

Yo-mallivastaukset



Syksy 2022
Pitkä matematiikka

Tiesitkö tämän?

Mafylaiset veivät
vuoden 2022
haussa

72%

kaikista lääkiksen
pääsykoekiintöön paikoista.

60%

Pk-seudun lukioista
käyttää **Mafynettiä**.

Yo-kertausmateriaalit saatavilla
matemaattis-luonnontieteellisiin aineisiin sekä histo-
riaan, yhteiskuntaoppiin ja äidinkieleen.

Mafynetti

Mallivastausten tekijät:

Malliratkaisujen laatimisesta vastaa MAFY:n oppimateriaalitiimi, jonka päätehtävä on laatia ja kehittää MAFY:n lukioon tarkoitettuja oppimateriaaleja.

Oppimateriaalitiimistä mukana olivat Antti Suominen, Sakke Suomalainen, Jaakko Alasuvanto ja Sampsa Kurvinen. Lisäksi työn tukena olivat Tuomas Hauvala ja Matti Virolainen.

Mafy oppimateriaalit

Olemme Helsingissä, Tampereella ja Jyväskylässä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys.

Palveluitamme ovat:

- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali
- Lääketieteellisen valmennuskurssit
- Kauppatieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- Yo-kokeisiin valmentavat kurssit

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kurseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Käyttöehdot

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafy.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion matematiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukiokursseillasi. Nämä mallivastaukset ovat MAFY Oy:n omaisuutta.

MAFY Oy:n yhteystiedot:

<https://mafy.fi/yhteydenotto>

Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	7
Ratkaisu tehtävään 3	9
Ratkaisu tehtävään 4	12
Ratkaisu tehtävään 5	21
Ratkaisu tehtävään 6	23
Ratkaisu tehtävään 7	25
Ratkaisu tehtävään 8	28
Ratkaisu tehtävään 9	29
Ratkaisu tehtävään 10	31
Ratkaisu tehtävään 11	33
Ratkaisu tehtävään 12	37
Ratkaisu tehtävään 13	42

Malliratkaisut päivitetty 20. maaliskuuta 2023 klo. 12:52.

1. Monivalintatehtäviä (12 p.)

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

1.1. Sievennys (2 p.)

Sievennä $(x + 6)^2 - (-2x^2 + x - 5) =$

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $3x^2 - x + 41$ ", " $3x^2 + 13x + 31$ ", " $3x^2 + 11x + 41$ ", " $3x^2 + x + 31$ ".

1.2. Tulomuoto (2 p.)

Yhtälö $-4x^3 + 8x^2 + 12x = 0$ on tulomuodossa

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $x(4x+4)(x+3) = 0$ ", " $-x(4x-4)(x-3) = 0$ ", " $4x(-x+1)(x-3) = 0$ ", " $-4x(x+1)(x-3) = 0$ ".

1.3. Tarkka arvo (2 p.)

Lausekkeen $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} + 4\sqrt{3} - \sqrt{\frac{4}{3}}$ tarkka arvo on

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " 10 ", " $24 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ ", " $12\frac{5}{6}$ ", " $6 + \frac{7\sqrt{3}}{3}$ ", " $\frac{13\sqrt{3}}{3}$ ", " $10,0414518843$ ".

1.4. Yhtälönratkaisu (2 p.)

Yhtälön $\frac{x}{7} = \frac{7}{x}$ ratkaisu on

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " $x = 7$ ", " $x = 7$ ja tämän luvun käänteisluku", " $x = 7$ ja tämän luvun vastaluku", "ei mikään näistä".

1.5. Funktion arvo (2 p.)

Funktion $f(x) = x^2 + 3x$ arvo kohdassa $x = -2$ on

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " -10 ", " -9 ", " -8 ", " -7 ", " -6 ", " -5 ", " -4 ", " -3 ", " -2 ", " -1 ", " 0 ", " 1 ", " 2 ", " 3 ", " 4 ", " 5 ", " 6 ", " 7 ", " 8 ", " 9 ", " 10 ".

1.6. Funktion arvo (2 p.)

Funktio $f(x) = x^2 + 3x$ derivoidaan. Silloin $f'(10)$ on

Vastauslaatikon vaihtoehdot: " 10 ", " 11 ", " 12 ", " 13 ", " 14 ", " 15 ", " 16 ", " 17 ", " 18 ", " 19 ", " 20 ", " 21 ", " 22 ", " 23 ", " 24 ", " 25 ", " 26 ", " 27 ", " 28 ", " 29 ", " 30 ".

Ratkaisu.

1. Oikea vastaus: $3x^2 + 11x + 41$. 2p (yht. 2p)

YTL:n hyvän vastauksen piirteiden (luettu 20.9.2022) mukaan myös osasta vääriä vaihtoehtoja sai osapisteitä seuraavasti:

$$3x^2 + 13x + 31 \quad (1 \text{ p})$$

$$3x^2 - x + 41 \quad (1 \text{ p})$$

Perustelut:

$$\begin{aligned}(x + 6)^2 - (-2x^2 + x - 5) &= x^2 + 12x + 36 + 2x^2 - x + 5 \\ &= 3x^2 + 11x + 41\end{aligned}$$

2. Oikea vastaus: $-4x(x + 1)(x - 3)$. 2p (yht. 4p)

YTL:n hyvän vastauksen piirteiden (luettu 20.9.2022) mukaan myös yhdestä väärästä vaihtoehtosta sai osapisteitä seuraavasti:

$$4x(-x + 1)(x - 3) = 0 \quad (1 \text{ p})$$

Perustelut:

$$-4x^3 + 8x^2 + 12x = 0$$

$$(-4x^2 + 8x + 12)x = 0 \quad (1)$$

Ratkaistaan sulkulausekkeen nollakohdat:

$$-4x^2 + 8x + 12 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 12}}{2 \cdot (-4)}$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 192}}{-8}$$

$$= \frac{-8 \pm 16}{-8}$$

$$= \frac{8}{-8} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-24}{-8}$$

$$= -1 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

Sulkulauseke rivillä (1) voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$-4x^2 + 8x + 12 = -4(x + 1)(x - 3).$$

Koko yhtälö on siis

$$-4x(x + 1)(x - 3) = 0$$

3. Oikea vastaus: $6 + \frac{7\sqrt{3}}{3}$. 2p (yht. 6p)

Perustelut:

$$\begin{aligned}\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} + 4\sqrt{3} - \sqrt{\frac{4}{3}} &= \overset{\sqrt{3})}{\sqrt{12}\sqrt{3}} + \overset{\sqrt{3})}{3\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} \\&= \frac{\sqrt{12}\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} \\&= \frac{\sqrt{12} \cdot 3 + 3 \cdot 3 - 2}{\sqrt{3}} \\&= \frac{\sqrt{4} \cdot 3 \cdot 3 + 7}{\sqrt{3}} \\&= \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \cdot 3 + 7}{\sqrt{3}} \\&= \frac{6 \cdot \sqrt{3} + 7}{\sqrt{3}} \\&= 6 + \frac{7}{\sqrt{3}} \\&= 6 + \frac{7\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

4. Oikea vastaus: $x = 7$ ja tämän luvun vastaluku. 2p (yht. 8p)

YTL:n hyvän vastauksen piirteiden (luettu 20.9.2022) mukaan myös osasta vääriä vaihtoehtoja sai osapisteitä seuraavasti:

$$x = 7 \quad (1 \text{ p})$$

$$x = 7 \text{ ja tämän luvun käänteisluku.} \quad (1 \text{ p})$$

Perustelut:

$$\frac{x}{7} = \frac{7}{x} \quad \| x \neq 0$$

$$x^2 = 7^2$$

$$x = \pm 7$$

$$x = 7 \quad \text{tai tämän luvun vastaluku } -7$$

5. Oikea vastaus: -2 2p (yht. 10p)

YTL:n hyvän vastauksen piirteiden (luettu 20.9.2022) mukaan myös osasta vääriä vaihtoehtoja sai osapisteitä seuraavasti:

$$-10 \quad (1 \text{ p})$$

Perustelut:

$$f(x) = x^2 + 3x$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 3 \cdot (-2)$$

$$= 4 - 6$$

$$= -2$$

6. Oikea vastaus: 23 2p (yht. 12p)

Perustelut:

$$f(x) = x^2 + 3x$$

$$f'(x) = 2x + 3$$

$$f'(10) = 2 \cdot 10 + 3$$

$$= 23$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

2. Analyyttistä geometria (12 p.)

1. Määritä janan AB keskipiste, kun $A = (5, 5)$ ja $B = (-2, \frac{3}{2})$. (4 p.)
2. Ratkaise yhtälö $|3x + 4| = 5$. (4 p.)
3. Määritä ympyrän $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$ keskipiste ja säde. (4 p.)

Ratkaisu.

1. Pisteet ovat

$$A = (5, 5)$$

$$B = \left(-2, \frac{3}{2}\right).$$

Janan AB keskipisteen koordinaatit ovat janan päätepisteiden A ja B koordinaattien keskiarvot.

$$x = \frac{5 + (-2)}{2} = \frac{5 - 2}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{2p (yht. 2p)}$$

$$y = \frac{5 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{10}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{13}{2}}{2} = \frac{13}{4}. \quad \text{2p (yht. 4p)}$$

Vastaus: Janan AB keskipiste on $\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right)$.

2. Itseisarvoyhtälö

$$|3x + 4| = 5$$

on tosi, kun

$$3x + 4 = 5$$

tai

$$3x + 4 = -5 \quad \text{2p (yht. 6p)}$$

$$3x = 1 \quad || : 3$$

tai

$$3x = -9 \quad || : 3$$

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{1p (yht. 7p)}$$

tai

$$x = -3. \quad \text{1p (yht. 8p)}$$

Vastaus: $x = \frac{1}{3}$ tai $x = -3$.

