x + 160\,178,4412 = 0$$

ratkaisuksi saadaan laskinohjelmalla 2046,240... (1 p. (yht. 9 p.)), joten peruskoulut häviävät kohdan 2 mallin mukaan vuonna 2046 tai 2047. (1 p. (yht. 10 p.)) Taulukossa ei ole kerrottu, mihin aikaan vuodesta koulujen määrät on laskettu, joten ei tiedetä, kumpi näistä vuosista on mallin antama tulos.

Arvioidaan kohdan 3 mallin mukaan vuosi, jona peruskoulut häviävät Suomesta.

Yhtälön

$$-119x + 241\,919 = 0$$

ratkaisuksi saadaan laskinohjelmalla 2032,932... (1 p. (yht. 11 p.)), joten peruskoulut häviävät kohdan 3 mallin mukaan vuonna 2032 tai 2033. (1 p. (yht. 12 p.)) Taulukossa ei ole kerrottu, mihin aikaan vuodesta koulujen määrät on laskettu, joten ei tiedetä, kumpi näistä vuosista on mallin antama tulos.

Vastaus: Kohdan 2 mallin mukaan peruskoulut häviävät Suomesta vuonna 2046 tai 2047, kohdan 3 mallin mukaan vuonna 2032 tai 2033.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Arvioidaan kohdan 2 mallin mukaan vuosi, jona peruskoulut häviävät Suomesta.

$$-78,2794x + 160\,178,4412 = 0 \quad || - 160\,178,4412$$

$$-78,2794x = -160\,178,4412 \quad || : (-78,2794)$$

$$x = 2046,240 \dots \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

Peruskoulut häviävät kohdan 2 mallin mukaan vuonna 2046 tai 2047. (1 p. (yht. 10 p.))

Taulukossa ei ole kerrottu, mihin aikaan vuodesta koulujen määrät on laskettu, joten ei tiedetä, kumpi näistä vuosista on mallin antama tulos.

Arvioidaan kohdan 3 mallin mukaan vuosi, jona peruskoulut häviävät Suomesta.

$$-119x + 241\,919 = 0 \quad || - 241\,919$$

$$-119x = -241\,919 \quad || : (-119)$$

$$x = 2032,932 \dots \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)})$$

Peruskoulut häviävät kohdan 3 mallin mukaan vuonna 2032 tai 2033. (1 p. (yht. 12 p.))

Taulukossa ei ole kerrottu, mihin aikaan vuodesta koulujen määrät on laskettu, joten ei tiedetä, kumpi näistä vuosista on mallin antama tulos.

Vastaus: Kohdan 2 mallin mukaan peruskoulut häviävät Suomesta vuonna 2046 tai 2047, kohdan 3 mallin mukaan vuonna 2032 tai 2033.

13. Kuvaajat ja derivaatta (12 p.)

Funktioista f ja g tiedetään, että $f(0) = 0$ ja $g(0) = 5$ sekä

$$2 \leq f'(x) \leq 3 \quad \text{ja} \quad 1 \leq g'(x) \leq 2$$

kaikilla x .

1. Oletetaan, että funktioiden f ja g kuvaajat ovat suoria. Perustele graafisesti tai laskemalla, että $4 \leq f(2) \leq 6$ ja $7 \leq g(2) \leq 9$. (6 p.)
2. Oletetaan, että funktioiden f ja g kuvaajat eivät välttämättä ole suoria. Mitkä seuraavista tilanteista ovat mahdollisia:

- $f(2) = g(2)$
- $f(2) < g(2)$
- $f(2) > g(2)$

Voit hyödyntää perustelussasi seuraavaa tietoa:

Jos kahdella funktiolla on sama arvo kohdassa 0 ja toisen funktion derivaatta on suurempi välillä $[0, 2]$, niin tämän funktion arvo on suurempi kohdassa 2. (6 p.)

Ratkaisu.

1.

Ratkaisuvaihtoehto 1: laskemalla

Funktioiden kuvaajat ovat tehtävänannon oletuksen mukaan suoria, joten niiden arvot voidaan laskea lausekkeilla

$$f(x) = k_1x + b_1 \tag{1}$$

$$g(x) = k_2x + b_2, \tag{2}$$

joissa esiintyvät vakiot k_1 ja k_2 ovat suorien kulmakertoimet ja vakiot b_1 sekä b_2 ovat suorien vakio termit.

Funktion derivaatan arvo on yhtä suuri kuin funktion kuvaajalle piirretyn tangenttisuoran kulmakerroin. Koska funktioiden f ja g kuvaajat ovat suoria, funktioiden derivaattojen arvot ovat yhtä suuret kuin niiden kuvaajien kulmakertoimet.

