

Yo-mallivastaukset



Syksy 2022
Lyhyt matematiikka

Tiesitkö tämän?

Mafylaiset veivät
vuoden 2022
haussa

72%

kaikista lääiksen
pääsykoekiintiön paikoista.

60%

Pk-seudun lukioista
käyttää **Mafynettiä**.

Yo-kertausmateriaalit saatavilla
matemaattis-luonnontieteellisiin aineisiin sekä histo-
riaan, yhteiskuntaoppiin ja äidinkieleen.

Mafynetti

Mallivastausten tekijät:

Malliratkaisujen laatimisesta vastaa MAFY:n oppimateriaalitiimi, jonka päätehtävä on laatia ja kehittää MAFY:n lukioon tarkoitettuja oppimateriaaleja.

Oppimateriaalitiimistä mukana olivat Antti Suominen, Sakke Suomalainen, Saija Ojala ja Timo Kalinainen. Lisäksi työn tukena olivat Tuomas Hauvala ja Matti Virolainen.

Mafy oppimateriaalit

Olemme Helsingissä, Tampereella ja Jyväskylässä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys.

Palveluitamme ovat:

- Mafynetti – sähköinen oppimateriaali
- Lääketieteellisen valmennuskurssit
- Kauppatieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- Yo-kokeisiin valmentavat kurssit

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kurseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Käyttöehdot

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafy.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion matematiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukiokursseillasi. Nämä mallivastaukset ovat MAFY Oy:n omaisuutta.

MAFY Oy:n yhteystiedot:

<https://mafy.fi/yhteydenotto>

Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	9
Ratkaisu tehtävään 3	13
Ratkaisu tehtävään 4	16
Ratkaisu tehtävään 5	20
Ratkaisu tehtävään 6	23
Ratkaisu tehtävään 7	27
Ratkaisu tehtävään 8	30
Ratkaisu tehtävään 9	32
Ratkaisu tehtävään 10	40
Ratkaisu tehtävään 11	43
Ratkaisu tehtävään 12	53
Ratkaisu tehtävään 13	57

Malliratkaisut päivitetty 8. helmikuuta 2023 klo. 10:40.

1. Monivalintatehtäviä (12 p.)

Vastaa kuuteen kohdista 1.1–1.8.

Alla on kahdeksan osatehtävää 1.1–1.8, joista vastataan kuuteen. Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen osatehtävän vastauskenttään, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

1.1. Lukujono (2 p.)

Aritmeettisen lukujonon ensimmäiset jäsenet ovat $a_1 = 5$ ja $a_2 = 8$. Tällöin

$$a_5 = \boxed{}$$

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9", "10", "11", "12", "13", "14", "15", "16", "17", "18", "19", "20".

1.2. Yhtälö (2 p.)

Yhtälön $5x + 4 = 3x + 12$ ratkaisu on

$$x = \boxed{}$$

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "-10", "-9", "-8", "-7", "-6", "-5", "-4", "-3", "-2", "-1", "0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9", "10".

1.3. Kolmio (2 p.)

Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 6 ja 8. Kolmion hypotenuusan pituus on

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9", "10", "11", "12", "13", "14", "15", "16", "17", "18", "19", "20".

1.4. Potenssi (2 p.)

Yhtälön $7^{2x+7} = 7$ ratkaisu on

$$x = \boxed{}$$

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "-10", "-9", "-8", "-7", "-6", "-5", "-4", "-3", "-2", "-1", "0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9", "10".

1.5. Nopan heitto (2 p.)

Heitetään kahta noppaa. Todennäköisyys saada silmälukujen summaksi kahdeksan on $\frac{n}{36}$, jossa

$$n = \boxed{}$$

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9", "10", "11", "12", "13", "14", "15", "16", "17", "18", "19", "20".

1.6. Sijoitus (2 p.)

Sijoituksen arvo kasvaa vuosittain 4 prosenttia. Kuinka monen vuoden kuluttua sijoituksen arvo on kaksinkertaistunut?

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9", "10", "11", "12", "13", "14", "15", "16", "17", "18", "19", "20".

1.7. Derivaatan arvo (2 p.)

Funktio $f(x) = 2x^2 + x$ derivoidaan. Silloin

$$f'(3) = \boxed{}$$

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9", "10", "11", "12", "13", "14", "15", "16", "17", "18", "19", "20".

1.8. Jakauman normittaminen (2 p.)

Normaalijakauman odotusarvo on 6 ja keskihajonta on 2. Havaintoa 12 vastaava normitettu arvo on

$Z =$

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "-10", "-9", "-8", "-7", "-6", "-5", "-4", "-3", "-2", "-1", "0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9", "10".

Ratkaisu.

1.1. 17

1.2. 4

1.3. 10

1.4. -3

1.5. 5

1.6. 18

1.7. 13

1.8. 3

Pisteytyksestä: Jokaisesta oikeasta vastauksesta 2 p. Huomaa, että vain kuuteen kohtaan sai vastata!

Perustelut:**1.1**

Aritmeettisessa lukujonossa peräkkäisten jäsenten erotus, jota kutsutaan myös erotusluvuksi, on vakio. Aritmeettisen lukujonon ensimmäiset jäsenet ovat $a_1 = 5$ ja $a_2 = 8$, joten erotusluku on

$$d = a_2 - a_1 = 8 - 5 = 3.$$

Kun jäseneen lisätään tämä erotusluku, saadaan seuraava jäsen. Lasketaan kolme seuraavaa jäsentä:

$$a_3 = a_2 + d = 8 + 3 = 11$$

$$a_4 = a_3 + d = 11 + 3 = 14$$

$$a_5 = a_4 + d = 14 + 3 = 17$$

1.2

Ratkaistaan yhtälö:

$$5x + 4 = 3x + 12 \quad || - 4$$

$$5x = 3x + 12 - 4$$

$$5x = 3x + 8 \quad || - 3x$$

$$5x - 3x = 8$$

$$2x = 8 \quad || : 2$$

$$x = 4$$

1.3

Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä hypotenuusa x .

$$x^2 = 6^2 + 8^2$$

$$x^2 = 36 + 64$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \pm\sqrt{100}$$

$$x = \pm 10$$

Hypotenuusan pituus ei voi olla negatiivinen, joten $x = 10$.

1.4

Ratkaistaan yhtälö:

$$7^{2x+7} = 7$$

$$7^{2x+7} = 7^1$$

Molemmilla puolilla yhtälöä on potenssi, jossa kantalukuna on 7. Koska potenssit ovat yhtä suuria, myös eksponenttien on oltava yhtä suuria. Merkitään potenssit yhtä suuriksi ja ratkaistaan x .

$$2x + 7 = 1 \quad || - 7$$

$$2x = 1 - 7$$

$$2x = -6 \quad || : 2$$

$$x = -3$$

1.5

Valitaan alkeistapaukseksi kahden silmäluvun (järjestetyt) jonot. Koska kullekin silmäluvulle on 6 vaihtoehtoa, kaikkien alkeistapausten määrä on

$$6 \cdot 6 = 36.$$

Summaksi saadaan 8 seuraavilla silmälukujonoilla:

- 2 ja 6
- 3 ja 5
- 4 ja 4
- 5 ja 3
- 6 ja 2

Huomaa, että silmälukujen järjestyksellä on merkitystä, eli esimerkiksi 2 ja 6 on eri jono kuin 6 ja 2.

Suotuisia silmälukujonoja on 5, joten todennäköisyys saada summaksi kahdeksan on $\frac{5}{36}$, ja $n = 5$.

1.6

Sijoituksen arvo kasvaa vuosittain 4%, joten vuoden kuluttua sijoituksen arvo on $100\% + 4\% = 104\%$ tämänhetkisestä arvosta. Arvo siis 1,04-kertaistuu vuodessa. Kun aikaa kuluu n vuotta, sijoituksen arvo 1,04ⁿ-kertaistuu.

Kokeilemalla huomataan, että

$$1,04^{17} = 1,947 \dots$$

ja

$$1,04^{18} = 2,025 \dots$$

Siis sijoituksen arvo 1,947...-kertaistuu 17 vuodessa ja 2,025...-kertaistuu 18 vuodessa. Kaksinkertaistumiseen tarvitaan siis 18 vuotta.

1.7

Derivoidaan funktio $f(x) = 2x^2 + x$.

$$f'(x) = 2 \cdot 2x^{2-1} + 1 = 4x + 1$$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = 3$.

$$f'(3) = 4 \cdot 3 + 1 = 13$$

1.8

Normitettu arvo ilmoittaa, kuinka monen keskihajonnan päässä odotusarvosta havaintoarvo on. Lisäksi normitetun arvon etumerkistä nähdään, onko havaintoarvo suurempi vai pienempi kuin odotusarvo. Havaintoarvon 12 poikkeama odotusarvosta on $12 - 6$. Koska keskihajonta on 2, normitettu arvo on

$$\frac{12 - 6}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

2. Yhtälönratkaisu (12 p.)

1. Ratkaise yhtälö $(x + 1)(x + 4) = 4$. (4 p.)

2. Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ 2y = 1 - 4x. \end{cases}$$

(8 p.)

Ratkaisu.

1. Ratkaistaan yhtälö:

$$(x + 1)(x + 4) = 4 \quad \text{kerrotaan sulut auki}$$

$$x^2 + 1 \cdot x + x \cdot 4 + 4 = 4$$

$$x^2 + 5x + 4 = 4 \quad || - 4$$

$$x^2 + 5x = 0 \quad \text{1p (yht. 1p)}$$

Ratkaisuvaihtoehto 1

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa, $a = 1$, $b = 5$ ja $c = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} \quad \text{1p (yht. 2p)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$= \frac{-5 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{-5 + 5}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-5 - 5}{2}$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-10}{2}$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = -5 \quad \text{2p (yht. 4p)}$$

Vastaus: Yhtälön ratkaisu on $x = 0$ tai $x = -5$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Käytetään tulon nollasääntöä

$$x^2 + 5x = 0$$

$$x(x + 5) = 0 \quad \text{1p (yht. 2p)}$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x + 5 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = -5 \quad \text{2p (yht. 4p)}$$

Vastaus: Yhtälön ratkaisu on $x = 0$ tai $x = -5$.