3. Muokataan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x^2 + 2x + y^2 = 8$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = 9$$
 1p (yht. 9p)

$$(x + 1)^2 + y^2 = 3^2$$
 2p (yht. 11p)

$$(x - (-1))^2 + (y - 0)^2 = 3^2$$

Vastaus: Ympyrän keskipiste on $(-1, 0)$ ja säde on 3. 1p (yht. 12p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

3. Integraalilaskuja (12 p.)

1. Määritä $\int (-2x^2 + 6x - 4) dx$. (4 p.)
2. Määritä käyrien $y = (x-1)(3-x)$ ja $y = (x-1)^2$ väliin jäävän rajoitetun alueen pinta-ala. (8 p.)

Ratkaisu.

1.

$$\begin{aligned}\int (-2x^2 + 6x - 4) dx &= -\frac{2}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 - 4x + C \\ &= -\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x + C,\end{aligned}$$

missä C on vakio. 4p (yht. 4p)

2. Selvitetään käyrien
- $y = (x-1)(3-x)$
- ja
- $y = (x-1)^2$
- leikkauskohdat.

Tapa 1

$$\begin{aligned}(x-1)(3-x) &= (x-1)^2 \\ (x-1)(3-x) - (x-1)^2 &= 0 \\ (x-1)((3-x) - (x-1)) &= 0 \\ (x-1)(3-x-x+1) &= 0 \\ (x-1)(4-2x) &= 0\end{aligned}$$

Tulon nollasäännön nojalla

$$\begin{array}{lll}x-1=0 & \text{tai} & 4-2x=0 \\ x=1 & \text{tai} & 4=2x \quad || :2 \\ & & x=2.\end{array}$$

Tapa 2

$$\begin{aligned}
 (x-1)(3-x) &= (x-1)^2 \\
 3 \cdot x - x^2 - 3 + x &= x^2 - 2x + 1 \\
 -x^2 + 4x - 3 &= x^2 - 2x + 1 \\
 2x^2 - 6x + 4 &= 0 & \parallel : 2 \\
 x^2 - 3x + 2 &= 0
 \end{aligned}$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\
 &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \\
 &= \frac{3 \pm 1}{2} \\
 &= \frac{4}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{2}{2} \\
 &= 2 \quad \text{tai} \quad x = 1
 \end{aligned}$$

Pisteytyksestä: Leikkauskohtien ratkaisun yksittäisillä välivaiheilla ei ole merkitystä pisteytyksen kannalta kunhan leikkauskohdat on ratkaistu oikein.

Leikkauskohdat ovat siis $x = 1$ ja $x = 2$. 2p (yht. 6p) Selvitetään kumpi kuvaaja on ylempänä laskemalla y -koordinaatit kohdassa $x = \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(3 - \frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \\
 \left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

Käyrä $y = (x - 1)(3 - x)$ on siis välillä $1 \leq x \leq 2$ ylempänä kuin käyrä $y = (x - 1)^2$. 1p (yht. 7p) Käyrien rajoittama pinta-ala on siis

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 ((x - 1)(3 - x) - (x - 1)^2) dx \\ &= \int_1^2 (3x - x^2 - 3 + x - (x^2 - 2x + 1)) dx \\ &= \int_1^2 (-2x^2 + 6x - 4) dx \quad \text{3p (yht. 10p)} \end{aligned}$$

Kohdan 1 nojalla:

$$\begin{aligned} &= \int_1^2 \left(-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x \right) \\ &= \left(-\frac{2}{3} \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 \right) - \left(-\frac{2}{3} \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 \right) \\ &= \left(-\frac{16}{3} + 12 - 8 \right) - \left(-\frac{2}{3} + 3 - 4 \right) \\ &= -\frac{16}{3} + 4 + \frac{2}{3} + 1 \\ &= -\frac{14}{3} + 5 \\ &= -\frac{14}{3} + \frac{15}{3} \\ &= \frac{1}{3} \quad \text{2p (yht. 12p)} \end{aligned}$$

4. Vähän ykköstä pienemmät luvut (12 p.)

1. Kumpi murtoluvuista

$$A = \frac{333\,333\,331}{333\,333\,334} \quad \text{ja} \quad B = \frac{222\,222\,221}{222\,222\,223}$$

on suurempi? (3 p.)

2. Kumpi murtoluvuista

$$C = \frac{\overbrace{333 \dots 3}^{2022 \text{ kpl}} 1}{\underbrace{333 \dots 3}_{2022 \text{ kpl}} 4} \quad \text{ja} \quad D = \frac{\overbrace{222 \dots 2}^{2022 \text{ kpl}} 1}{\underbrace{222 \dots 2}_{2022 \text{ kpl}} 3}$$

on suurempi? Tässä aaltosulkumerkintä tarkoittaa sitä, että esimerkiksi luvun C nimittäjässä on 2022 kappaletta numeroa 3 ja sen jälkeen yksi numero 4. (9 p.)

Ratkaisu.

1.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Lasketaan lukujen erotus laskimella. **Huomaa!** Voit myös laskea erotuksen $A - B$, jolloin tulokseksi tulee negatiivinen luku, ja johtopäätös on sama.

$$B - A = \frac{222\,222\,221}{222\,222\,223} - \frac{333\,333\,331}{333\,333\,334} = 1,3499 \dots \cdot 10^{-17} > 0. \quad \text{2p (yht. 2p)}$$

Näin ollen

$$B > A. \quad \text{1p (yht. 3p)}$$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Merkitään $x = 222\,222\,223$ ja $y = 333\,333\,334$. Tällöin siis

$$A = \frac{y-3}{y} \quad \text{ja} \quad B = \frac{x-2}{x}.$$

Tarkastellaan lukujen erotusta. **Huomaa!** Voit myös tarkastella erotusta $A - B$, jolloin tulokseksi tulee negatiivinen luku, ja johtopäätös on sama.

$$\begin{aligned} B - A &= \frac{x-2}{x} - \frac{y-3}{y} \\ &= \frac{(x-2)y}{xy} - \frac{x(y-3)}{xy} \\ &= \frac{xy-2y}{xy} - \frac{xy-3x}{xy} \\ &= \frac{xy-2y-xy+3x}{xy} \\ &= \frac{3x-2y}{xy} \\ &= \frac{3 \cdot 222\,222\,223 - 2 \cdot 333\,333\,334}{xy} \\ &= \frac{666\,666\,669 - 666\,666\,668}{xy} \\ &= \frac{1}{xy} > 0. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$B > A.$$

Ratkaisuvaihtoehto 3

Lasketaan lukujen suhde laskimella. Huomaa! Voit myös laskea suhteen $\frac{B}{A}$, jolloin tulokseksi tulee ykköstä suurempi luku, ja johtopäätös on sama.

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} &= \frac{\frac{333\,333\,331}{333\,333\,334}}{\frac{222\,222\,221}{222\,222\,223}} \\ &= \frac{333\,333\,331 \cdot 222\,222\,223}{333\,333\,334 \cdot 222\,222\,221} \\ &= \frac{74\,074\,073\,814\,814\,813}{74\,074\,073\,814\,814\,814} \\ &= 0,999\,999\,999\,999\,999\,986\,5 < 1. \quad \text{2p (yht. 2p)}\end{aligned}$$

Näin ollen

$$B > A. \quad \text{1p (yht. 3p)}$$

Ratkaisuvaihtoehto 4

Tämä ratkaisuvaihtoehto on kohdan 1 kannalta työläs, mutta etuna on, että kohta 2 ratkeaa varsin kätevästi samalla kertaa. Kiitokset ratkaisun lähettäneelle Lahden lukio Gaudian lehtori Jukka Kalliolehdolle.

Tarkastellaan rationaalifunktiota

$$f(x) = \frac{3x - 2}{3x + 1} - \frac{2x - 1}{2x + 1}.$$

Funktion f lausekkeessa molemmat nimittäjät ovat positiivisia ainakin kun $x > 0$, joten funktio f on määritelty ainakin kun $x > 0$.

Huomataan, että

$$3 \cdot 111\,111\,111 = 333\,333\,333$$

ja

$$2 \cdot 111\,111\,111 = 222\,222\,222,$$

Siis kun $x = 111\ 111\ 111$, niin

$$3x - 2 = 333\ 333\ 333 - 2 = 333\ 333\ 331,$$

$$3x + 1 = 333\ 333\ 333 + 1 = 333\ 333\ 334,$$

$$2x - 2 = 222\ 222\ 222 - 1 = 222\ 222\ 221,$$

$$2x + 1 = 222\ 222\ 222 + 1 = 222\ 222\ 223.$$

Kun $x = 111\ 111\ 111$, niin

$$f(111\ 111\ 111) = \frac{3x - 2}{3x + 1} - \frac{2x - 1}{2x + 1}$$

$$f(111\ 111\ 111) = \frac{333\ 333\ 331}{333\ 333\ 334} - \frac{222\ 222\ 221}{222\ 222\ 223}$$

$$f(111\ 111\ 111) = A - B \quad \text{1p (yht. 1p)} \quad (1)$$

Sievennetään funktion lauseke. **Lavennetaan ensimmäinen osamäärä lausekkeella $2x + 1$ ja toinen osamäärä lausekkeella $3x + 1$.**

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x - 2}{3x + 1} - \frac{2x - 1}{2x + 1} \\ &= \frac{(2x + 1)(3x - 2)}{(2x + 1)(3x + 1)} - \frac{(2x - 1)(3x + 1)}{(2x + 1)(3x + 1)} \\ &= \frac{6x^2 - 4x + 3x - 2}{(2x + 1)(3x + 1)} - \frac{6x^2 - 3x + 2x - 1}{(2x + 1)(3x + 1)} \\ &= \frac{6x^2 - x - 2}{(2x + 1)(3x + 1)} - \frac{6x^2 - x - 1}{(2x + 1)(3x + 1)} \\ &= \frac{6x^2 - x - 2 - (6x^2 - x - 1)}{(2x + 1)(3x + 1)} \\ &= \frac{6x^2 - x - 2 - 6x^2 + x + 1}{(2x + 1)(3x + 1)} \\ &= \frac{-1}{(2x + 1)(3x + 1)} \quad \text{1p (yht. 2p)} \end{aligned}$$

Kun $x > 0$, niin funktion f sievennetyssä lausekkeessa osoittaja on negatiivinen ja nimittäjä positiivinen, joten $f(x) < 0$, kun $x > 0$. Tämän vuoksi

$$f(111\ 111\ 111) < 0. \quad (2)$$

Yhtälöistä (1) ja (2) seuraa, että

$$A - B < 0$$

$$A < B \quad (1\text{ p (yht. 3p)}).$$

2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Huomaa! Tämä ratkaisuvaihtoehto käy ainoastaan siinä tapauksessa, että kohdan 1 ratkaisu on ratkaisuvaihtoehdon 2 mukainen, sillä tässä ratkaisussa hyödynnetään kohdan 1 ratkaisuvaihtoehto 2:ssa johdettua tulosta.