1 p. (yht. 1 p.)

Funktioiden alkuehdoista $f(0) = 0$ ja $g(0) = 5$ voidaan ratkaista niiden vakiotermit b_1 sekä b_2 :

$$f(x) = k_1x + b_1$$

$$f(0) = k_1 \cdot 0 + b_1$$

$$f(0) = b_1$$

Joten $b_1 = 0$. 1 p. (yht. 2 p.)

$$g(x) = k_2x + b_2$$

$$g(0) = k_2 \cdot 0 + b_2$$

$$g(0) = b_2$$

Joten $b_2 = 5$ 1 p. (yht. 3 p.)

Suurin mahdollinen arvo, jonka funktio f voi saada kohdassa $x = 2$, saadaan tilanteessa, jossa funktion f derivaatta on mahdollisimman suuri. Derivaatan suurin arvo on tehtävänannon mukaan 3. Lasketaan funktion f suurin arvo kohdassa $x = 2$.

$$f(x) = k_1x + b_1$$

$$f(x)_{\max} = 3x + 0$$

$$f(2)_{\max} = 3 \cdot 2$$

$$f(2)_{\max} = 6$$
 1 p. (yht. 4 p.)

Pienin mahdollinen arvo, jonka funktio f voi saada kohdassa $x = 2$, saadaan tilanteessa, jossa funktion f derivaatta on mahdollisimman pieni. Derivaatan pienin arvo on tehtävänannon mukaan 2. Lasketaan funktion f pienin mahdollinen

arvo kohdassa $x = 2$.

$$f(x) = k_1x + b_1$$

$$f(x)_{\min} = 2x + 0$$

$$f(2)_{\min} = 2 \cdot 2$$

$$f(2)_{\min} = 4$$

1 p. (yht. 5 p.)

Funktion f arvot kohdassa $x = 2$ ovat siis välillä $4 \leq f(2) \leq 6$.

Funktion g tarkastelu etenee samoin kuin edellä esitetty funktion f tarkastelu. Suurin mahdollinen arvo, jonka funktio g voi saada kohdassa $x = 2$, saadaan tilanteessa, jossa funktion g derivaatta on mahdollisimman suuri. Derivaatan suurin arvo on tehtävänannon mukaan 2. Lasketaan funktion g suurin arvo kohdassa $x = 2$.

$$g(x) = k_2x + b_2$$

$$g(x)_{\max} = 2x + 5$$

$$g(2)_{\max} = 2 \cdot 2 + 5$$

$$g(2)_{\max} = 9$$

Pienin mahdollinen arvo, jonka funktio g voi saada kohdassa $x = 2$, saadaan tilanteessa, jossa funktion g derivaatta on mahdollisimman pieni. Derivaatan pienin arvo on tehtävänannon mukaan 1. Lasketaan funktion g pienin mahdollinen arvo kohdassa $x = 2$.