2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Ratkaistaan alemmasta yhtälöstä muuttuja y :

$$2y = 1 - 4x \quad || : 2 \quad \text{1p (yht. 5p)}$$

$$y = \frac{1}{2} - 2x \quad \text{1p (yht. 6p)} \quad (1)$$

Sijoitetaan tämä ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja x :

$$2x + 4y = 8$$

$$2x + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - 2x \right) = 8 \quad \text{1p (yht. 7p)}$$

$$2x + 2 - 8x = 8 \quad \text{1p (yht. 8p)}$$

$$-6x + 2 = 8 \quad || - 2$$

$$-6x = 6 \quad \text{1p (yht. 9p)} \quad || : (-6)$$

$$x = -1 \quad \text{1p (yht. 10p)}$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (1) ja ratkaistaan muuttujan y arvo:

$$y = \frac{1}{2} - 2 \cdot (-1) \quad \text{1p (yht. 11p)}$$

$$y = \frac{1}{2} + 2$$

$$y = \frac{5}{2} \quad \text{1p (yht. 12p)}$$

Vastaus: Yhtälöparin ratkaisu on $x = -1$ ja $y = \frac{5}{2}$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Aloitetaan jakamalla ylempi yhtälö kahdella, jolloin saadaan termi $2y$:

$$2x + 4y = 8 \quad \parallel : 2 \quad \text{1p (yht. 5p)}$$

$$x + 2y = 4 \quad \text{1p (yht. 6p)} \quad \parallel - x$$

$$2y = 4 - x \quad \text{1p (yht. 7p)} \quad (2)$$

Sijoitetaan tämä alempaan yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja x :

$$2y = 1 - 4x$$

$$4 - x = 1 - 4x \quad \text{1p (yht. 8p)} \quad \parallel + x - 1$$

$$3 = -3x \quad \text{1p (yht. 9p)} \quad \parallel : (-3)$$

$$x = -1 \quad \text{1p (yht. 10p)}$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (2) ja ratkaistaan muuttujan y arvo:

$$2y = 4 - (-1) \quad \text{1p (yht. 11p)}$$

$$2y = 4 + 1 \quad \parallel : 2$$

$$y = \frac{5}{2} \quad \text{1p (yht. 12p)}$$

Vastaus: Yhtälöparin ratkaisu on $x = -1$ ja $y = \frac{5}{2}$.

Ratkaisuvaihtoehto 3

Aloitetaan kertomalla alempi yhtälö kahdella, jolloin saadaan termi $4y$:

$$\begin{aligned} 2y &= 1 - 4x & \parallel \cdot 2 & \text{1p (yht. 5p)} \\ 4y &= 2 - 8x & \text{1p (yht. 6p)} \end{aligned} \quad (3)$$

Sijoitetaan tämä ylemmään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja x :

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 8 \\ 2x + 2 - 8x &= 8 & \text{1p (yht. 7p)} \\ -6x + 2 &= 8 & \text{1p (yht. 8p)} & \parallel -2 \\ -6x &= 6 & \text{1p (yht. 9p)} & \parallel : (-6) \\ x &= -1 & \text{1p (yht. 10p)} \end{aligned}$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (3) ja ratkaistaan muuttujan y arvo:

$$\begin{aligned} 4y &= 2 - 8 \cdot (-1) & \text{1p (yht. 11p)} \\ 4y &= 2 + 8 \\ 4y &= 10 & \parallel : 4 \\ y &= \frac{10}{4} \\ y &= \frac{5}{2} & \text{1p (yht. 12p)} \end{aligned}$$

Vastaus: Yhtälöparin ratkaisu on $x = -1$ ja $y = \frac{5}{2}$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

3. Polttoaineen kulutus (12 p.)

Suomen Ilmavoimilla on ollut käytössään Hawk-harjoitushävittäjiä yli 40 vuoden ajan. Tässä tehtävässä mallinnetaan polttoaineen kulutusta, kun Hawk lentää normaalissa lentokorkeudessa 0,7-kertaisella äänen nopeudella.

1. Yksinkertaisessa mallissa polttoainetta arvioidaan kuluvan 8 litraa minuutissa. Kuinka kauan 760 litralla polttoainetta pystyy lentämään? (3 p.)
2. Todellisuudessa polttoaineen kulutus vähenee, kun lentokone kevenee. Paremmassa mallissa polttoaineen kulutusta mallinnetaan laskevan suoran avulla. Kulutus on 8,5 litraa minuutissa ajanhetkellä $t = 0$, ja 40 minuutin kuluttua 7,7 litraa minuutissa. Muodosta lauseke $f(t)$, joka kuvaa polttoaineen kulutusta ajan funktiona tässä mallissa. (6 p.)
3. Ratkaise yhtälö $f(t) = 8$ ja tulkitse vastaus sanallisesti. (3 p.)

Ratkaisu.

1. Polttoainetta kuluu 8 litraa minuutissa, joten 760 litralla pystyy lentämään

$$\frac{760 \text{ l}}{8 \frac{\text{l}}{\text{min}}} \quad \text{2p (yht. 2p)}$$
$$= 95 \text{ min.} \quad \text{1p (yht. 3p)}$$

Vastaus: 95 minuuttia

- 2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Polttoaineen kulutusta mallinnetaan suoran avulla, joten polttoaineen kulutusta kuvaava funktio $f(t)$ on muotoa $f(t) = k \cdot t + b$ 1p (yht. 4p), jossa k on suoran kulmakerroin ja b vakiotermi.

Polttoaineen kulutus ajanhetkellä $t = 0$ min on $8,5 \frac{\text{l}}{\text{min}}$, joten tästä saadaan:

$$f(0) = 8,5 \quad \text{1p (yht. 5p)}$$

$$k \cdot 0 + b = 8,5$$

$$b = 8,5 \quad \text{1p (yht. 6p)}$$

Polttoaineen kulutus ajanhetkellä $t = 40$ min on $7,7 \frac{\ell}{\text{min}}$, joten tästä saadaan:

$$f(40) = 7,7 \quad \text{1p (yht. 7p)}$$

$$k \cdot 40 + b = 7,7 \quad || b = 8,5$$

$$k \cdot 40 + 8,5 = 7,7 \quad || - 8,5$$

$$40k = 7,7 - 8,5$$

$$40k = -0,8 \quad || : 40$$

$$k = -0,02 \quad \text{1p (yht. 8p)}$$

Vastaus: Polttoaineen kulutusta kuvaava funktio on $f(t) = -0,02t + 8,5$. 1p (yht. 9p)

Ratkaisuvaihtoehto 2

Polttoaineen kulutusta mallinnetaan suoran avulla, joten polttoaineen kulutusta kuvaava funktio $f(t)$ on muotoa $f(t) = k \cdot t + b$ 1p (yht. 4p), jossa k on suoran kulmakerroin ja b vakiotermi. Tehtävänannon perusteella suora kulkee pisteiden $(0; 8,5)$ ja $(40; 7,7)$ kautta.

Lasketaan suoran kulmakerroin:

$$\begin{aligned} k &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{7,7 - 8,5}{40 - 0} \quad \text{1p (yht. 5p)} \\ &= -0,02 \quad \text{1p (yht. 6p)} \end{aligned}$$

Polttoaineen kulutus oli $8,5$ litraa minuutissa ajanhetkellä $t = 0$, joten $b = 8,5$. 2p (yht. 8p)

Vastaus: Polttoaineen kulutusta kuvaava funktio on $f(t) = -0,02t + 8,5$. 1p (yht. 9p)

3. Ratkaistaan yhtälö $f(t) = 8$:

$$f(t) = 8$$

$$-0,02t + 8,5 = 8 \quad \text{1p (yht. 10p)} \quad \parallel - 8,5$$

$$-0,02t = -0,5 \quad \parallel : (-0,02)$$

$$t = 25 \quad \text{1p (yht. 11p)}$$

Polttoaineen kulutus on siis 8 litraa minuutissa, kun lentoonlähdestä on kulunut 25 minuuttia. 1p (yht. 12p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

4. Epidemia (12 p.)

1. Terveystenhoitajan tehtävänä on erään oppilaitoksen opiskelijoiden rokottaminen. Oman arvionsa mukaan häneltä kuluisi siihen kuusi tuntia, mutta rokottamisen nopeuttamiseksi hän ottaa mukaan harjoittelijan, joka pystyisi rokottamaan kaikki opiskelijat kahdeksassa tunnissa. Kuinka kauan kaikkien opiskelijoiden rokottamiseen kuluu aikaa, kun molemmat rokottajat työskentelevät yhtä aikaa omis- sa rokotuspisteissään? (6 p.)
2. Toimittaja arvioi epidemian hiipumista saatuaan tiedon, että tartunnat vähenevät 2,5 % joka viikko. Helmikuun alussa tartuntoja on 920. Maaliskuun alkuun mennessä hän arvioi tartuntojen vähenevän 92:lla. Hän päätyy tähän arvioon seuraavalla laskutoimituksella:

$$4 \cdot 0,025 \cdot 920 = 92.$$

Laskelmansa perusteella toimittaja päättelee, että maaliskuun alussa tartuntoja on $920 - 92 = 828$. Mikä toimittajan tekemässä pikaisessa laskussa meni väärin? Korjaa päättely ja anna oikea arvio tartuntojen lukumäärästä maaliskuun alussa kokonaislukuna. (6 p.)

Ratkaisu.

1.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Jos terveydenhoitaja rokottaa kaikki opiskelijat 6 tunnissa, on hän x tunnin jälkeen rokottanut opiskelijoista osuuden $\frac{x}{6}$. 1p (yht. 1p)

Jos harjoittelija rokottaa kaikki opiskelijat 8 tunnissa, on hän x tunnin jälkeen rokottanut opiskelijoista osuuden $\frac{x}{8}$. 2p (yht. 3p)

Harjoittelija ja terveydenhoitaja ovat rokottaneet yhteensä x tunnin jälkeen opiskelijoista seuraavan osuuden:

$$\frac{x}{8} + \frac{x}{6}$$

Toisaalta harjoittelija ja terveydenhoitaja rokottavat x tunnissa kaikki opiskelijat eli osuuden $\frac{1}{1} = 1$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä kaikkien opiskelijoiden rokottamiseen kulunut aika x tunteina:

$$\frac{x}{8} + \frac{x}{6} = 1 \quad (2\text{p (yht. 5p)}) \quad || \cdot (8 \cdot 6)$$

$$6 \cdot x + 8 \cdot x = 6 \cdot 8$$

$$14x = 48 \quad || : 14$$

$$x = \frac{48}{14}$$

$$x = 3,4285 \dots$$

Annetaan vastaus tunteina ja minuutteina. Tällöin rokottamiseen kuluu 3 tuntia ja

$$0,4285 \dots \cdot 60 \text{ min} = 25,714 \dots \text{ min} \approx 26 \text{ min.} \quad (1\text{p (yht. 6p)})$$

Vastaus: Rokottamiseen kuluu noin 3 tuntia ja 26 minuuttia.

Myös vastaus 3,4 h hyväksytään.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Kun rokotettavien lukumäärä on n , hoitajan rokottamisnopeus on $\frac{n}{6}$ opiskelijaa tunnissa. 1p (yht. 1p)

Harjoittelijan rokottamisnopeus on $\frac{n}{8}$ opiskelijaa tunnissa. 2p (yht. 3p)

Kun molemmat rokottavat, rokotusnopeus on $v = \frac{n}{6} + \frac{n}{8}$ opiskelijaa tunnissa.