Merkitään $x = 222 \dots 23$ ja $y = 333 \dots 34$ siten, että luvussa x on 2022 kappaletta numeroita 2 ja ykkösten kohdalla numero 3, ja luvussa y on 2022 kappaletta numeroita 3 ja ykkösten kohdalla numero 4. (2p (yht. 5p)) Nyt vastaavasti kuin kohdassa 1, luvut ovat

$$C = \frac{y-3}{y} \quad \text{ja} \quad D = \frac{x-2}{x}. \quad (1\text{ p (yht. 6p)})$$

Kohdan 1 laskelman nojalla

$$\begin{aligned} D - C &= \frac{3x - 2y}{xy} \quad (3\text{p (yht. 9p)}) \\ &= \frac{3 \cdot 222 \dots 23 - 2 \cdot 333 \dots 34}{xy} \\ &= \frac{666 \dots 69 - 666 \dots 68}{xy} \quad (1\text{p (yht. 10p)}) \\ &= \frac{1}{xy} > 0. \quad (1\text{p (yht. 11p)}) \end{aligned}$$

Näin ollen

$$D > C. \quad \text{1p (yht. 12p)}$$

Huomaa! Yhtä hyvin olisi voitu tarkastella erotusta $C - D$, jolloin tulokseksi tulee negatiivinen luku, ja johtopäätös on sama.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Huomaa! Tämä on vastaavanlainen ratkaisu kuin kohdan 1 ratkaisuvaihtoehdon 2 ja kohdan 2 ratkaisuvaihtoehdon 1 muodostama kokonaisuus. Tämä käy ratkaisuksi kohtaan 2, jos kohdan 1 teki esimerkiksi laskimella eikä kohdan 1 ratkaisuvaihtoehdon mukaisesti.

Merkitään $x = 222 \dots 23$ ja $y = 333 \dots 34$ siten, että luvussa x on 2022 kappaletta numeroita 2 ja ykkösten kohdalla numero 3, ja luvussa y on 2022 kappaletta numeroita 3 ja ykkösten kohdalla numero 4. 2p (yht. 5p) Luvut ovat siis

$$C = \frac{y-3}{y} \quad \text{ja} \quad D = \frac{x-2}{x}. \quad \text{1p (yht. 6p)}$$

Tarkastellaan lukujen erotusta.

$$\begin{aligned} D - C &= \frac{x-2}{x} - \frac{y-3}{y} \\ &= \frac{(x-2)y}{xy} - \frac{x(y-3)}{xy} \quad \text{1p (yht. 7p)} \\ &= \frac{xy-2y}{xy} - \frac{xy-3x}{xy} \\ &= \frac{xy-2y-xy+3x}{xy} \quad \text{1p (yht. 8p)} \\ &= \frac{3x-2y}{xy} \quad \text{1p (yht. 9p)} \\ &= \frac{3 \cdot 222 \dots 23 - 2 \cdot 333 \dots 34}{xy} \\ &= \frac{666 \dots 69 - 666 \dots 68}{xy} \quad \text{1p (yht. 10p)} \\ &= \frac{1}{xy} > 0. \quad \text{1p (yht. 11p)} \end{aligned}$$

Näin ollen

$$D > C. \quad (1 \text{ p (yht. 12p)})$$

Huomaa! Yhtä hyvin olisi voinut tarkastella erotusta $C - D$, jolloin tulokseksi tulee negatiivinen luku, ja johtopäätös on sama.

Ratkaisuvaihtoehto 3

Merkitään $x = 222 \dots 23$ ja $y = 333 \dots 34$ siten, että luvussa x on 2022 kappaletta numeroita 2 ja ykkösten kohdalla numero 3, ja luvussa y on 2022 kappaletta numeroita 3 ja ykkösten kohdalla numero 4. (2 p (yht. 5p)) Luvut ovat siis

$$C = \frac{y-3}{y} = 1 - \frac{3}{y} \quad \text{ja} \quad D = \frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2}{x}. \quad (2 \text{ p (yht. 7p)})$$

Tutkitaan epäyhtälöä

$$1 - \frac{3}{y} < 1 - \frac{2}{x}. \quad (3)$$

Muokataan sitä siten, että kukin muoto on yhtäpitävä edellisen kanssa.

$$1 - \frac{3}{y} < 1 - \frac{2}{x}$$

$$-\frac{3}{y} < -\frac{2}{x}$$

$$\frac{3}{y} > \frac{2}{x}$$

$$3x > 2y \quad (2 \text{ p (yht. 9p)})$$

$$3x - 2y > 0$$

Huomataan, että

$$2y = 2 \cdot 333 \dots 34 = 666 \dots 68$$

$$3x = 3 \cdot 222 \dots 23 = 666 \dots 69,$$

eli $3x - 2y = 1 > 0. \quad (2 \text{ p (yht. 11p)})$ Täten epäyhtälö (3) on tosi, joten $D > C$.

(1 p (yht. 12p))

Ratkaisuvaihtoehto 4

Huomaa! Tässä ratkaisussa hyödynnetään kohdan 1 ratkaisuvaihtoehto 4:ssä johdettua tulosta. Tämä ratkaisuvaihtoehto käy, jos kohdan 1 ratkaisu on ratkaisuvaihtoehdon 4 mukainen tai jos sama tulos johdetaan kohdan 2 ratkaisussa.

Tarkastellaan jälleen kohdan 1 rationaalifunktiota:

$$f(x) = \frac{3x - 2}{3x + 1} - \frac{2x - 1}{2x + 1} \quad \text{1p (yht. 4p)}.$$

Kuten kohdassa 1 todettiin, funktio f on määritelty ainakin kun $x > 0$.

Alla pistemerkintä ... tarkoittaa 2016 kappaletta ykkösiä, kolmosia tai kolmosia sen mukaan, mikä numero pistemerkinnän molemmilla puolilla on. Huomataan, että

$$3 \cdot 111 \dots 111 = 333 \dots 333$$

ja

$$2 \cdot 111 \dots 111 = 222 \dots 222,$$

Siis kun $x = 111 \dots 111$, niin

$$3x - 2 = 333 \dots 333 - 2 = 333 \dots 331,$$

$$3x + 1 = 333 \dots 333 + 1 = 333 \dots 334,$$

$$2x - 2 = 222 \dots 222 - 1 = 222 \dots 221,$$

$$2x + 1 = 222 \dots 222 + 1 = 222 \dots 223.$$

Siis kun $x = 111 \dots 111$, niin

$$f(111 \dots 111) = \frac{3x - 2}{3x + 1} - \frac{2x - 1}{2x + 1}$$

$$f(111 \dots 111) = \frac{333 \dots 331}{333 \dots 334} - \frac{222 \dots 221}{222 \dots 223}$$

$$f(111 \dots 111) = C - D \quad \text{2p (yht. 6p)} \quad (4)$$

Kuten kohdassa 1 todettiin, $f(x) < 0$, kun $x > 0$ 2p (yht. 8p). Tämän vuoksi

$$f(111 \dots 111) < 0 \quad \text{2p (yht. 10p)} \quad (5)$$

Yhtälöistä (4) ja (5) seuraa, että

$$C - D < 0 \quad \text{1p (yht. 11p)}$$

$$C < D. \quad \text{1p (yht. 12p)}$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

5. Avaruuden vektoreita (12 p.)

Tarkastellaan vektoreita

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \quad \text{ja} \quad \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

1. Laske $\vec{a} - \vec{b}$. (3 p.)
2. Laske $\vec{a} \cdot \vec{b}$. (3 p.)
3. Sijaitseeko piste $(4, 6, 8)$ vektorin $\vec{a}$ suuntaisella origon kautta kulkevalla suoralla? (6 p.)

Ratkaisu.

1.

$$\begin{aligned} \vec{a} - \vec{b} &= \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} - (3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) \\ &= \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} - 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \\ &= \vec{i} - 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{j} + 3\vec{k} - \vec{k} \\ &= -2\vec{i} + 2\vec{k} \end{aligned}$$

3p (yht. 3p)

Vastaus: $\vec{a} - \vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{k}$

2.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) \\ &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ &= 10 \end{aligned}$$

3p (yht. 6p)

Vastaus: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$

3. Olkoon vektori $\vec{c}$ pisteen $P = (4, 6, 8)$ paikkavektori, eli $\vec{c} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 8\vec{k}$. Jos piste P sijaitsee vektorin $\vec{a}$ suuntaisella origon kautta kulkevalla suoralla, on oltava:

$$\vec{c} = s \cdot \vec{a},$$

missä $s \in \mathbb{R}$. 3p (yht. 9p) Eli:

$$\bar{c} = s \cdot \bar{a}$$

$$4\bar{i} + 6\bar{j} + 8\bar{k} = s \cdot (\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k})$$

$$4\bar{i} + 6\bar{j} + 8\bar{k} = s\bar{i} + 2s\bar{j} + 3s\bar{k}$$

Vektorien yksikäsitteisyyden mukaan tulisi siis olla:

$$4 = s$$

$$6 = 2s$$

$$8 = 3s$$

Sijoittamalla tulos $s = 4$ muihin yhtälöryhmän yhtälöihin, saadaan:

$$6 = 8$$

$$8 = 12$$

mikä on ristiriita. Yhtälöryhmällä ei siis ole ratkaisua. Ei siis ole olemassa reaalilukua s , siten että $\bar{c} = s \cdot \bar{a}$. Tämä tarkoittaa, että piste P ei ole vektorin $\bar{a}$ suuntaisella origon kautta kulkevalla suoralla. 3p (yht. 12p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

6. Havainnot hypotenuusan pituudesta (12 p.)

Okku on tutkinut GeoGebraa käyttämällä suorakulmaisten kolmioiden sivujen pituuksia ja havainnut, että

1. hypotenuusa on aina pidempi kuin kateetit (6 p.)
2. hypotenuusan pituus on aina pienempi kuin kateettien pituuksien summa. (6 p.)