$$g(x) = k_2x + b_2$$

$$g(x)_{\min} = 1x + 5$$

$$g(2)_{\min} = 1 \cdot 2 + 5$$

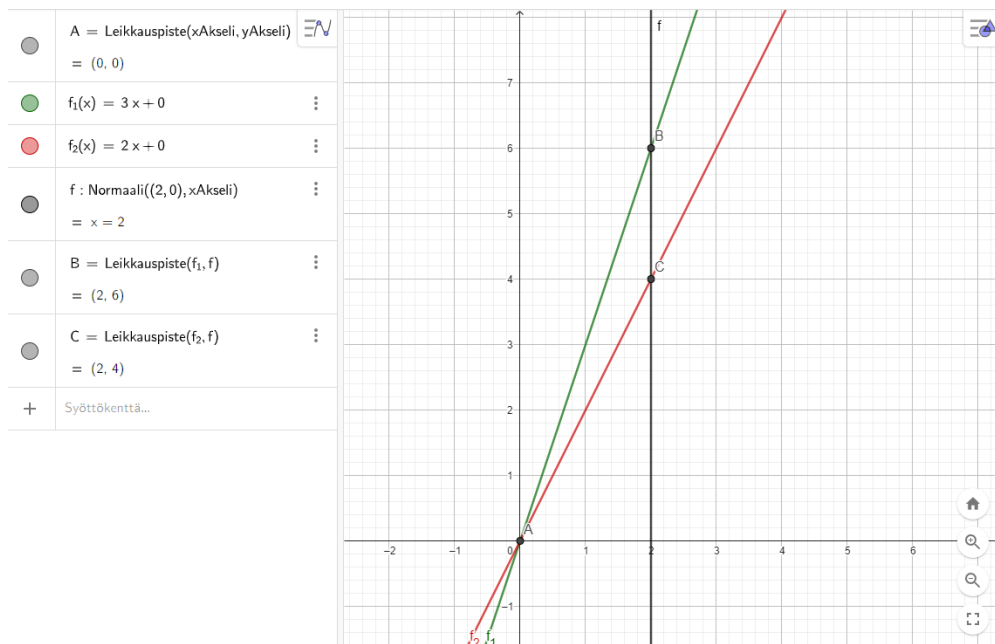
$$g(2)_{\min} = 7$$

Funktion g arvot kohdassa $x = 2$ ovat siis välillä $7 \leq g(2) \leq 9$.

1 p. (yht. 6 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 2: graafisesti

Tehtävänannon mukaan $f(0) = 0$, eli funktion f kuvaaja kulkee pisteen $(0, 0)$ kautta. 1 p. (yht. 1 p.) Piirretään kuva, jossa näkyy funktion f kuvaajat, kun funktion f derivaatta on suurin mahdollinen ja pienin mahdollinen:

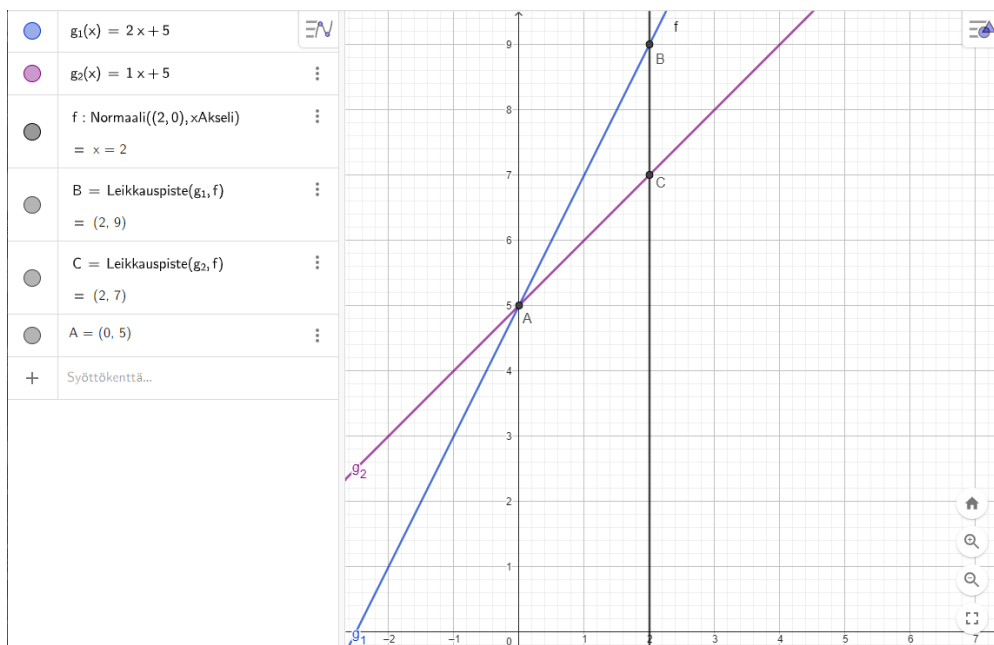


2 p. (yht. 3 p.)

Kuvan perusteella funktion f arvot kohdassa $x = 2$ ovat välillä $4 \leq f(2) \leq 6$.

1 p. (yht. 4 p.)

Tehtävänannon mukaan $g(0) = 5$ eli funktion g kuvaaja kulkee pisteen $(0, 5)$ kautta. 1 p. (yht. 5 p.) Piirretään kuva, jossa näkyy funktion g kuvaajat, kun funktion g derivaatta on suurin mahdollinen ja pienin mahdollinen:



Kuvan perusteella funktion g arvot kohdassa $x = 2$ ovat välillä $7 \leq g(2) \leq 9$.

1 p. (yht. 6 p.)

2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Nyt funktioiden f ja g eivät välttämättä ole suoria, mutta muut tehtävänannon tiedot ovat edelleen voimassa. Koska $f(0) = 0$, funktion f kuvaaja kulkee edelleen pisteen $(0, 0)$ kautta. Funktion f derivaatan arvo on edelleen välillä $2 \leq f'(x) \leq 3$.