Rokotusnopeus v on rokotettujen opiskelijoiden lukumäärä n jaettuna kuluneella ajalla t . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan aika t .

$$v = \frac{n}{t} \quad || \cdot t$$

$$vt = n \quad || : v$$

$$t = \frac{n}{v} \quad (1\text{p (yht. 4p)})$$

Siis rokottamiseen kuluva aika on rokotettujen opiskelijoiden lukumäärä jaettuna rokotusnopeudella. Lasketaan tämä aika.

$$t = \frac{n}{v} \quad || v = \frac{n}{6} + \frac{n}{8}$$

$$t = \frac{n}{\frac{n}{6} + \frac{n}{8}} \quad \text{1p (yht. 5p)} \quad \text{Lavennetaan nimittäjässä}$$

$$t = \frac{n}{\frac{8n}{8 \cdot 6} + \frac{6n}{6 \cdot 8}}$$

$$t = \frac{n}{\frac{8n}{48} + \frac{6n}{48}}$$

$$t = \frac{n}{\frac{8n+6n}{48}}$$

$$t = \frac{n}{\frac{14n}{48}}$$

$$t = n \cdot \frac{48}{14n}$$

$$t = \frac{48}{14}$$

$$t = 3,4285 \dots$$

Annetaan vastaus tunteina ja minuutteina. Tällöin rokottamiseen kuluu 3 tuntia ja

$$0,4285 \dots \cdot 60 \text{ min} = 25,714 \dots \text{ min} \approx 26 \text{ min.} \quad \text{1p (yht. 6p)}$$

Vastaus: Rokottamiseen kuluu noin 3 tuntia ja 26 minuuttia.

2. Toimittaja on laskenut 2,5 % alkuarvosta eli luvusta 920, vaikka prosenttiosuus pitäisi laskea jokaisen viikon arvosta erikseen, koska tartunnat vähenivät 2,5 % joka viikko. 2p (yht. 8p)

Tartuntojen määrä laskee 2,5 % joka viikko eli tartuntojen määrä on joka viikko

$$100 \% - 2,5 \% = 97,5 \%$$

edellisviikon määrästä. 2p (yht. 10p) Tartuntojen määrä siis 0,975-kertaistuu joka viikko, jolloin neljässä viikossa tartuntojen määrä on 0,975⁴-kertaistunut.

Maaliskuun alussa tartuntoja on siis

$$920 \cdot 0,975^4$$

1p (yht. 11p)

$$= 831,392 \dots$$

$$\approx 831.$$

1p (yht. 12p)

Tartuntojen määrän pyöristys myös lukuun 830 hyväksytään.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

5. Suomen sähkönkulutus (12 p.)

Aineisto:

5. A [Taulukko: Kotimainen sähköntuotanto](#)
5. B [Taulukko: Tuontisähkö](#)

Suomen sähkönkulutus 12. helmikuuta 2021 lounasaikaan oli noin 13 410 megawattia (MW). Kotimaisen sähköntuotannon jakautuminen on esitetty taulukossa [5.A](#) ja tuontisähkön alkuperä taulukossa [5.B](#).

1. Kuinka monta prosenttia kulutetusta sähköstä tulee kotimaisesta sähköntuotannosta ja kuinka monta prosenttia on tuontisähköä? (4 p.)
2. Ydinvoima, vesivoima, tuulivoima ja aurinkoenergia eivät aiheuta hiilidioksidipäästöjä. Laske näiden yhteinen osuus kotimaisesta sähköntuotannosta. (4 p.)
3. Oletetaan, että 35 prosenttia Ruotsista tuodusta sähköstä tuotetaan vesivoimalla. Kuinka monta prosenttia Suomessa kulutettavasta sähköstä on alkuperältään ruotsalaista vesivoimaa? (4 p.)

Anna kaikki vastaukset kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

Ratkaisu.

1. Suomalaiset kuluttivat sähköä 13 410 MW ja taulukon 5.A mukaan kotimainen sähköntuotanto oli yhteensä 10 510 MW. Jaetaan kotimainen sähköntuotanto kulutetulla sähköllä:

$$\frac{10\,510\text{ MW}}{13\,410\text{ MW}} \quad \text{1p (yht. 1p)}$$
$$= 0,78374 \dots = 78,374 \dots \% \approx 78 \% \quad \text{1p (yht. 2p)}$$

Kulutetusta sähköstä noin 78 % tuli kotimaisesta sähköntuotannosta.

Taulukon 5.A mukaan tuontisähkö oli yhteensä:

$$(1\,800 + 1\,000 + 100)\text{ MW} = 2\,900\text{ MW}. \quad \text{1p (yht. 3p)}$$

Jaetaan tuontisähkö kulutetulla sähköllä:

$$\frac{2\,900\text{ MW}}{13\,410\text{ MW}} = 0,21625 \dots = 21,625 \dots \% \approx 22 \% \quad \text{1p (yht. 4p)}$$

Tuontisähkön osuus oli siis noin 22 %.

Vastaus: Kotimaisen sähköntuotannon osuus oli 78 % ja tuontisähkön 22 %.

2. Taulukon 5.A mukaan kotimaista sähköä tuotettiin 10 510 MW:n teholla.

Lasketaan yhteen ydinvoiman, vesivoiman, tuulivoiman ja aurinkoenergian tehot:

$$(2\,800 + 2\,200 + 800 + 50) \text{ MW} \quad 1\text{p (yht. 5p)}$$
$$= 5\,850 \text{ MW} \quad 1\text{p (yht. 6p)}$$

Jaetaan ydinvoiman, vesivoiman, tuulivoiman ja aurinkoenergian yhteenlaskettu teho kotimaisen sähköntuotannon teholla:

$$\frac{5\,850 \text{ MW}}{10\,510 \text{ MW}} \quad 1\text{p (yht. 7p)}$$
$$= 0,55661\dots = 55,661\dots \% \approx 56 \% \quad 1\text{p (yht. 8p)}$$

Vastaus: Ydinvoiman, vesivoiman, tuulivoiman ja aurinkoenergian osuus kotimaisesta sähköntuotannosta oli 56 %.

3. Ruotsista tuodusta sähköstä (1 800 MW) 35 % tuotettiin vesivoimalla, joten ruotsalaisella vesivoimalla tuotetun sähkön teho oli:

$$1\,800 \text{ MW} \cdot 0,35 \quad 1\text{p (yht. 9p)}$$
$$= 630 \text{ MW} \quad 1\text{p (yht. 10p)}$$

Suomessa kulutettiin sähköä 13 410 MW:n teholla.

Jaetaan ruotsalaisella vesivoimalla tuotetun sähkön teho Suomessa kulutetulla sähköteholla:

$$\frac{630 \text{ MW}}{13\,410 \text{ MW}} \quad 1\text{p (yht. 11p)}$$
$$= 0,04697\dots = 4,697\dots \% \approx 4,7 \% \quad 1\text{p (yht. 12p)}$$

Vastaus: Suomessa kulutettavasta sähköstä 4,7 % oli alkuperältään ruotsalaista vesivoimaa.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

6. Pääoman karttuminen (12 p.)

Libanin säästötillillä on 2 200 euroa 31.12.2022. Tilin nettovuosikorko on 0,70 %. Shakirin säästötillillä on 2 000 euroa 31.12.2022. Hänen tilinsä nettovuosikorko on vuoden 2025 loppuun saakka 0,70 % ja sen jälkeen 1,26 %. Korko maksetaan vuosittain 31. joulukuuta.

1. Kuinka paljon Libanilla ja Shakirilla on rahaa tileillään 31.12.2025? Kuinka paljon enemmän korkotuottoa Liban on saanut kuin Shakir? (6 p.)
2. Liban ja Shakir eivät koske tileihinsä ennen kuin Shakirin pääoma on suurempi kuin Libanin pääoma. Minkä vuoden lopussa tämä tapahtuu? (6 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 1

1. Kun pääoma kasvaa korkoa 0,70%, uusi pääoma on $100\% + 0,7\% = 100,7\%$ vanhasta pääomasta. Pääoma tulee siis koron maksussa 1,007-kertaiseksi.

Päivästä 31.12.2022 päivään 31.12.2025 on 3 vuotta, joten pääoma tulee $1,007^3$ -kertaiseksi.

Libanilla on kolmen vuoden kuluttua

$$2200 \text{ €} \cdot 1,007^3 \quad \text{1p (yht. 1p)}$$

$$= 2246,524 \dots \text{ €} \approx 2246,52 \text{ €}. \quad \text{1p (yht. 2p)}$$

Shakirilla on kolmen vuoden kuluttua

$$2000 \text{ €} \cdot 1,007^3 \quad \text{1p (yht. 3p)}$$

$$= 2042,294 \dots \text{ €} \approx 2042,29 \text{ €}. \quad \text{1p (yht. 4p)}$$

Liban sai korkotuottoa $2246,52 \text{ €} - 2200 \text{ €} = 46,52 \text{ €}$.

Shakir sai korkotuottoa $2042,29 \text{ €} - 2000 \text{ €} = 42,29 \text{ €}$. 1p (yht. 5p)

Liban sai korkotuottoa $46,52 \text{ €} - 42,29 \text{ €} = 4,23 \text{ €}$ enemmän kuin Shakir. 1p (yht. 6p)

Vastaus: 31.12.2025 Libanilla on tilillään rahaa 2246,52 € ja Shakirilla 2042,29 €. Liban sai korkotuottoa 4,23 € enemmän kuin Shakir.

2. 31.12.2025 Libanin pääoma on suurempi kuin Shakirin pääoma. Tästä hetkestä eteenpäin Libanin tilin nettovuosikorko on edelleen 0,70%, mutta Shakirin tilin nettovuosikorko on 1,26%. 1p (yht. 7p)

Shakirin pääoma tulee joka vuosi 1,0126-kertaiseksi ja n :ssä vuodessa 1,0126 n -kertaiseksi.

n vuoden kuluttua päivästä 31.12.2025 Libanin tilillä on

$$2246,52 \cdot 1,007^n$$

euroa 1p (yht. 8p) ja Shakirin tilillä

$$2042,29 \cdot 1,0126^n$$

euroa. 1p (yht. 9p)

Shakirin pääoma on suurempi kuin Libanin, kun seuraava epäyhtälö on tosi:

$$2042,29 \cdot 1,0126^n > 2246,52 \cdot 1,007^n \quad \text{1p (yht. 10p)}$$

Epäyhtälön ratkaisuksi saadaan laskinohjelmalla $n > 17,186 \dots$ 1p (yht. 11p), joten Shakirin pääoma on suurempi kuin Libanin 18 vuoden kuluttua vuoden 2025 lopusta eli vuoden 2043 lopussa. 1p (yht. 12p)

Ratkaisussa voidaan käyttää epäyhtälön sijaan vastaavaa yhtälöä

$$2042,29 \cdot 1,0126^n = 2246,52 \cdot 1,007^n.$$

Vastaus: vuoden 2043 lopussa

Ratkaisuvaihtoehto 2

1. Kun pääoma kasvaa korkoa 0,70%, uusi pääoma on $100\% + 0,7\% = 100,7\%$ vanhasta pääomasta. Pääoma tulee siis koron maksussa 1,007-kertaiseksi.