Perustele molemmat havainnot algebrallisesti Pythagoraan lauseen avulla.

Ratkaisu.

Olkoon suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet a ja b , ja hypotenuusan pituus c .

1. Pythagoraan lauseen nojalla

$$c^2 = a^2 + b^2 > a^2, \quad \text{1 p (yht. 1p)}$$

joten koska kolmion sivujen pituudet ovat positiivisia lukuja: 1 p (yht. 2p)

$$c > a. \quad \text{1 p (yht. 3p)}$$

Vastaavasti

$$c^2 = a^2 + b^2 > b^2, \quad \text{1 p (yht. 4p)}$$

joten koska kolmion sivujen pituudet ovat positiivisia lukuja: 1 p (yht. 5p)

$$c > b. \quad \text{1 p (yht. 6p)}$$

Hypotenuusa on siis aina pidempi kuin kateetit.

2. Pythagoraan lauseen nojalla

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 & \parallel + 2ab \\ a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab. \end{aligned}$$

Koska a ja b ovat sivujen pituuksia, niin ne ovat positiivisia. Tällöin termi $2ab$ on positiivinen 1p (yht. 7p), joten

$$c^2 + 2ab > c^2 \quad \parallel c^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 > c^2 \quad \text{2p (yht. 9p)}$$

$$(a + b)^2 > c^2, \quad \text{2p (yht. 11p)}$$

joten koska kolmion sivujen pituudet ovat positiivisia lukuja, niin

$$a + b > c. \quad \text{1p (yht. 12p)}$$

Hypotenuusan pituus on siis aina pienempi kuin kateettien pituuksien summa.

7. Pienet ja suuret kuutiot (12 p.)

Keskenään samankokoisista 99 pienestä punaisesta kuutiosta kootaan kolme suurta kuutiota, joissa on 8, 27 ja 64 osaa. Näiden kolmen suuren kuution sivut maalataan sinisiksi. Maalaamisen jälkeen suuret kuutiot puretaan takaisin 99 kuutioksi.

1. Valitaan umpimähkään yksi pieni kuutio. Millä todennäköisyydellä valitun kuution kaikki sivut ovat punaisia? (6 p.)
2. Valitaan umpimähkään kolme pientä kuutiota. Millä todennäköisyydellä ainakin yhden valitun kuution kaikki sivut ovat punaisia? (6 p.)

Ratkaisu.

1. Isoissa kuutioissa on uloin kerros pieniä kuutioita, joihin tulee sinistä maalia, sekä uloimman kerroksen sisään jäävät pienet sisäkuutiot, jotka pysyvät kokonaan punaisina. Iso kuution, joka koostuu $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ kuutiosta, sivun pituus on 2 pienen kuution sivua. Näin ollen sillä ei ole sisäkuutioita. 1p (yht. 1p) Ison kuution, joka koostuu $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ kuutiosta, sivun pituus on 3 pienen kuution sivua. Näin ollen sillä on yksi sisäkuutio. 1p (yht. 2p) Ison kuution, joka koostuu $64 = 4 \cdot 4 \cdot 4$ kuutiosta, sivun pituus on 4 pienen kuution sivua. Näin ollen sillä on $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ sisäkuutiota. 1p (yht. 3p) Täysin punaisiksi jää siis yhteensä $0 + 1 + 8 = 9$ kuutiota. 1p (yht. 4p)

Kuutio valitaan satunnaisesti. Näin ollen suotuisia alkeistapauksia on 9 kappaletta ja kaikkia alkeistapauksia on 99 kappaletta, 1p (yht. 5p) joten kysytty todennäköisyys on

$$P = \frac{9}{99} = \frac{1}{11} = 0,0909 \dots \approx 9,1\%. \quad \text{1p (yht. 6p)}$$

Vastaus: Todennäköisyys, että umpimähkään valitun kuution kaikki sivut ovat punaiset, on 9,1%.

YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 20.9.2022) oli annettu vastaukseksi vain $\frac{1}{11}$, joten täydet pisteet saa luultavasti, jos on antanut tarkan arvon riippumatta siitä, onko antanut pyöristettyä arvoa tai onko pyöristetyn arvon antanut prosentteina vai desimaalilukuna.

2. Tapahtuman A = "ainakin yhden kuution sivut ovat kaikki punaisia" vastatapahtuma on B = "kunkin kuution ainakin yksi sivu on sininen". 1p (yht. 7p) Näin ollen

$$P(A) = 1 - P(B).$$

Kuutioita, joissa ainakin yksi sivu on sininen, on kohdan 1 nojalla $99 - 9 = 90$ kappaletta. 1p (yht. 8p) Näin ollen todennäköisyys, että ensimmäisessä valitussa kuutiossa ainakin yksi sivu on sininen, on

$$P_1 = \frac{90}{99}.$$

Jos ensimmäisessä valitussa kuutiossa ainakin yksi sivu on sininen, kuutioita on kaikkiaan jäljellä $99 - 1 = 98$ ja kuutioita, joissa ainakin yksi sivu on sininen, on jäljellä $90 - 1 = 89$ kappaletta. Näin ollen todennäköisyys, että toisessa valitussa kuutiossa ainakin yksi sivu on sininen, on

$$P_2 = \frac{89}{98}. \quad \text{1p (yht. 9p)}$$

Jos toisessakin valitussa kuutiossa ainakin yksi sivu on sininen, kuutioita on kaikkiaan jäljellä $98 - 1 = 97$ ja kuutioita, joissa ainakin yksi sivu on sininen, on jäljellä $89 - 1 = 88$. Näin ollen todennäköisyys, että kolmannessakin valitussa kuutiossa ainakin yksi sivu on sininen, on

$$P_3 = \frac{88}{97}. \quad \text{1p (yht. 10p)}$$

Tapahtuman B todennäköisyys on siis

$$P(B) = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3,$$

ja tapahtuman A todennäköisyys on siis

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(B) \\ &= 1 - P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \\ &= 1 - \frac{90}{99} \cdot \frac{89}{98} \cdot \frac{88}{97} \quad \text{1p (yht. 11p)} \\ &= \frac{1193}{4753} \\ &= 0,250999 \dots \\ &\approx 25,1\%. \quad \text{1p (yht. 12p)} \end{aligned}$$

YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 20.9.2022) pyöristetty vastaus oli annettu desimaalilukuna kahden desimaalin tarkkuudella, eli muodossa 0,25, joten se hyväksytään melko varmasti myös.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

8. Kokonaislukuratkaisuja (12 p.)

Määritä yhtälön $x^6 + 2x^3y^3 + y^6 = 4225$ kaikki kokonaislukuratkaisut, kun $x > 0$ ja $y > 0$.

Ratkaisu.

Yhtälön vasen puoli muistuttaa binomikaavaa $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kun $a = x^3$ ja $b = y^3$. Ratkaistaan tehtävänannon yhtälöstä y muuttujan x avulla:

$$x^6 + 2x^3y^3 + y^6 = 4225$$

$$(x^3)^2 + 2x^3y^3 + (y^3)^2 = 4225$$

$$(x^3 + y^3)^2 = 4225 \quad \text{2p (yht. 2p)}$$

$$x^3 + y^3 = \pm 65$$

Negatiivinen ratkaisu voidaan hylätä, sillä tehtävänannon mukaan $x > 0$ ja $y > 0$.

$$y^3 = 65 - x^3$$

$$y = \sqrt[3]{65 - x^3}$$

Tehtävänannon mukaan $x > 0$ ja $y > 0$, joten myös $x^3 > 0$ ja $y^3 > 0$. Näin ollen muuttujien x ja y arvot ovat korkeintaan $\sqrt[3]{65} \approx 4,0207 \dots$ 4p (yht. 6p) Mahdollisille kokonaislukuratkaisuille pätee siis $1 \leq x \leq 4$ ja $1 \leq y \leq 4$. 2p (yht. 8p) Ratkaistaan muuttujan y arvot kullakin x :n arvolla:

x	$y = \sqrt[3]{65 - x^3}$	
1	$= \sqrt[3]{65 - 1^3}$	$= 4$
2	$= \sqrt[3]{65 - 2^3}$	$= \sqrt[3]{57} \approx 3,848 \dots$ ei kokonaislukuratkaisua
3	$= \sqrt[3]{65 - 3^3}$	$= \sqrt[3]{38} \approx 3,361 \dots$ ei kokonaislukuratkaisua
4	$= \sqrt[3]{65 - 4^3}$	$= 1$

Yhtälö toteutuu siis kokonaislukupareilla $x = 1, y = 4$ sekä $x = 4, y = 1$. 4p (yht. 12p)

Pisteytyksestä: 1 p / tarkistettu x :n arvo sekä mahdollinen ratkaisu.