Derivaatta $f'(x)$ ilmaisee, kuinka paljon funktion f arvo muuttuu kohdassa x yhden yksikön suuruista muuttujan arvon muutosta kohti. 1 p. (yht. 7 p.) Koska funktion f derivaatan arvo on korkeintaan 3, niin funktion f suurin mahdollinen arvo kohdassa $x = 2$ saadaan tilanteessa, jossa $f'(x) = 3$ koko välillä $0 \leq x \leq 2$. Tällöin tilanne on sama kuin ratkaistaessa arvoa $f(2)_{\max}$ kohdassa 13.1. Suurin arvo, jonka f voi saavuttaa kohdassa $x = 2$ on siis edelleen $f(2)_{\max} = 6$. 1 p. (yht. 8 p.)

Vastaavasti funktion g kuvaaja kulkee edelleen pisteen $(0, 5)$ kautta ja funktion g derivaatan arvo on edelleen välillä $1 \leq g'(x) \leq 2$. Koska funktion g derivaatan arvo on vähintään 1, niin funktion g pienin mahdollinen arvo kohdassa $x = 2$ saadaan tilanteessa, jossa $g'(x) = 1$ koko välillä $0 \leq x \leq 2$. Tällöin tilanne on sama kuin ratkaistaessa arvoa $g(2)_{\min}$ kohdassa 13.1, joten funktion g pienin mahdollinen arvo kohdassa $x = 2$ on edelleen $g(2)_{\min} = 7$. 1 p. (yht. 9 p.)

Vastaus: Tilanne $f(2) < g(2)$ on mahdollinen. 1 p. (yht. 10 p.) Muut tehtävänannon tilanteista eivät ole mahdollisia. 2 p. (yht. 12 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 2

Verrataan kahta funktiota, tehtävänannon funktiota f sekä funktiota $f_1(x) = 3x$. Molempien funktioiden arvo kohdassa $x = 0$ on nolla ja funktion f_1 derivaatta on suurempi tai yhtä suuri kuin funktion f derivaatta välillä $[0, 2]$. 1 p. (yht. 7 p.)

- Tilanne 1: Funktion f_1 derivaatta on suurempi kuin funktion f derivaatta välillä $[0, 2]$. Tällöin voidaan tehtävänannon lisätiedon perusteella todeta, että funktion f_1 arvo kohdassa 2 on suurempi kuin funktion f . Tässä tilanteessa funktion f arvo kohdassa 2 on siis pienempi kuin $f_1(2) = 3 \cdot 2 = 6$.
- Tilanne 2: Funktion f_1 derivaatta on yhtä suuri kuin funktion f derivaatta välillä $[0, 2]$. Koska funktioiden derivaatat ovat yhtä suuret ja niillä on sama arvo kohdassa 0, niiden arvot kohdassa 2 ovat myös samat. Tässä tilanteessa funktion f arvo kohdassa 2 on siis $f_1(2) = 3 \cdot 2 = 6$.

Funktion f suurin mahdollinen arvo kohdassa $x = 2$ on siis sama kuin kohdassa 13.1 eli $f(2)_{\max} = 6$. 1 p. (yht. 8 p.)

Verrataan samoin kahta funktiota, tehtävänannon funktiota g sekä funktiota $g_1(x) = x + 5$. Molempien funktioiden arvo kohdassa $x = 0$ on 5 ja funktion g derivaatta on suurempi tai yhtä suuri kuin funktion g_1 derivaatta välillä $[0, 2]$.

- Tilanne 1: Funktion g derivaatta on suurempi kuin funktion g_1 derivaatta välillä $[0, 2]$. Tällöin voidaan tehtävänannon lisätiedon perusteella todeta, että funktion g arvo kohdassa 2 on suurempi kuin funktion g_1 . Tässä tilanteessa funktion g arvo kohdassa 2 on siis suurempi kuin $g_1(2) = 1 \cdot 2 + 5 = 7$.

- Tilanne 2: Funktion g derivaatta on yhtä suuri kuin funktion g_1 derivaatta välillä $[0, 2]$. Koska funktioiden derivaatat ovat yhtä suuret ja niillä on sama arvo kohdassa 0, niiden arvot kohdassa 2 ovat myös samat. Tässä tilanteessa funktion g arvo kohdassa 2 on siis $g_1(2) = 1 \cdot 2 + 5 = 7$.

Näin ollen funktion g arvo kohdassa $x = 2$ on suurempi tai yhtä suuri kuin funktion g_1 arvo samassa kohdassa. Funktion g pienin mahdollinen arvo kohdassa $x = 2$ on siis sama kuin kohdassa 13.1 eli $g(2)_{\min} = 7$. 1 p. (yht. 9 p.)

Vastaus: Tilanne $f(2) < g(2)$ on mahdollinen. 1 p. (yht. 10 p.) Muut tehtävänannon tilanteista eivät ole mahdollisia. 2 p. (yht. 12 p.)