Lasketaan Libanin ja Shakirin pääomia kunkin vuoden lopussa taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B	C	D	E	F	G	
1								
2								
3		vuosi	Liban	Shakir				
4		2022	2200.00	2000.00				
5		2023	2215.40	2014.00	=1,007*D4	Korkotuotot vuoteen 2025		
6		2024	2230.91	2028.10	=1,007*D5	Liban	Shakir	
7		2025	2246.52	2042.29	=1,007*D6	46.52	42.29	
8		2026	2262.25	2068.03	=1,0126*D7	erotus		
9		2027	2278.09	2094.08	=1,0126*D8	4.23		
10		2028	2294.03	2120.47	=1,0126*D9			
11		2029	2310.09	2147.19	=1,0126*D10			
12		2030	2326.26	2174.24	=1,0126*D11			
13		2031	2342.54	2201.64	=1,0126*D12			
14		2032	2358.94	2229.38	=1,0126*D13			
15		2033	2375.46	2257.47	=1,0126*D14			
16		2034	2392.08	2285.91	=1,0126*D15			
17		2035	2408.83	2314.72	=1,0126*D16			
18		2036	2425.69	2343.88	=1,0126*D17			
19		2037	2442.67	2373.41	=1,0126*D18			
20		2038	2459.77	2403.32	=1,0126*D19			
21		2039	2476.99	2433.60	=1,0126*D20			
22		2040	2494.33	2464.26	=1,0126*D21			
23		2041	2511.79	2495.31	=1,0126*D22			
24		2042	2529.37	2526.75	=1,0126*D23			
25		2043	2547.07	2558.59	=1,0126*D24			
26		2044	2564.90	2590.83	=1,0126*D25			

Taulukosta nähdään, että kolmen vuoden kuluttua Libanilla on 2246,52 € ja Shakirilla 2042,29 €.

Taulukosta nähdään, että Liban sai korkotuottoa 4,23 € enemmän kuin Shakir.

Vastaus: 31.12.2025 Libanilla on tilillään rahaa 2246,52 € ja Shakirilla 2042,29 €. Liban sai korkotuottoa 4,23 € enemmän kuin Shakir.

Pisteytyksestä:

- Libanin tilillä vuosien 2023–2025 lopussa olevat pääomat laskettu 2p (yht. 2p)
- Shakirin tilillä vuosien 2023–2025 lopussa olevat pääomat laskettu 2p (yht. 4p)
- Molempien korkotuotot laskettu 1p (yht. 5p)

- Korkotuottojen ero laskettu 1p (yht. 6p)

2. 31.12.2025 Libanin pääoma on suurempi kuin Shakirin pääoma. Tästä hetkestä eteenpäin Libanin tilin nettovuosikorko on edelleen 0,70%, mutta Shakirin tilin nettovuosikorko on 1,26%. Tämä on huomioitu edellä tehdyssä taulukossa.

Edellä tehdystä taulukosta nähdään, että ensimmäinen vuosi, jonka lopussa Shakirin pääoma on suurempi kuin Libanin, on vuosi 2043.

Vastaus: vuoden 2043 lopussa

Pisteytyksestä:

- Sanottu, mitkä korkoprosentit ovat vuoden 2025 lopusta eteenpäin 1p (yht. 7p)
- Libanin tilillä vuosien 2026–2043 lopussa olevat pääomat laskettu 2p (yht. 9p)
- Shakirin tilillä vuosien 2026–2043 lopussa olevat pääomat laskettu 2p (yht. 11p)
- Vastaus 1p (yht. 12p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

7. Palloja laatikossa (12 p.)

Laatikossa on seitsemän punaista palloa ja lisäksi mustia palloja. Kun laatikosta poimitaan umpimähkään kaksi palloa yhtä aikaa, niin molemmat ovat punaisia todennäköisyydellä $\frac{1}{10}$. Kuinka monta palloa laatikossa on?

Ratkaisuvaihtoehto 1

Ajatellaan, että pallot nostetaan peräkkäin yksi kerrallaan ilman, että ensimmäistä palloa laitetaan takaisin laatikkoon ennen kuin toinen nostetaan. Tämä on käytännössä sama kuin jos pallot nostettaisiin samaan aikaan, mutta ratkaisussa voidaan nyt puhua ensimmäisestä ja toisesta pallosta.

Merkitään laatikossa olevien pallojen kokonaismäärää kirjaimella n 1p (yht. 1p). Todennäköisyys sille, että ensimmäinen nostettava pallo on punainen, on $\frac{7}{n}$ 1p (yht. 2p).

Kun laatikosta on otettu yksi pallo, palloja on vielä laatikossa $n-1$ kappaletta. 1p (yht. 3p)
 Jos ensimmäinen pallo oli punainen, punaisia palloja on laatikossa $7-1=6$ 1p (yht. 4p),
 ja toinen pallo on punainen todennäköisyydellä $\frac{6}{n-1}$ 2p (yht. 6p).

Kertolaskusäännön mukaan todennäköisyys sille, että molemmat pallot ovat punaisia, on

$$\frac{7}{n} \cdot \frac{6}{n-1} \quad \text{1p (yht. 7p)}$$

Toisaalta tämä todennäköisyys on tehtävänannon mukaan $\frac{1}{10}$. Saadaan seuraava yhtälö:

$$\frac{7}{n} \cdot \frac{6}{n-1} = \frac{1}{10} \quad \text{2p (yht. 9p)}$$

Yhtälön ratkaisuksi saadaan laskinohjelmalla $n = -20$ tai $n = 21$. 2p (yht. 11p) Yhtälö voidaan ratkaista myös toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

Vain positiivinen pallojen määrä on mahdollinen, joten pallojen määrä on $n = 21$ 1p (yht. 12p).

Vastaus: 21 palloa

Ratkaisuvaihtoehto 2

Merkitään laatikossa olevien pallojen kokonaismäärää kirjaimella n . 1p (yht. 1p) Käytetään alkeistapausina kahden pallon joukkoja, jolloin kaikkien alkeistapausten määrä on $\binom{n}{2}$. 2p (yht. 3p)

Suotuisia alkeistapausia ovat ne kahden pallon joukot, joissa molemmat pallot ovat punaisia. Koska punaisia palloja on 7, suotuisten alkeistapausten määrä on $\binom{7}{2}$. 2p (yht. 5p)

Binomikerroin $\binom{7}{2}$ kirjoitetaan monissa laskinohjelmissa $nCr(7,2)$ ja vastaavasti $\binom{n}{2}$ kirjoitetaan $nCr(n,2)$.

Todennäköisyyksi sille, että molemmat pallot ovat punaisia, on

$$\frac{\binom{7}{2}}{\binom{n}{2}}. \quad \text{2p (yht. 7p)}$$

Toisaalta tämä todennäköisyys on tehtävänannon mukaan $\frac{1}{10}$. Saadaan seuraava yhtälö:

$$\frac{\binom{7}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{1}{10} \quad \text{2p (yht. 9p)}$$

Yhtälön ratkaisuksi saadaan laskinohjelmalla $n = -20$ tai $n = 21$. 2p (yht. 11p)

Vain positiivinen pallojen määrä on mahdollinen, joten pallojen määrä on $n = 21$.

1p (yht. 12p)

Vastaus: 21 palloa

Ratkaisuvaihtoehto 3

Ajatellaan, että pallot nostetaan peräkkäin yksi kerrallaan ilman, että ensimmäistä palloa laitetaan takaisin laatikkoon ennen kuin toinen nostetaan. Tämä on käytännössä sama kuin jos pallot nostettaisiin samaan aikaan, mutta ratkaisussa voidaan nyt puhua ensimmäisestä ja toisesta pallosta.

Merkitään laatikossa olevien mustien pallojen määrää kirjaimella n . Pallojen kokonaismäärä on $n + 7$. 1p (yht. 1p) Todennäköisyyksi sille, että ensimmäinen nostettava pallo on punainen, on $\frac{7}{n+7}$. 1p (yht. 2p)

Kun laatikosta on otettu punainen pallo, punaisia palloja on vielä laatikossa $7 - 1 = 6$ kappaletta 1p (yht. 3p) ja kaikkia palloja on vielä laatikossa $n + 6$ kappaletta. 1p (yht. 4p)
 Jos ensimmäinen pallo oli punainen, toinen pallo on punainen todennäköisyydellä $\frac{6}{n+6}$. 1p (yht. 5p)

Kertolaskusäännön mukaan todennäköisyys sille, että molemmat pallot ovat punaisia, on

$$\frac{7}{n+7} \cdot \frac{6}{n+6} \quad \text{1p (yht. 6p)}$$

Toisaalta tämä todennäköisyys on tehtävänannon mukaan $\frac{1}{10}$. Saadaan seuraava yhtälö:

$$\frac{7}{n+7} \cdot \frac{6}{n+6} = \frac{1}{10} \quad \text{2p (yht. 8p)}$$

Yhtälön ratkaisuksi saadaan laskinohjelmalla $n = -27$ tai $n = 14$. 2p (yht. 10p) Yhtälö voidaan ratkaista myös toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

Vain positiivinen pallojen määrä on mahdollinen, joten mustien pallojen määrä on $n = 14$ 1p (yht. 11p) ja kaikkien pallojen määrä on

$$n + 7 = 14 + 7 = 21. \quad \text{1p (yht. 12p)}$$

Vastaus: 21 palloa

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

8. Pandemiarajoitus (12 p.)

Koronaviruspandemian aikana keväällä 2021 viranomaiset rajoittivat kuntosalien toimintaa vähentääkseen virusaltistusten riskiä. Kuntosalilla sai olla samaan aikaan korkeintaan 10 asiakasta. Haukkalan kuntosali on avoinna joka päivä klo 8–22. Siellä asiakasmäärän rajoitus toteutettiin niin, että harjoitusvuorot olivat tunnin pituisia ja aukioloaikana puolen tunnin välein vaihtui viisi asiakasta.

Ensimmäiset viisi kävijää tulivat kuntosalille klo 8.00 ja seuraavat viisi klo 8.30. Klo 8.00 kuntosalille tulleet kävijät poistuivat salilta klo 9.00, jolloin uudet viisi tulivat kuntosalille. Näin jatkettiin koko päivän ajan. Viimeisenä kuntosalille klo 21.00 tulleet viisi kävijää poistuivat salilta klo 22.00, jolloin kuntosali suljettiin.