Vastaus: Tehtävän kokonaislukuratkaisut ovat $x = 1, y = 4$ sekä $x = 4, y = 1$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

9. Neljännen asteen polynomiperhe (12 p.)

Tarkastellaan polynomia $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$, kun $a > 0$ ja $a \in \mathbb{R}$.

1. Osoita, että derivaatta f' on aidosti kasvava funktio. (4 p.)
2. Osoita, että yhtälöllä $f(x) = 0$ on korkeintaan kaksi erisuurta reaalijuurta. (8 p.)

Ratkaisu.

1. Derivoidaan tehtävänannon funktio:

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax + b \quad (1 \text{ p (yht. 1 p)})$$

Merkitään derivaattafunktion f' derivaattaa f'' :llä:

$$f''(x) = 12x^2 + 2a \quad (1 \text{ p (yht. 2 p)})$$

Derivaattafunktion derivaatan ensimmäinen termi $12x^2$ on aina ei-negatiivinen, sillä $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Jälkimmäinen termi on positiivinen, sillä tehtävänannon mukaan $a > 0$. (1 p (yht. 3 p)) Derivaattafunktion f' derivaatta f'' on siis positiivinen kaikilla muuttujan x arvoilla, joten derivaattafunktio f' on aidosti kasvava koko määrittelyjoukossaan. (1 p (yht. 4 p))

- 2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Kohdassa 9.1. osoitettiin, että funktio f' on aidosti kasvava, joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta. (2 p (yht. 6 p)) Derivaattafunktio f' on kolmannen asteen polynomi, joten sillä on vähintään yksi nollakohta. Derivaattafunktiolla f' on siis täsmälleen yksi nollakohta. (2 p (yht. 8 p)) Merkitään tätä nollakohtaa x_0 :lla.

Koska f' on aidosti kasvava, reaaliluvuilla $x < x_0$ se saa pelkästään negatiivisia arvoja. Funktio f on siis aidosti vähenevä alueessa $x < x_0$ (1 p (yht. 9 p)) joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta eli juuri tässä alueessa. $(1 \text{ p (yht. 10 p)})$

Vastaavasti alueessa $x \geq x_0$ aidosti kasvava f' saa pelkästään ei-negatiivisia arvoja ja sen arvo on nolla vain yhdessä pisteessä x_0 . Funktio f on siis aidosti kasvava alueessa $x \geq x_0$ 1p (yht. 11p) joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta eli juuri tässä alueessa. 1p (yht. 12p)

Funktiolla f on siis korkeintaan kaksi reaalijuurta.

Jos derivaatan nollakohta x_0 on myös funktion f nollakohta, tällöin funktiolla f on täsmälleen yksi reaalinen nollakohta. Muussa tapauksessa sillä on täsmälleen kaksi nollakohtaa.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Kohdassa 9.1. osoitettiin, että funktio f' on aidosti kasvava. Sillä on siis korkeintaan yksi nollakohta. 2p (yht. 6p) Tarkastellaan erikseen tilanteet, missä f' :llä on nolla tai yksi nollakohtaa.

- Jos f' :llä ei ole nollakohtia, se saa joko pelkästään positiivisia tai pelkästään negatiivisia arvoja kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Näinollen funktio f on joko aidosti kasvava tai aidosti vähenevä kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja sillä voi olla korkeintaan yksi reaalinen nollakohta. 2p (yht. 8p)
- Tilanne, missä f' :llä on yksi nollakohta: Merkitään tätä nollakohtaa x_0 :lla. Koska f' on aidosti kasvava, reaali-luvuilla $x < x_0$ se saa pelkästään negatiivisia arvoja. Funktio f on siis aidosti vähenevä alueessa $x < x_0$ 1p (yht. 9p) joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta eli juuri tässä alueessa. 1p (yht. 10p)

Vastaavasti alueessa $x \geq x_0$ aidosti kasvava f' saa pelkästään ei-negatiivisia arvoja ja sen arvo on nolla vain yhdessä pisteessä x_0 . Funktio f on siis aidosti kasvava alueessa $x \geq x_0$ 1p (yht. 11p) joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta eli juuri tässä alueessa. 1p (yht. 12p)

Funktiolla f on siis korkeintaan kaksi reaalijuurta.

Jos derivaatan nollakohta x_0 on myös funktion f nollakohta, tällöin funktiolla f on täsmälleen yksi reaalinen nollakohta. Muussa tapauksessa sillä on täsmälleen kaksi nollakohtaa.

Värialliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

10. Lukupeli (12 p.)

Aaro ja Siiri pelaavat itse keksimäänsä lukupeliä. He kirjoittavat vuorotellen paperille jonkin luvun $1, 2, \dots, 10$. Sellaista lukua ei saa kirjoittaa, joka on paperille jo kirjoitetun luvun tekijä. Pelin häviää se, joka ei voi kirjoittaa uutta lukua paperille.

1. Aaro aloittaa pelin kirjoittamalla paperille luvun 8. Mitkä ovat ne luvut, jotka Siiri voi tämän jälkeen seuraavalla vuorollaan kirjoittaa? (3 p.)
2. Anna esimerkki siitä, miten Aaron luvulla 8 aloittama peli voisi edetä loppuun. Tässä riittää, kun annat kirjoitettavat luvut järjestyksessä ilman perusteluja. (3 p.)
3. Kun Siiri saa aloittaa pelin, hänellä on seuraava strategia:
 - Aloita kirjoittamalla paperille luku 6.
 - Muodosta parit $(4, 5)$, $(7, 9)$ ja $(8, 10)$. Kun vastapelaaja kirjoittaa oman lunksa, niin kirjoita tämän luvun pari. Jatka näin pelin loppuun asti.

Pelikierros voi siis edetä esimerkiksi näin: *Siiri kirjoittaa luvun 6. Aaro kirjoittaa paperille luvun 7, jolloin Siiri kirjoittaa luvun 9. Aaro kirjoittaa paperille luvun 10, jolloin Siiri kirjoittaa paperille luvun 8 ja voittaa pelin.*

Siiri pelaa strategiansa mukaisesti ja aloittaa pelin kirjoittamalla paperille luvun 6. Aaro kirjoittaa paperille luvun a , sitten Siiri kirjoittaa paperille luvun b , jonka jälkeen Aaro kirjoittaa luvun c . Nyt Siiri kirjoittaa paperille luvun 9, mutta ei vielä voita peliä. Mitkä ovat eri vaihtoehdot luvuiksi a , b ja c ? (6 p.)

Ratkaisu.

1. Jäljellä ovat luvut $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10$. Näistä luvun 8 tekijöitä ovat $1, 2, 4$, joten Siiri voi seuraavalla vuorolla kirjoittaa minkä tahansa luvuista $3, 5, 6, 7, 9, 10$.

3p (yht. 3p)

2. $8, 9, 10, 6, 7$.

3p (yht. 6p)

Mikä tahansa oikein tehty esimerkki kelpaa vastaukseksi.

3. Siirin ja Aaron pelaamat luvut ovat siis $6, a, b, c, 9, \dots$, joista a ja c ovat Aaron pelaamia lukuja.

Siirin strategian mukaan hän pelaa luvun 9 täsmälleen silloin, kun Aaro pelaa luvun 7. Näin ollen täytyy olla $c = 7$. 1p (yht. 7p) Siirin ja Aaron pelaamat luvut ovat siis $6, a, b, 7, 9, \dots$. Kaikista luvuista 1, 2 ja 3 ovat luvun 6 tekijöitä, joten a ja b ovat jotkin luvuista 4, 5, 8, 10. 1p (yht. 8p)

Siirin strategian mukaan jos Aaro pelaa toisen luvuista 4 ja 5, Siiri pelaa toisen. Vastaavasti jos Aaro pelaa toisen luvuista 8 ja 10, Siiri pelaa toisen. Luvut a ja b ovat siis 4 ja 5 tai 8 ja 10. 1p (yht. 9p)

Luvut 4 ja 5 ovat lukujen 8 ja 10 tekijöitä, joten jos luvut a ja b olisivat 8 ja 10, peli loppuisi lukuun 9. 1p (yht. 10p) Tehtävänannon mukaan peli ei vielä pääty lukuun 9, joten luvut a ja b eivät voi olla 8 ja 10. Näin ollen niiden täytyy olla luvut 4 ja 5. 1p (yht. 11p)

Siirin ja Aaron pelaamat luvut ovat siis joko $6, 4, 5, 7, 9, \dots$ tai $6, 5, 4, 7, 9, \dots$

Vastaus: $a = 4, b = 5$ ja $c = 7$, tai $a = 5, b = 4$ ja $c = 7$. 1p (yht. 12p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