Puolen tunnin välein tapahtuneet vaihdot toteutettiin niin, että tulevat ja lähtevät asiakkaat eivät kohdanneet toisiaan.

1. Kuinka monen kuntosalikävijän oli mahdollista harjoitella Haukkalan kuntosalilla yhden päivän aikana? (4 p.)
2. Olisiko jollakin toisella järjestelyllä ollut mahdollista, että salilla olisi päivän aikana harjoitellut tätä useampi asiakas siten, että olisi kuitenkin noudatettu viranomaisen antamaa rajoitusta? (4 p.)
3. Eräänä päivänä klo 12.00 alkaneella vuorolla salilla harjoitteli henkilö, jolla oli koronavirustartunta. Kuinka monta muuta kävijää hän altisti tartunnalle, kun tuon päivän aikana kaikille tunnin vuoroille tuli viisi uutta asiakasta? (4 p.)

Ratkaisu.

1. Uusien asiakkaiden tuloajat olivat 8.00, 8.30, 9.00, 9.30, ... ja 21.00. Tasatunnein alkoi siis $21 - 8 + 1 = 14$ salivuoroa 1p (yht. 1p) ja tasatuntien puolivälissä $20 - 8 + 1 = 13$ 1p (yht. 2p).

Enimmillään 5 asiakkaan salivuoroja oli yhteensä $14 + 13 = 27$ kappaletta päivässä 1p (yht. 3p), joten asiakkaita saattoi harjoitella päivässä korkeintaan $27 \cdot 5 = 135$ 1p (yht. 4p).

Vastaus: 135 asiakasta

2. Jos 10 asiakasta saapuu salille kello 8.00, 9.00, 10.00, ... ja jokainen harjoittelee täsmälleen tunnin, on salilla joka hetki 10 asiakasta. 1p (yht. 5p) Tällöin 10 asiakkaan salivuoroja on $21 - 8 + 1 = 14$ kappaletta 1p (yht. 6p) ja asiakkaita on yhteensä

$$14 \cdot 10 = 140. \quad \text{1p (yht. 7p)}$$

Olisi myös mahdollista lyhentää salivuoron pituutta esimerkiksi puoleen tuntiin, jolloin vielä suurempi määrä asiakkaita voisi harjoitella päivän aikana.

Vastaus: Olisi mahdollista. 1p (yht. 8p)

3. Kello 12.00 salille tullut henkilö altisti ne 5 salilla kävijää, jotka tulivat salille kello 11.30 ja olivat siellä vielä kello 12.00 1p (yht. 9p).

Hän altisti myös ne 4 salilla kävijää, jotka tulivat salille hänen kanssaan samaan aikaan kello 12.00.

Hän altisti myös ne 5 salilla kävijää, jotka tulivat salille kello 12.30, kun koronavirusta kantava henkilö vielä oli salilla. 1p (yht. 10p)

Altistuneita kävijöitä on

$$5 + 4 + 5 \quad \text{1p (yht. 11p)}$$

$$= 14. \quad \text{1p (yht. 12p)}$$

Vastaus: 14 kävijää

9. Suomalaisen miesten ja naisten pituudet (12 p.)

Suomalaisten naisten keskipituus on 167,5 cm ja pituuden keskihajonta 5,40 cm. Suomalaisen miesten keskipituus on 181,0 cm ja pituuden keskihajonta 6,06 cm. Oletetaan suomalaisten miesten ja naisten pituudet normaalijakautuneiksi.

1. Laske todennäköisyys, että kun valitaan satunnaisesti yksi suomalainen mies ja yksi suomalainen nainen, niin molemmat ovat lyhyempiä kuin 160 cm. (6 p.)
2. Annelin pituus on 171 cm. Hän laskee todennäköisyyden, että satunnaisesti valittu suomalainen nainen on häntä itseään pidempi mutta ei kuitenkaan enempää kuin x cm, ja saa tulokseksi 0,1. Mikä on Annelin käyttämä luku x ? (6 p.)

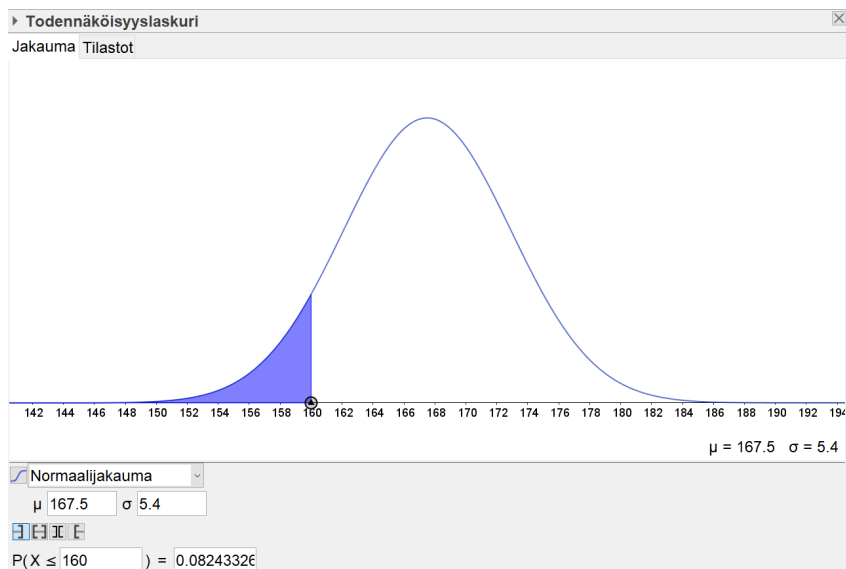
Ratkaisu.

1.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Ratkaistaan tehtävä GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.

Lasketaan ensin todennäköisyys, että satunnaisesti valittu nainen on alle 160 cm:

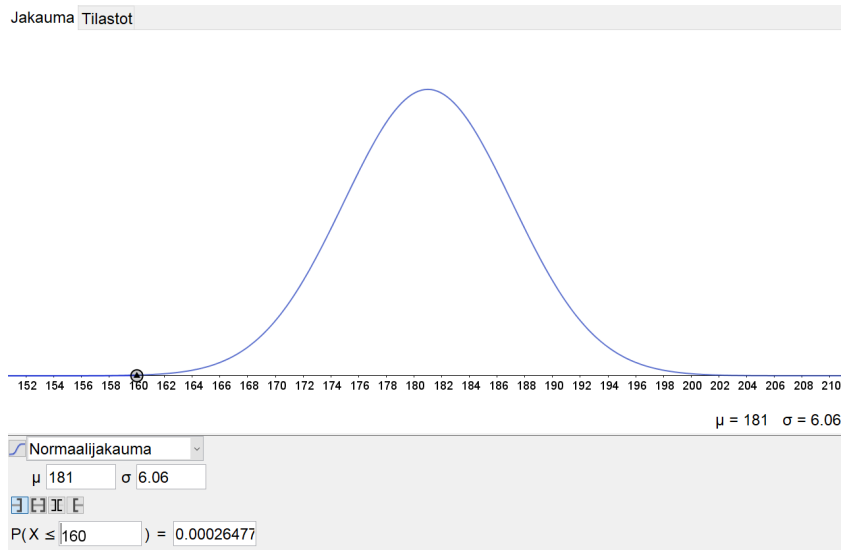


Todennäköisyys, että satunnaisesti valittu nainen on alle 160 cm, on:

$$P(\text{nainen alle 160 cm}) = 0,08243326 \dots$$

2p (yht. 2p)

Lasketaan vastaavasti todennäköisyys, että satunnaisesti valittu mies on alle 160 cm:



Todennäköisyys, että satunnaisesti valittu mies on alle 160 cm, on:

$$P(\text{mies alle 160 cm}) = 0,00026477 \dots$$

2p (yht. 4p)

Lasketaan kysytty todennäköisyys:

$$P(\text{mies alle 160 cm ja nainen alle 160 cm}) = P(\text{mies alle 160 cm}) \cdot P(\text{nainen alle 160 cm})$$

$$= 0,00026477 \dots \cdot 0,08243326 \dots$$

1p (yht. 5p)

$$= 2,18262 \dots \cdot 10^{-5}$$

$$\approx 2,2 \cdot 10^{-5}$$

1p (yht. 6p)

Vastaus: Todennäköisyys, että satunnaisesti valittu nainen ja satunnaisesti valittu mies ovat molemmat alle 160 cm, on $2,2 \cdot 10^{-5}$ (= 0,000022).

Ratkaisuvaihtoehto 2

Ratkaistaan tehtävä TI-Nspirellä.

Suomalaisten naisten pituus noudattaa normaalijakaumaa parametrein $\mu = 167,5$ ja $\sigma = 5,40$. Lasketaan TI-Nspirellä todennäköisyys, että satunnaisesti valittu nainen on lyhyempi kuin 160 cm:

$$\begin{aligned} P(\text{nainen alle 160 cm}) &= \text{normCdf}(-\text{infinity}, 160, 167.5, 5.40) \\ &= 0,082433 \dots \quad \text{2p (yht. 2p)} \end{aligned}$$

Suomalaisten miesten pituus noudattaa normaalijakaumaa parametrein $\mu = 181$ ja $\sigma = 6,06$. Lasketaan TI-Nspirellä todennäköisyys, että satunnaisesti valittu mies on lyhyempi kuin 160 cm:

$$\begin{aligned} P(\text{mies alle 160 cm}) &= \text{normCdf}(-\text{infinity}, 160, 181, 6.06) \\ &= 0,00026482 \dots \quad \text{2p (yht. 4p)} \end{aligned}$$

Lasketaan kysytty todennäköisyys:

$$\begin{aligned} P(\text{mies alle 160 cm ja nainen alle 160 cm}) &= P(\text{mies alle 160 cm}) \cdot P(\text{nainen alle 160 cm}) \\ &= 0,00026482 \dots \cdot 0,082433 \dots \quad \text{1p (yht. 5p)} \\ &= 2,18300 \dots \cdot 10^{-5} \\ &\approx 2,2 \cdot 10^{-5} \quad \text{1p (yht. 6p)} \end{aligned}$$

Vastaus: Todennäköisyys, että satunnaisesti valittu nainen ja satunnaisesti valittu mies ovat molemmat alle 160 cm, on $2,2 \cdot 10^{-5}$ ($= 0,000022$).

Ratkaisuvaihtoehto 3

Käytetään normaalijakaumataulukkoa, jolloin arvot täytyy normittaa alla olevan kaavan avulla:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Yllä olevassa kaavassa μ on odotusarvo (eli keskiarvo) ja σ on keskihajonta. Normittettu arvo z ilmoittaa, kuinka monen keskihajonnan päässä odotusarvosta muutujan arvo x on.

Lasketaan ensin todennäköisyys, että satunnaisesti valittu nainen on alle 160 cm. Normitetaan arvo 160 cm:

$$\frac{160 \text{ cm} - 167,5 \text{ cm}}{5,40 \text{ cm}} = -1,38888... \approx -1,39 \quad \text{1p (yht. 1p)}$$

Todennäköisyys, että satunnaisesti valittu nainen on alle 160 cm:

$$\begin{aligned} P(\text{nainen alle 160 cm}) &= \Phi(-1,39) \\ &= 1 - \Phi(1,39) \quad ||\text{taulukosta : } \Phi(1,39) = 0,9162 \\ &= 1 - 0,9162 \\ &= 0,0838 \quad \text{1p (yht. 2p)} \end{aligned}$$

Lasketaan sitten todennäköisyys, että satunnaisesti valittu mies on alle 160 cm. Normitetaan arvo 160 cm:

$$\frac{160 \text{ cm} - 181 \text{ cm}}{6,06 \text{ cm}} = -3,4653... \approx -3,47 \quad \text{1p (yht. 3p)}$$

Todennäköisyys, että satunnaisesti valittu mies on alle 160 cm:

$$\begin{aligned} P(\text{mies alle 160 cm}) &= \Phi(-3,47) \\ &= 1 - \Phi(3,47) \quad ||\text{taulukosta : } \Phi(3,47) = 0,9997 \\ &= 1 - 0,9997 \\ &= 0,0003 \quad \text{1p (yht. 4p)} \end{aligned}$$

Lasketaan kysytty todennäköisyys:

$$\begin{aligned}
 P(\text{mies alle 160 cm ja nainen alle 160 cm}) &= P(\text{mies alle 160 cm}) \cdot P(\text{nainen alle 160 cm}) \\
 &= 0,0003 \cdot 0,0838 \quad \text{1p (yht. 5p)} \\
 &= 2,514 \dots \cdot 10^{-5} \\
 &\approx 2,5 \cdot 10^{-5} \quad \text{1p (yht. 6p)}
 \end{aligned}$$

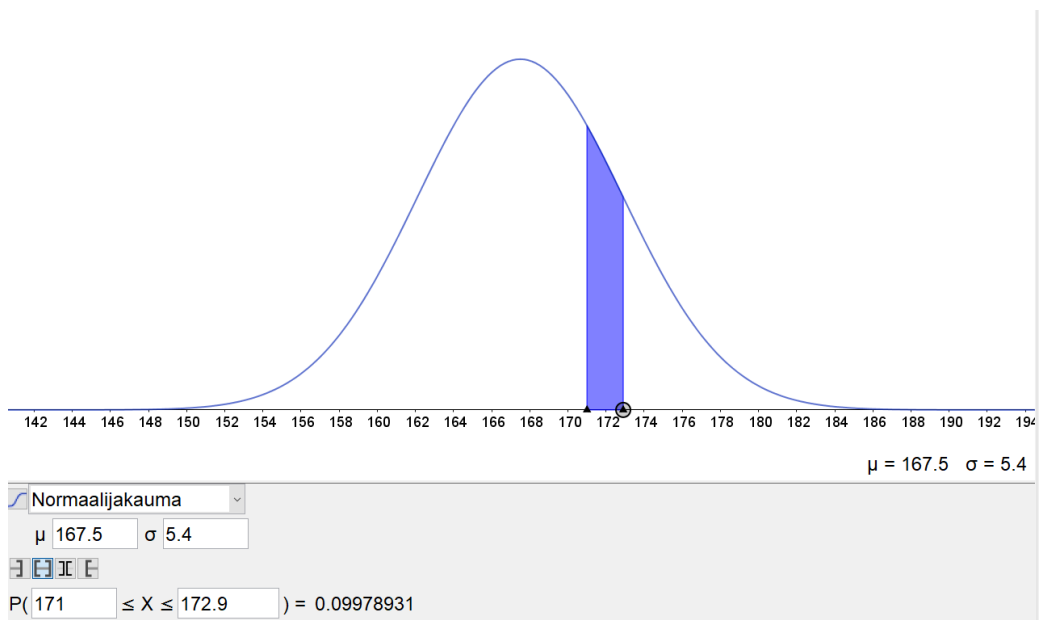
Vastaus: Todennäköisyys, että satunnaisesti valittu nainen ja satunnaisesti valittu mies ovat molemmat alle 160 cm, on $2,5 \cdot 10^{-5}$.

2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Ratkaistaan tehtävä GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.

Kokeilemalla saadaan, että pituuden tulee olla pienempi kuin 172,9 cm. 4p (yht. 10p):



Tällöin Annelin käyttämä luku x on:

$$x = 172,9 \text{ cm} - 171 \text{ cm} = 1,9 \text{ cm} \quad \text{2p (yht. 12p)}$$

Vastaus: Annelin käyttämä luku on $x = 1,9$ cm.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Ratkaistaan tehtävä TI-Nspirellä.

Merkitään satunnaismuuttujalla X naisen pituutta. Todennäköisyys, että satunnaisesti valittu nainen oli pidempi kuin 171 cm, mutta lyhyempi kuin $(171+x)$ cm, oli 0,10, joten:

$$P(171 < X < 171 + x) = 0,10$$

Lasketaan laskinohjelmalla todennäköisyys, että satunnaisesti valittu nainen on lyhyempi kuin 171 cm:

$$\begin{aligned} P(X < 171) &= \text{normCdf}(-\text{infinity}, 171, 167.5, 5.40) \\ &= 0,741555 \dots \end{aligned}$$

1p (yht. 7p)

Todennäköisyys, että satunnaisesti valittu nainen on lyhyempi kuin $(171+x)$ cm on:

$$P(X < 171 + x) = \text{normCdf}(-\text{infinity}, 171 + x, 167.5, 5.40)$$

Todennäköisyys, että satunnaisesti valittu nainen on pidempi kuin 171 cm, mutta lyhyempi kuin $(171+x)$ cm, saadaan vähentämällä todennäköisyys $P(X < 171)$ todennäköisyydestä $P(X < 171+x)$. Toisaalta tämän todennäköisyyden piti olla 0,10, joten:

$$P(171 < X < 171 + x) = 0,10$$

1p (yht. 8p)

$$P(X < 171 + x) - P(X < 171) = 0,10$$

2p (yht. 10p)

Ratkaistaan yhtälöstä x laskinohjelmalla:

<code>normCdf(-∞,171,167.5,5.4)</code>	0.7415555
<code>solve(normCdf(-∞,171+x,167.5,5.4)-0.74155549954137=0.1,x)</code>	$x=1.904706$

Laskinohjelmalla saadaan ratkaisu:

$$x = 1,90470 \dots$$

$$x \approx 1,9 \quad \text{2p (yht. 12p)}$$

Vastaus: Annelin käyttämä luku on $x = 1,9$ cm.

Ratkaisuvaihtoehto 3

Ratkaistaan tehtävä käyttämällä normaalijakaumataulukkoa.

Merkitään satunnaismuuttujalla X naisen pituutta. Todennäköisyys, että satunnaisesti valittu nainen oli pidempi kuin 171 cm, mutta lyhyempi kuin $(171+x)$ cm, oli 0,10, joten:

$$P(171 < X \leq 171 + x) = 0,10$$

$$P\left(\frac{171 - 167,5}{5,40} < X \leq \frac{171 + x - 167,5}{5,40}\right) = 0,10 \quad \text{1p (yht. 7p)}$$

$$P\left(0,64814 \dots < X \leq \frac{3,5 + x}{5,40}\right) = 0,10$$

$$\Phi\left(\frac{3,5 + x}{5,40}\right) - \Phi(0,65) = 0,10 \quad || \text{taulukosta : } \Phi(0,65) = 0,7422$$

$$\Phi\left(\frac{3,5 + x}{5,40}\right) - 0,7422 = 0,10 \quad || + 0,7422 \quad \text{1p (yht. 8p)}$$

$$\Phi\left(\frac{3,5 + x}{5,40}\right) = 0,10 + 0,7422$$

$$\Phi\left(\frac{3,5 + x}{5,40}\right) = 0,8422 \quad \text{1p (yht. 9p)}$$

Taulukosta saadaan, että $\Phi(1,00) = 0,8413$, joka on lähimpänä arvoa 0,8422 1p (yht. 10p).

Tällöin saadaan:

$$\Phi\left(\frac{3,5 + x}{5,40}\right) = 0,8422$$

$$\frac{3,5 + x}{5,40} = 1,00 \quad || \cdot 5,40 \quad \text{1p (yht. 11p)}$$

$$3,5 + x = 5,40 \quad || - 3,5$$

$$x = 5,40 - 3,5$$

$$x = 1,9 \quad \text{1p (yht. 12p)}$$

Vastaus: Annelin käyttämä luku on $x = 1,9$ cm.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

10. Mustikkapiirakat (12 p.)

Mustikkapiirakan leivontaohjeessa lukee, että piirakan valmistamiseen tarvitaan 2,5 dl sokeria. Piirakkaohje on tarkoitettu pyöreäpohjaiseen vuokaan, jonka halkaisija on 30 cm. Henkka ja Maukka leipovat samanpaksuisia mustikkapiirakoita koulun myyjäisiin.

1. Henkka leipoo neljä uunipellillistä mustikkapiirakkaa. Uunipellin mitat ovat $30\text{ cm} \times 40\text{ cm}$. Kuinka paljon hän tarvitsee sokeria? (6 p.)
2. Maukka arvioi, että paras tuotto saadaan pienillä ympyränmuotoisilla piirakoilla. Hän käyttää pyöreäpohjaisia vuokia, joiden halkaisija on 10 cm, ja nelinkertaistaa leivontaohjeen ainekset. Kuinka monta piirakkaa hän leipoo? (6 p.)

Ratkaisu.

1.

$$V_{\text{sokeri}} = 2,5\text{ dl}$$

$$d_{\text{vuoka}} = 30\text{ cm}$$

Lasketaan piirakkaohjeen mukaisen pyöreäpohjaisen vuoan pinta-ala:

$$\begin{aligned} A_{\text{vuoka}} &= \pi \cdot r_{\text{vuoka}}^2 \\ &= \pi \cdot (15\text{ cm})^2 \quad \text{1p (yht. 1p)} \\ &= 706,858 \dots \text{ cm}^2 \quad \text{1p (yht. 2p)} \end{aligned}$$

Lasketaan uunipellin pinta-ala:

$$\begin{aligned} A_{\text{uunipelti}} &= 30\text{ cm} \cdot 40\text{ cm} \\ &= 1200\text{ cm}^2 \quad \text{1p (yht. 3p)} \end{aligned}$$

Henkka leipoo 4 uunipellillistä, joiden yhteispinta-ala on $4 \cdot A_{\text{uunipelti}}$ 1p (yht. 4p).