11. Numeerinen integrointi (12 p.)

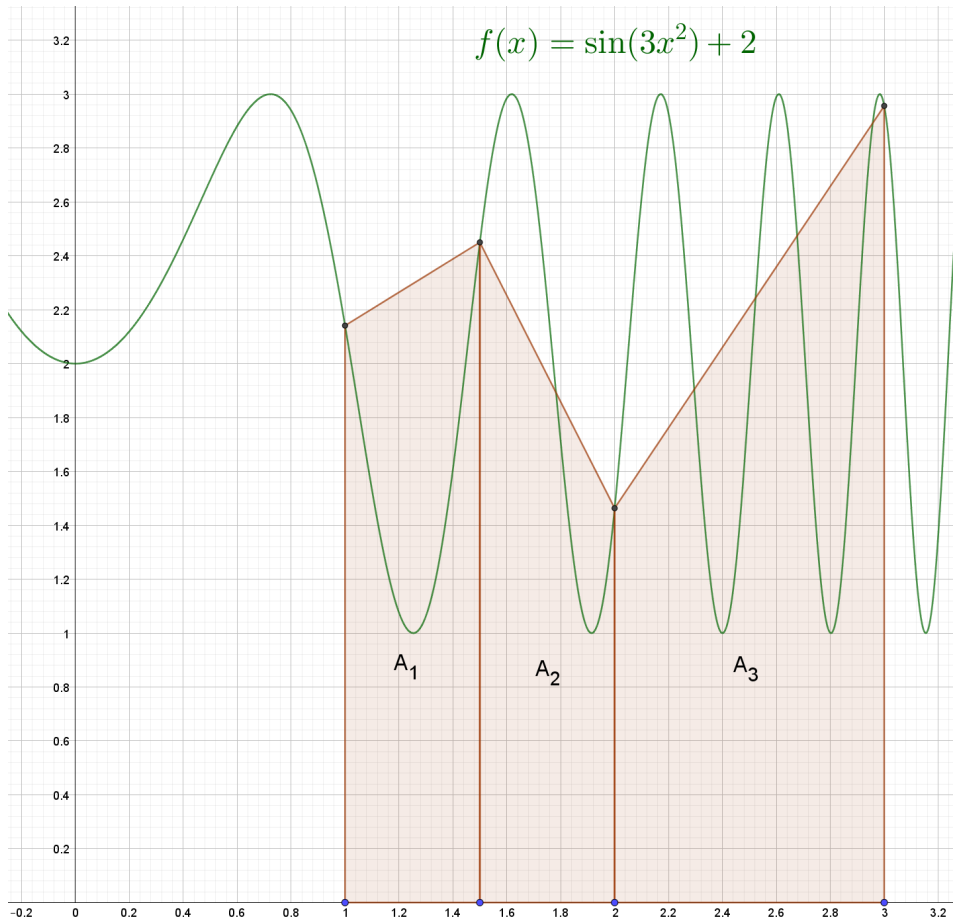
Positiivisen funktion f kuvaajan ja x -akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa voidaan arvioida puolisuunnikassäännön avulla laskemalla yhteen puolisuunnikkaiden pinta-aloja. Jakoväliä $[x_k, x_{k+1}]$ vastaa puolisuunnikas, jonka kärkipisteet ovat $(x_k, 0)$, $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ ja $(x_{k+1}, 0)$. Huomaa, että jakovälien ei tarvitse olla yhtä pitkiä.

Tarkastellaan funktion $f(x) = \sin(3x^2) + 2$ kuvaajan ja x -akselin väliin jäävää pinta-alaa A välillä $1 \leq x \leq 3$. Arvioidaan pinta-alaa puolisuunnikassäännön avulla käyttäen jakopisteitä $1, \frac{3}{2}, 2$ ja 3 .

1. Piirrä funktion f kuvaaja ja edellä annetun jaon tuottamat puolisuunnikkaat. (3 p.)
2. Pinta-alan kuusidesimaalinen likiarvo on $A \approx 3,862\,059$. Arvioidaan pinta-alaa puolisuunnikassäännön avulla käyttäen edellä annettua jakoa. Laske puolisuunnikkaiden pinta-alat, koko puolisuunnikasmaailman antama pinta-ala A' sekä absoluuttinen virhe $|A' - A|$. (7 p.)
3. Millä tavalla edellisessä osatehtävässä käytetyn menetelmän tarkkuutta voidaan parantaa? (2 p.)

Ratkaisu.

1.



3p (yht. 3p)

2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Puolisuunnikkaiden pinta-alat ovat

$$A_1 = \frac{f(\frac{3}{2}) + f(1)}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) = 1,1477910205 \dots \approx 1,147791 \quad \text{1p (yht. 4p)}$$

$$A_2 = \frac{f(2) + f(\frac{3}{2})}{2} \cdot \left(2 - \frac{3}{2}\right) = 0,9783677889 \dots \approx 0,978368 \quad \text{1p (yht. 5p)}$$

$$A_3 = \frac{f(3) + f(2)}{2} \cdot (3 - 2) = 2,2099015052 \dots \approx 2,209902. \quad \text{1p (yht. 6p)}$$

Puolisuunnikasmenetelmän antama pinta-ala on siis

$$A' = A_1 + A_2 + A_3 = 4,3360603146 \dots \approx 4,336060. \quad \text{2p (yht. 8p)}$$

Todellisen pinta-alan likiarvo on $A = 3,862059$. Absoluuttinen virhe on siis

$$|A' - A| = 0,47400131 \dots \approx 0,474001. \quad \text{2p (yht. 10p)}$$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Huomaa! Tehtävänannossa sanottiin "Laske", joten voi olla, että Geogebbran monikulmion piirtotoiminnon antamien pinta-alojen käyttämisestä suoraan ei saa täysiä pisteitä. Lisäsimme myös tämän ratkaisuvaihtoehdon, koska arvaamme, että moni opiskelija on ratkaissut tehtävän näin.

Kohdassa 1 käytetty Geogebbran monikulmionpiirtotoiminto antaa puolisuunnikkaiden pinta-aloiksi

$$A_1 = 1,1477910205 \dots \approx 1,147791 \quad \text{1p (yht. 4p)}$$

$$A_2 = 0,9783677889 \dots \approx 0,978368 \quad \text{1p (yht. 5p)}$$

$$A_3 = 2,2099015052 \dots \approx 2,209902. \quad \text{1p (yht. 6p)}$$

Puolisuunnikasmenetelmän antama pinta-ala on siis

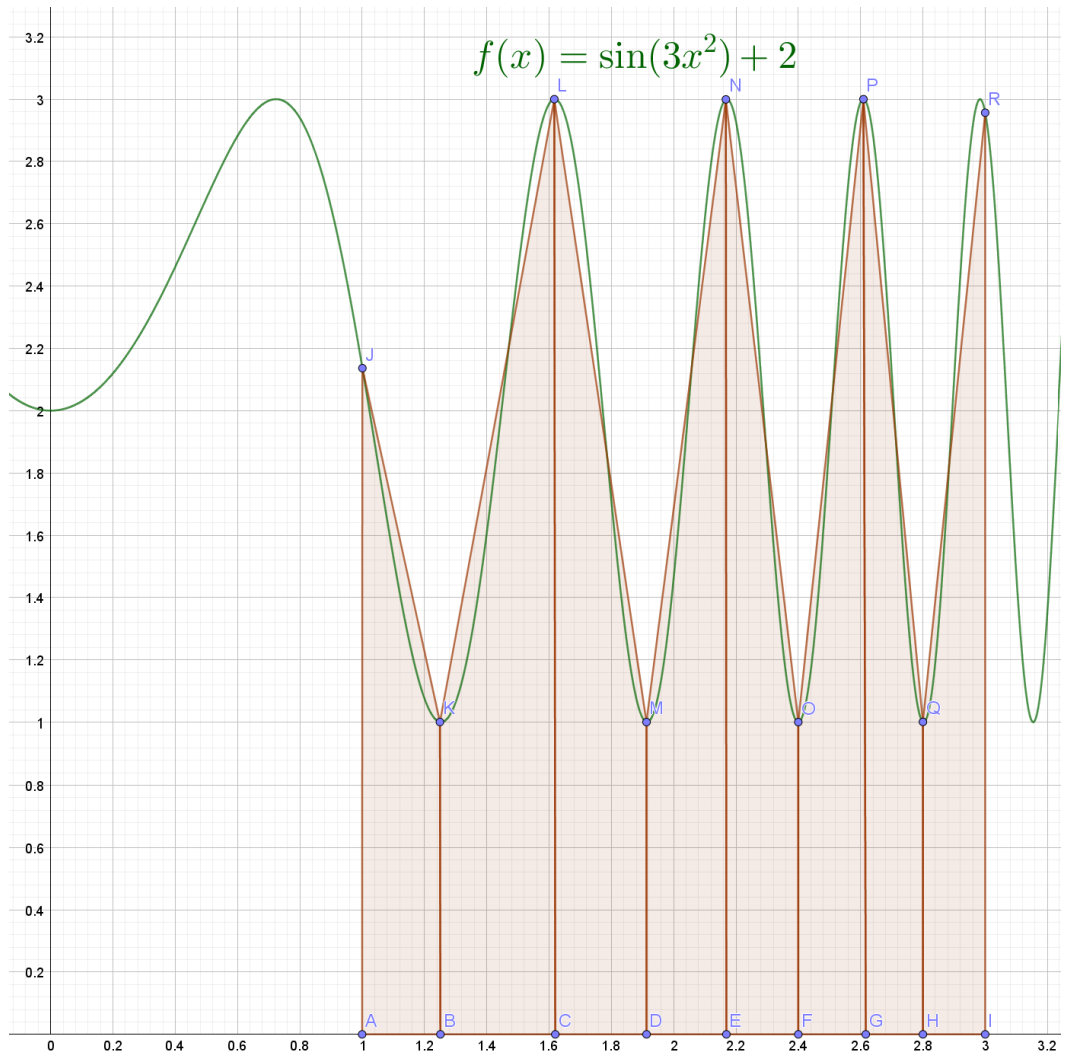
$$A' = A_1 + A_2 + A_3 = 4,3360603146 \dots \approx 4,336060. \quad \text{2p (yht. 8p)}$$

Todellisen pinta-alan likiarvo on $A = 3,862059$. Absoluuttinen virhe on siis

$$|A' - A| = 0,47400131 \dots \approx 0,474001. \quad \text{2p (yht. 10p)}$$

3. Menetelmän tarkkuutta voisi parantaa valitsemalla jakovälit siten, että jakovälien rajat ovat kuvaajan huippujen ja pohjien kohdalla. 1p (yht. 11p) Tällöin jakovälejä olisi tiheämmin kohdissa, joissa funktion kuvaaja heilahtelee eniten. 1p (yht. 12p)
Menetelmän tarkkuutta voi parantaa yleisestikin lisäämällä jakovälejä.

Alla oleva kuva on lisäselitystä, eikä sitä vaadita ratkaisussa.



Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

12. Trigonometrinen summa (12 p.)

1. Olkoon $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$. Osoita, että

$$\sin a + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \leq 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

(4 p.)

2. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$\sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(\sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2n}(n-k)\right) \right).$$

(4 p.)

3. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$\sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right) \leq \frac{n+1}{\sqrt{2}}.$$

(4 p.)

Ratkaisu.

1.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Olkoon

$$f(x) = \sin(x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

missä $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Derivoidaan f .

$$f'(x) = \cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

1p (yht. 1p)

Huomaa! Jos derivoit funktion laskinohjelman avulla, saatat saada lausekkeeksi $\cos(x) - \sin(x)$.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{tai} \quad x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n \quad \text{tai} \quad x = -\frac{\pi}{2} + x + 2\pi n$$

$$0 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

(ei ratkaisua)

Koska $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, ainoa ratkaisu saadaan, kun $n = 0$, eli $x = \frac{\pi}{4}$. 1p (yht. 2p)

Sinifunktio on derivoituva, joten f on myös derivoituva. Derivoituvan funktion suurin arvo löytyy suljetulla välillä välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista. 1p (yht. 3p)

$$f(0) = \sin(0) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}$$

Funktion f suurin arvo on siis $2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$. 1p (yht. 4p) Näin ollen siis

$$f(a) \leq 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin(a) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \leq 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

kun $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$.

□

Ratkaisuvaihtoehto 2

Tiedetään, että sinifunktion arvo on aina korkeintaan 1. Näin ollen

$$\sin(2a) \leq 1 \quad \text{1p (yht. 1p)}$$

$$1 + \sin(2a) \leq 2 \quad \parallel \sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$$

$$1 + 2 \sin(a) \cos(a) \leq 2 \quad \parallel 1 = \sin^2(a) + \cos^2(a)$$

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) + 2 \sin(a) \cos(a) \leq 2$$

$$\sin^2(a) + 2 \sin(a) \cos(a) + \cos^2(a) \leq 2 \quad \parallel \text{Binomin neliö}$$

$$(\sin(a) + \cos(a))^2 \leq 2 \quad \text{1p (yht. 2p)}$$

Tiedetään, että $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$, joten $\sin(a) + \cos(a) \geq 0$. Näin ollen ylläolevasta epäyhtälöstä seuraa

$$\sin(a) + \cos(a) \leq \sqrt{2} \quad \text{1p (yht. 3p)}$$

$$\sin(a) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \leq 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \parallel \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin(a) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \leq 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{1p (yht. 4p)} \quad \square$$

Ratkaisuvaihtoehto 3

Trigonotrisen summakaavaan mukaan $\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.
Näin ollen:

$$\begin{aligned} \sin(a) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= 2 \sin\left(\frac{a + \frac{\pi}{2} - a}{2}\right) \cos\left(\frac{a - \frac{\pi}{2} + a}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{2p (yht. 2p)} \end{aligned}$$

Koska $\cos(x)$ suurin arvo on 1, voidaan arvioida:

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right) \leq 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{2p (yht. 4p)} \quad \square$$

2. Tarkastellaan tehtävän yhtälön oikealla puolella olevaa summaa.

$$\sum_{k=0}^n \left(\sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2n}(n-k)\right) \right) = \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right) + \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}(n-k)\right)$$

Ensimmäinen summa on

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2n} \cdot 0\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2n} \cdot 1\right) + \dots + \sin\left(\frac{\pi}{2n}(n-1)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2n}n\right). \end{aligned}$$

Toinen summa puolestaan on

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}(n-k)\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2n} \cdot (n-0)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2n} \cdot (n-1)\right) + \\ & \quad \dots + \sin\left(\frac{\pi}{2n}(n-(n-1))\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2n}(n-n)\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2n} \cdot n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2n} \cdot (n-1)\right) + \dots + \sin\left(\frac{\pi}{2n} \cdot 1\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2n} \cdot 0\right) \end{aligned}$$

Summissa on siis keskenään samat termit, mutta päinvastaisessa järjestyksessä.

Näin ollen summat ovat yhtäsuuret. 2p (yht. 6p)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2n}(n-k)\right) \right) &= \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right) + \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}(n-k)\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right) + \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right) \\ &= 2 \cdot \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right) \quad \text{1p (yht. 7p)} \end{aligned}$$

Saadaan siis

$$2 \cdot \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right) = \sum_{k=0}^n \left(\sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2n}(n-k)\right) \right)$$

$$\sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(\sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2n}(n-k)\right) \right). \quad \text{1p (yht. 8p)} \quad \square$$

3. Kohdan 12.2 nojalla

$$\sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(\sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2n}(n-k)\right) \right) \quad \text{1p (yht. 9p)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(\sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}k\right) \right).$$

Koska $0 \leq k \leq n$, niin $0 \leq \frac{\pi}{2n}k \leq \frac{\pi}{2}$. Näin ollen kohdan 12.1 nojalla

$$\sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \quad \text{2p (yht. 11p)}$$

$$= \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= (n+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{n+1}{\sqrt{2}}. \quad \text{1p (yht. 12p)} \quad \square$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

13. Derivaatan määritelmä (12 p.)

1. Derivaatta määritellään erotusosamäärän raja-arvona. Esitä derivaatan määritelmän geometrinen tulkinta funktion $f(x) = \ln x$ avulla pisteessä $x = 2$. (4 p.)
2. Osoita derivaatan määritelmän avulla, että funktion $f(x) = \ln x$ derivaatta on $f'(x) = \frac{1}{x}$, kun $x > 0$. Voit käyttää tietoa

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{1/t} = e.$$

(8 p.)

Ratkaisu.

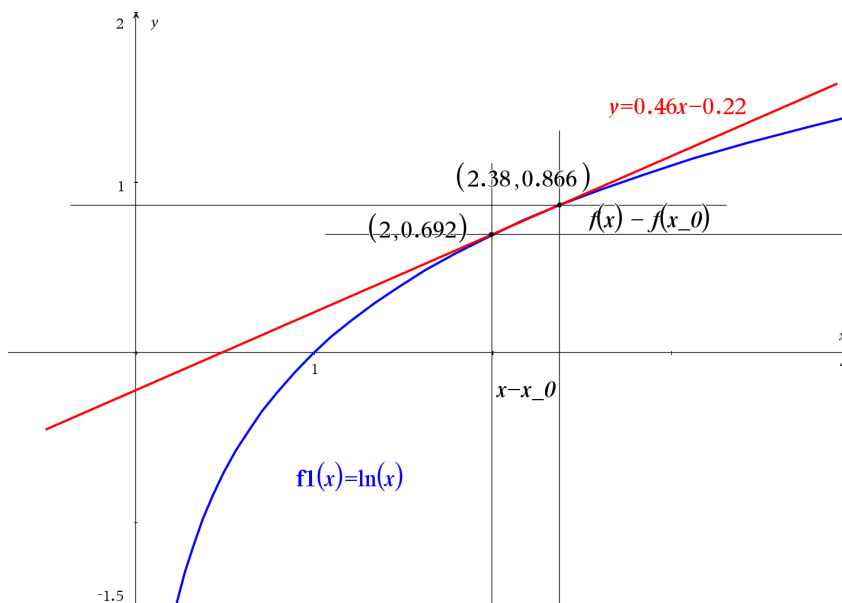
1.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Derivaatan määritelmä on

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{1p (yht. 1p)}$$

Piirretään kuvaan funktion $f(x) = \ln(x)$ kuvaaja sekä sille kaksi pistettä, yksi kohtaan $x_0 = 2$ sekä toinen tämän pisteen oikealle puolelle kohtaan x . Toisen pisteen voi piirtää myös kohdan $x_0 = 2$ vasemmalle puolelle. Ratkaisu etenee tällöin samalla tavalla. Piirretään näiden pisteiden kautta suora.



1p (yht. 2p)

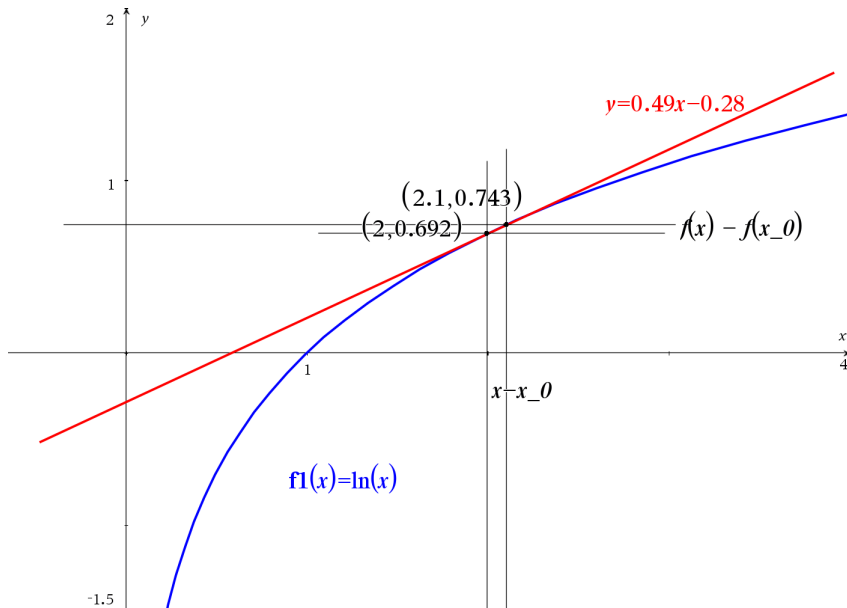
Tämän suoran kulmakerroin on pisteiden avulla ilmaistuna