Merkitään tarvittavan sokerin tilavuutta kirjaimella x . Käytettävän sokerin tilavuus ja vuoan pinta-ala ovat suoraan verrannolliset, joten:

$$\begin{aligned}\frac{x}{4 \cdot A_{\text{uunipelti}}} &= \frac{V_{\text{sokeri}}}{A_{\text{vuoka}}} \quad (1\text{ p (yht. 5p)}) \\ \frac{x}{4 \cdot 1200 \text{ cm}^2} &= \frac{2,5 \text{ dl}}{706,858 \dots \text{ cm}^2} \\ \frac{x}{4800 \text{ cm}^2} &= \frac{2,5 \text{ dl}}{706,858 \dots \text{ cm}^2} \quad || \cdot (4800 \text{ cm}^2) \\ x &= \frac{2,5 \text{ dl}}{706,858 \dots \text{ cm}^2} \cdot 4800 \text{ cm}^2 \\ x &= 16,976 \dots \text{ dl} \\ x &\approx 17 \text{ dl} \quad (1\text{ p (yht. 6p)})\end{aligned}$$

Vastaus: Sokeria tarvitaan 17 dl.

2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Maukka nelinkertaistaa leivontaohjeen, jolloin alkuperäisen vuoan kokoisia piirakoita saataisiin neljä. Lasketaan näiden yhteenlaskettu pinta-ala:

$$\begin{aligned}4 \cdot A_{\text{vuoka}} &= 4 \cdot \pi \cdot r_{\text{vuoka}}^2 \\ &= 4 \cdot \pi \cdot (15 \text{ cm})^2 \\ &= 4 \cdot 706,858 \dots \text{ cm}^2 \\ &= 2827,4333 \dots \text{ cm}^2 \quad (2\text{ p (yht. 8p)})\end{aligned}$$

Lasketaan yhden pienen pyöreäpohjaisen vuoan pinta-ala, kun sen halkaisija on 10 cm:

$$\begin{aligned}A_{\text{pieni}} &= \pi \cdot r_{\text{pieni}}^2 \\ &= \pi \cdot (5 \text{ cm})^2 \\ &= 78,5398 \dots \text{ cm}^2 \quad (1\text{ p (yht. 9p)})\end{aligned}$$

Merkitään piirakan paksuutta kirjaimella h . Leivottavien piirakoiden lukumäärä n saadaan jakamalla neljän alkuperäisen vuoan yhteistilavuus yhden pienen vuoan tilavuudella:

$$n = \frac{4 \cdot V_{\text{vuoka}}}{V_{\text{pieni}}} = \frac{4 \cdot A_{\text{vuoka}} \cdot h}{A_{\text{pieni}} \cdot h} \quad (2\text{p (yht. 11p)})$$

Koska piirakat olivat samanpaksuisia, supistuu piirakan paksuus h pois yllä olevasta yhtälöstä. Tällöin leivottavien piirakoiden määrä n saadaan jakamalla neljän alkuperäisen vuoan yhteispinta-ala yhden pienen vuoan pinta-alalla:

$$n = \frac{4 \cdot A_{\text{vuoka}}}{A_{\text{pieni}}} = \frac{2827,4333 \dots \text{ cm}^2}{78,5398 \dots \text{ cm}^2} = 36 \quad (1\text{p (yht. 12p)})$$

Vastaus: Maukka leipoo 36 piirakkaa.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Koska piirakat ovat yhtä paksuja, taikinan määrä on suoraan verrannollinen leivottavien piirakoiden yhteispinta-alaan.

Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Kun vuoan halkaisija muutetaan 30 senttimetristä 10 senttimetriin, vuoan pohjan pinta-alaksi tulee

$$\left(\frac{10}{30}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

alkuperäisestä $\frac{1}{9}$. Ohjeen mukaisella taikinamäärällä saa siis 9 piirakkaa.

(2p (yht. 10p))

Nelinkertaisesta taikinasta saa $4 \cdot 9 = 36$ piirakkaa. (2p (yht. 12p))

Vastaus: Maukka leipoo 36 piirakkaa.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

11. Lintujen talviruokinta (12 p.)

Aineisto:

11. A [Kuva: Lintulauta](#)

11. B [Video: Lintulautavideo](#)

Lintuharrastaja on aloittanut lintujen talviruokinnan. Hän on hankkinut uuden, kuvan [11.A](#) ja videon [11.B](#) mukaisen lintujen ruokintalaitteen.

1. Mallinna lintujen ruokintalaitetta sopivan särmiön avulla. Piirrä kuva särmiöstä ja laske sen tilavuus. (6 p.)
2. Valmistajan ilmoituksen mukaan ruokintalaitteen tilavuus on noin 1,6 litraa. Perustele, mistä ero valmistajan ilmoittaman tilavuuden ja osatehtävän 11.1 arvion välillä muodostuu. (2 p.)
3. Kuinka monta kertaa tyhjän ruokintalaitteen voi täyttää 25 kilogramman säkillisestä auringonkukansiemeniä, kun siemensekoituksen tiheys on $0,460 \text{ kg/dm}^3$? Käytä ratkaisussasi valmistajan ilmoittamaa ruokintalaitteen tilavuutta. (4 p.)

Ratkaisu.

1.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Lintulauta on likimain särmiö, jonka pohja on tasakylkinen kolmio. Videosta nähdään, että tasakylkisen kolmion kanta on 18,0 cm ja kylki 19,5 cm.





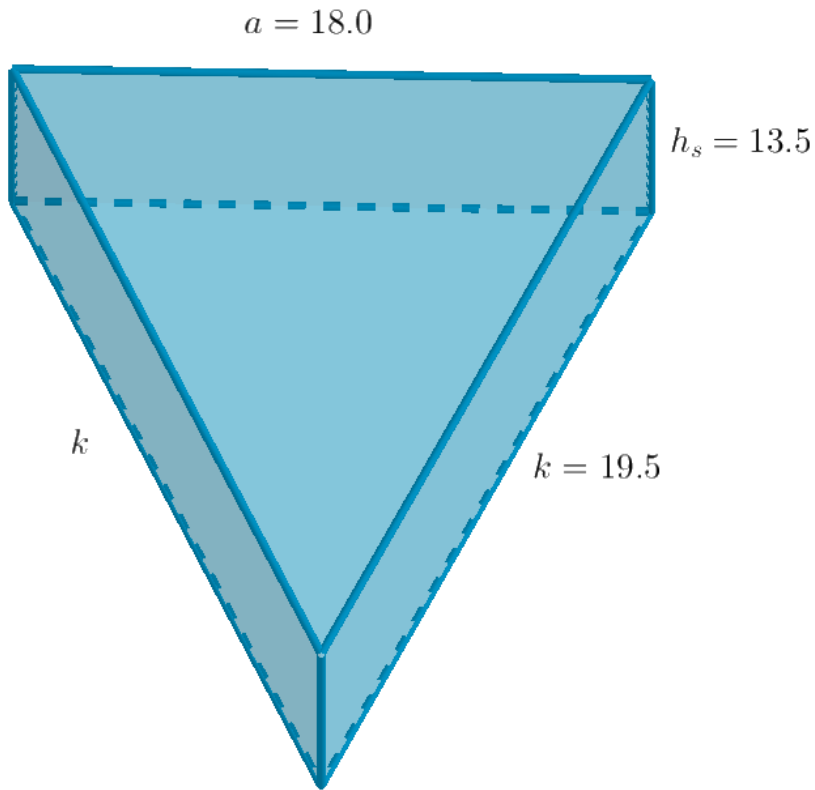
Videosta nähdään myös, että särmion korkeus on 13,5 cm.

1p (yht. 1p)



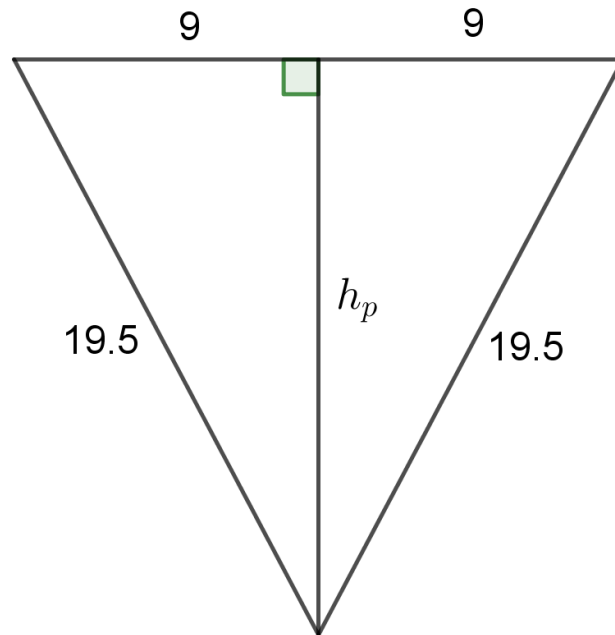
Kolmion kannaksi käyvät luvut väliltä 17,5 – 18,5 cm, kolmion kyljeksi luvut väliltä 19,0–20,0 cm ja särmiön korkeudeksi luvut väliltä 13,0–14,0 cm. Vastaus riippuu käytetyistä mitoista.

Piirretään särmiöstä mallikuva laskinohjelmalla. 1p (yht. 2p) Alla olevassa kuvassa mitat ovat senttimetreinä.



Jotta voitaisiin laskea särmiön pohjan pinta-ala, lasketaan särmiön pohjan korkeus h_p . Huomaa, että särmiön pohjan korkeus on eri asia kuin särmiön korkeus.

Tasakylkisen kolmion korkeusjana jakaa kannan kahteen yhtä pitkään osaan. Molempien osien pituus on $\frac{18 \text{ cm}}{2} = 9 \text{ cm}$ 1p (yht. 3p). Piirretään mallikuva särmiön pohjasta. Pituuden yksikkö on alla olevassa kuvassa senttimetri.



Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla ja ratkaistaan särmiön pohjan korkeus h_p .

$$h_p^2 + 9^2 = 19,5^2$$

$$h_p^2 + 81 = 380,25$$

$$h_p^2 = 380,25 - 81$$

$$h_p^2 = 299,25$$

$$h_p = \pm \sqrt{299,25}$$

$$h_p = \pm 17,298 \dots$$

1 p (yht. 4p)

Yhtälö voidaan ratkaista myös laskinohjelmalla, kunhan tämä ilmoitetaan selkeästi ratkaisussa.

Sivun pituus ei voi olla negatiivinen, joten $h_p = 17.298 \dots$ cm.

Lasketaan särmiön pohjan pinta-ala.

$$\begin{aligned}A_p &= \frac{1}{2}ah_p \\&= \frac{1}{2} \cdot 18 \text{ cm} \cdot 17,298 \dots \text{ cm} \\&= 155,689 \dots \text{ cm}^2 \quad \text{1p (yht. 5p)}\end{aligned}$$

Lasketaan särmiön tilavuus.