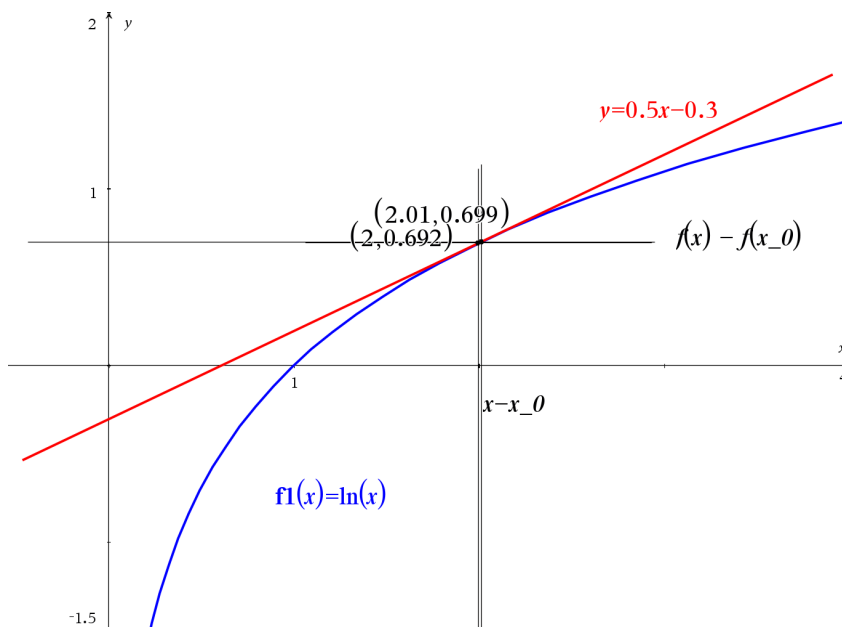
$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$k = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad 1p \text{ (yht. 3p)}$$

Kun oikeanpuoleinen piste lähestyy kohdassa $x_0 = 2$ olevaa pistettä, suora lähestyy funktion kuvaajalle kohtaan $x_0 = 2$ piirrettyä tangenttia. 1p (yht. 4p)

Alla olevat kuvat ovat lisäselitystä, eikä niitä vaadita ratkaisussa.





Tangentin kulmakerroin on derivaatan arvo, tässä $f'(2) = \frac{1}{2}$.

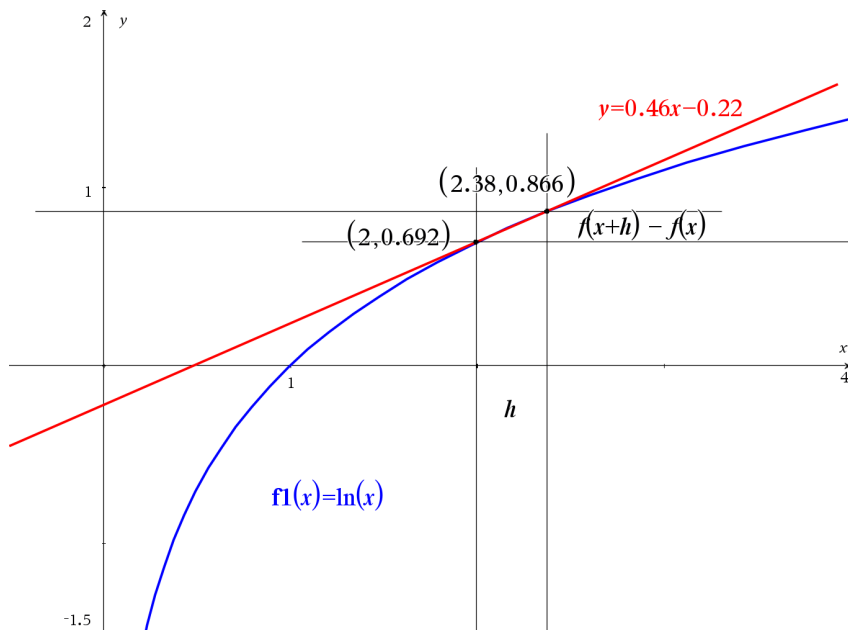
Pisteytyksestä: Yksi selkeä kuva sekä sanallinen selitys riittää täysiin pisteisiin.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Derivaatan määritelmä on

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} \quad \text{1p (yht. 1p)}$$

Piirretään kuvaan funktion $f(x) = \ln(x)$ kuvaaja sekä sille kaksi pistettä, yksi kohtaan $x = 2$ sekä toinen tämän pisteen oikealle puolelle kohtaan $x + h$, missä h on pieni positiivinen luku. Toisen pisteen voi piirtää myös kohdan $x_0 = 2$ vasemmalle puolelle. Ratkaisu etenee tällöin samalla tavalla. Piirretään pisteiden kautta suora.



1p (yht. 2p)

Tämän suoran kulmakerroin on pisteiden avulla ilmaistuna

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

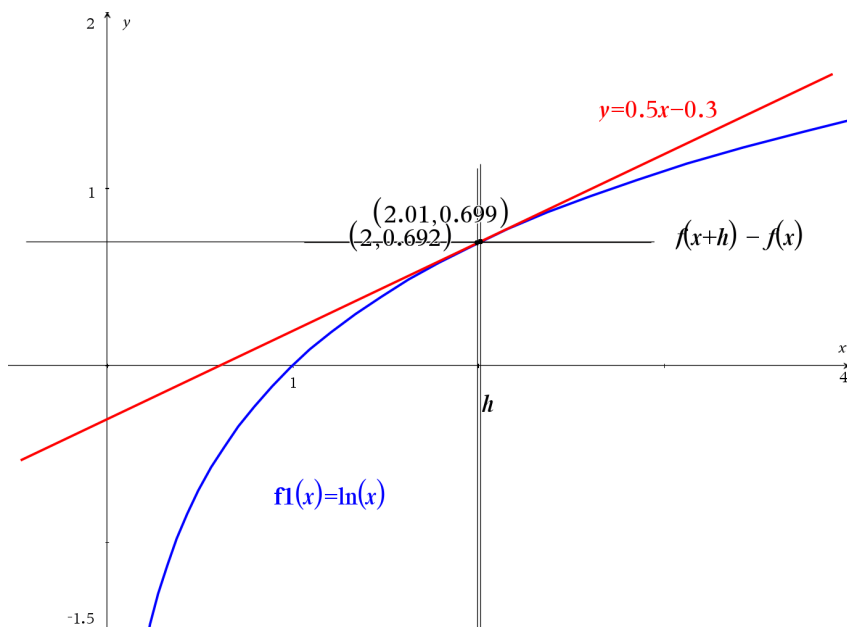
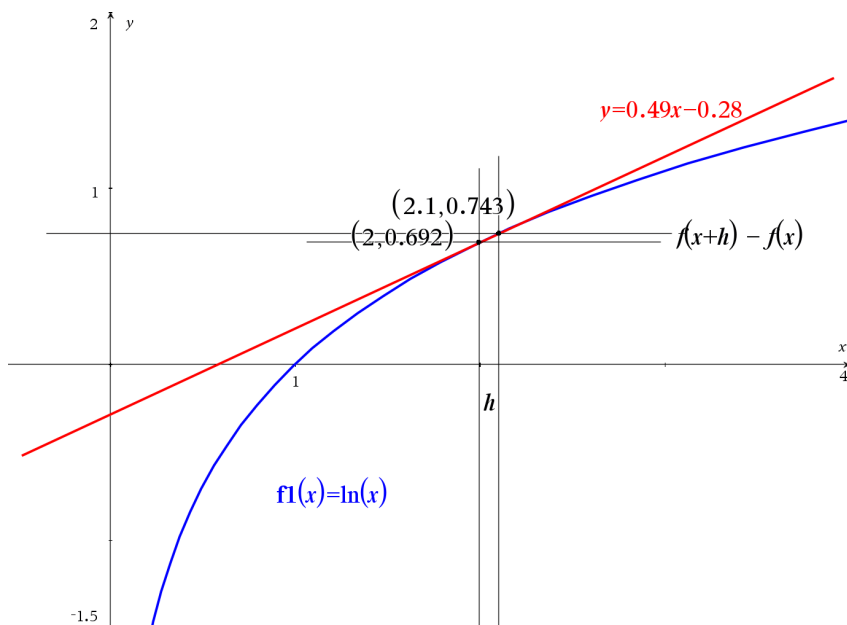
$$k = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

1p (yht. 3p)

Kun oikeanpuoleinen piste lähestyy kohdassa $x = 2$ olevaa pistettä, suora lähestyy funktion kuvaajalle kohtaan $x = 2$ piirrettyä tangenttia.

1p (yht. 4p)

Alla olevat kuvat ovat lisäselitystä, eikä niitä vaadita ratkaisussa.



Tangentin kulmakerroin on derivaatan arvo, tässä $f'(2) = \frac{1}{2}$.

Pisteytyksestä: Yksi selkeä kuva sekä sanallinen selitys riittää täysiin pisteisiin.

2. Aloitetaan derivaatan määritelmästä. Funktion $f(x) = \ln(x)$ derivaatta on

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} \quad \text{2p (yht. 6p)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \end{aligned}$$

Tehdään muuttujanvaihto $t = \frac{h}{x} \Leftrightarrow h = xt$. Raja-arvo muuttuu muotoon $\lim_{t \rightarrow 0}$, sillä $t \rightarrow 0$ kun $h \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{xt} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{t} \ln(1+t) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \ln(1+t) \frac{1}{t} \right) \quad \text{2p (yht. 8p)} \quad \text{logaritmin laskusäännöt} \end{aligned}$$

Koska muuttuja x ei riipu t :stä, voidaan raja-arvon laskusääntöjen perusteella tekijä $\frac{1}{x}$ siirtää raja-arvon ulkopuolelle.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\ln(1+t) \frac{1}{t} \right) \\ &= \frac{1}{x} \ln \left(\lim_{t \rightarrow 0} \left((1+t) \frac{1}{t} \right) \right) \quad \text{2p (yht. 10p)} \end{aligned}$$

Tehtävänannon mukaan $\lim_{t \rightarrow 0} \left((1+t)^{\frac{1}{t}} \right) = e$. Tämä on Neperin luvun e määritelmä.

$$= \frac{1}{x} \ln(e)$$

$$= \frac{1}{x}$$

2p (yht. 12p)

□

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!