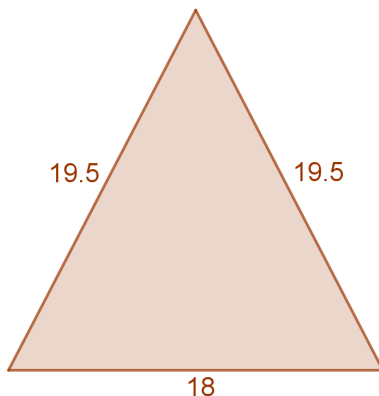
$$\begin{aligned}V &= A_p \cdot h_s \\&= 155,689 \dots \text{ cm}^2 \cdot 13,5 \text{ cm} \\&= 2101,809 \dots \text{ cm}^3 \\&\approx 2100 \text{ cm}^3 \quad \text{1p (yht. 6p)} \\&= 2,1 \text{ dm}^3 \\&= 2,1 \ell\end{aligned}$$

Vastaus: 2100 cm^3

Ratkaisuvaihtoehto 2

Lintulauta on likimain särmiö, jonka pohja on tasakylkinen kolmio. Tasakylkisen kolmion kanta on 18,0 cm ja kylki 19,5 cm. Särmiön korkeus on 13,5 cm. 1p (yht. 1p)
Mitat riittää katsoa videosta kokonaisluvun tarkkuudella, eli kyljeksi käy 205 cm ja korkeudeksi 145 cm. Vastaus riippuu käytetyistä mitoista.

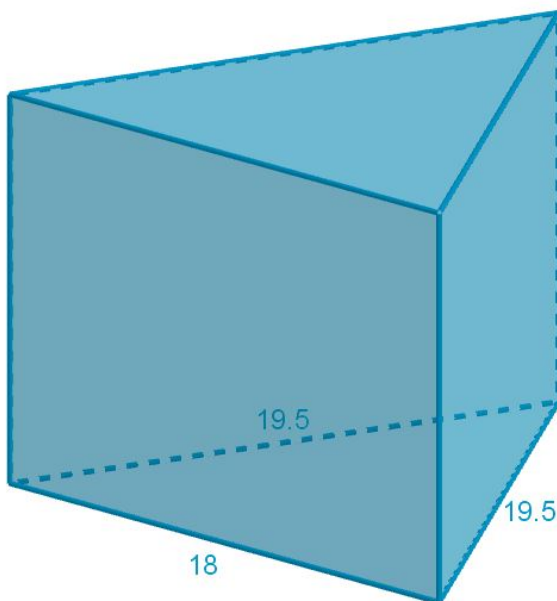
Piirretään laskinohjelmalla kolmio, jonka kärjet on valittu käsin siten, että kolmion kylkien pituus on 19,5 cm ja kannan pituus 18,0 cm. 2p (yht. 3p)



Kolmio voidaan piirtää tarkasti esimerkiksi näin: Piirretään koordinaatistoon pisteet $(0, 0)$ ja $(18, 0)$. Piirretään ympyrä, jonka keskipiste on $(0, 0)$ ja säde 19,5. Piirretään ympyrä, jonka keskipiste on $(18, 0)$ ja säde 19,5. Määritetään laskinohjelman työkalulla näiden ympyröiden leikkauspisteet. Pisteet $(0, 0)$, $(18, 0)$ ja kumpi tahansa ympyröiden leikkauspisteistä muodostavat juuri oikeanlaisen kolmion.

Piirretään laskinohjelmalla särmiö, jonka pohjana on edellä piirretty kolmio ja jonka korkeus on 13,5. 2p (yht. 5p)

- ☐ Jana
 - ☒ $a = 19.5$
 - ☒ $b = 19.5$
 - ☒ $d_1 = 18$
- ☐ Kartioleikkaus
 - ☐ $c: x^2 + y^2 = 380.25$
 - ☐ $d: (x - 18)^2 + y^2 = 380.25$
- ☐ Kolmio
 - ☒ $k1 = 155.689595028055$
- ☐ Piste
 - ☐ $A = (0, 0)$
 - ☐ $B = (18, 0)$
 - ☐ $C = (9, -17.29884389200)$
 - ☐ $D = (9, 17.29884389200)$
- ☐ Särmiö
 - ☒ $e = 2101.809532878752$



Särmiön tilavuudeksi saatiin laskinohjelman työkalulla

$$\begin{aligned}
 2101.809 \dots \text{ cm}^3 &\approx 2100 \text{ cm}^3 && \text{1p (yht. 6p)} \\
 &= 2,1 \text{ dm}^3 \\
 &= 2,1 \ell.
 \end{aligned}$$

Vastaus: 2100 cm^3

2. **Vastaus:** Kohdassa 11.1 tasakylkisten kolmioiden ajateltiin olevan pystysuoria. Todellisuudessa näin ei ole, vaan kolmioiden alareunat ovat kohdan 11.1 särmiön sisällä. **Vinous johtuu 3 senttimetrin syvennyksistä, joihin linnut tulevat syömään.** Lisäksi ruokintalaitetta ei välttämättä valmistajan mittauksessa ole täytetty piripintaan asti. Näistä syistä todellinen tilavuus on a-kohdan arviota pienempi.

2p (yht. 8p)

3.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Ruokasäkin tilavuus on

$$\begin{aligned}
 &\frac{25 \text{ kg}}{0.460 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}} && \text{1p (yht. 9p)} \\
 &= 54,347 \dots \text{ dm}^3 \\
 &= 54,347 \dots \ell. && \text{1p (yht. 10p)}
 \end{aligned}$$

Täyttökertojen määrä on

$$\begin{aligned}
 &\frac{54,347 \dots \ell}{1.6 \ell} && \text{1p (yht. 11p)} \\
 &= 33,967 \dots \\
 &\approx 34. && \text{1p (yht. 12p)}
 \end{aligned}$$

Hyväksytään myös alaspäin, 33 kertaan, pyöristetty tulos.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Täyttölaitteen tilavuus on $1.6 \ell = 1.6 \text{ dm}^3$.

Täyttölaitteeseen mahtuvan ruoan massa on

$$1.6 \text{ dm}^3 \cdot 0.460 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \quad \text{1p (yht. 9p)}$$
$$= 0,736 \text{ kg.} \quad \text{1p (yht. 10p)}$$

Täytökertojen määrä on

$$\frac{25 \text{ kg}}{0,736 \text{ kg}} \quad \text{1p (yht. 11p)}$$
$$= 33,967 \dots \approx 34. \quad \text{1p (yht. 12p)}$$

Hyväksytään myös alaspäin, 33 kertaan, pyöristetty tulos.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

12. Pokémon GO (12 p.)

Pokémon GO -pelissä kaikilla pokémoneilla on hyökkäys-, puolustus- ja kestävyysarvo, joista jokainen on kokonaisluku joukosta $\{0, 1, \dots, 15\}$. Oletetaan, että nämä arvot arvotaan ja että jokaisen arvon todennäköisyys on sama.

1. Kuinka monta erilaista hyökkäys-, puolustus- ja kestävyysarvoyhdistelmää on olemassa? (4 p.)
2. Kuinka monta erilaista tapaa on saada pokémon, jolle hyökkäys-, puolustus- ja kestävyysarvojen summa on 43? (4 p.)
3. Pelissä on myös ns. varjopokémoneja. Oletetaan, että myös niille arvotaan arvot 0–15 samalla tavalla. Jos varjopokémonin puhdistaa, nousee sen jokainen arvo kahdella, kuitenkin korkeintaan viiteentoista. Mikä on todennäköisyys saada varjopokémon, jonka arvot puhdistamisen jälkeen ovat 15–15–15? (4 p.)

Ratkaisu.

1. Hyökkäysarvolle on 16 mahdollista vaihtoehtoa, samoin puolustusarvolle on 16 mahdollista vaihtoehtoa ja kestävyysarvolle on 16 mahdollista vaihtoehtoa. 1p (yht. 1p)
Tuloperiaatteen mukaan hyökkäys-, puolustus- ja kestävyysarvoyhdistelmiä on

$$16 \cdot 16 \cdot 16$$

2p (yht. 3p)

$$= 4096$$

1p (yht. 4p)

kappaletta. Kohdan 12.3 kannalta on hyvä huomata, että nämä yhdistelmät ovat kolmen luvun (järjestettyjä) jonoja.

Vastaus: 4096 yhdistelmää

2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Jos hyökkäysarvo on jokin luvuista 0 – 12, puolustusarvon ja kestävyysarvon summan on oltava vähintään $43 - 12 = 31$, mikä on mahdotonta, koska sekä puolustusarvo että kestävyysarvo ovat korkeintaan 15.

Jos hyökkäysarvo on 13, puolustusarvon ja kestävyysarvon summan on oltava

$$43 - 13 = 30,$$

joten sekä puolustusarvon että hyökkäysarvon on oltava 15. Näin saadaan yksi suotuisa tapa, 13-15-15. 1p (yht. 5p)

Jos hyökkäysarvo on 14, puolustusarvon ja kestävyysarvon summan on oltava

$$43 - 14 = 29,$$

joten puolustusarvon ja hyökkäysarvon on oltava 15 ja 14 jommassakummassa järjestyksessä. Näin saadaan kaksi suotuisaa tapaa, 14-15-14 ja 14-14-15. 1p (yht. 6p)

Jos hyökkäysarvo on 15, puolustusarvon ja kestävyysarvon summan on oltava

$$43 - 15 = 28,$$

joten puolustusarvon ja hyökkäysarvon on oltava 15 ja 13 jommassakummassa järjestyksessä tai molempien on oltava 14. Näin saadaan kolme suotuisaa tapaa, 15-15-13, 15-13-15 ja 15-14-14. 1p (yht. 7p)

Yhteensä erilaisia tapoja saada summaksi 43 on

$$1 + 2 + 3 = 6. \quad \text{1p (yht. 8p)}$$

Vastaus: 6 tapaa

Ratkaisuvaihtoehto 2

Jos jokainen kolmesta arvosta olisi 15, summa olisi

$$15 + 15 + 15 = 45,$$

joka on kaksi liian paljon. On siis pienennettävä joko yhtä kolmesta arvosta kahdella tai kahta arvoa yhdellä.

Summaksi tulee 43, jos arvot ovat 15, 15 ja 13 jossakin järjestyksessä. 1p (yht. 5p)
Näitä järjestyksiä on 3, koska luvun 13 paikka kolmen luvun jonossa voidaan valita kolmella tavalla. 1p (yht. 6p)

Summaksi tulee 43 myös, jos arvot ovat 15, 14 ja 14 jossakin järjestyksessä. 1p (yht. 7p)
Näitä järjestyksiä on 3, koska luvun 15 paikka kolmen luvun jonossa voidaan valita kolmella tavalla.

Yhteensä erilaisia tapoja saada summaksi 43 on

$$3 + 3 = 6. \quad \text{1p (yht. 8p)}$$

Vastaus: 6 tapaa

3.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Käytetään alkeistapauksina kolmen luvun jonoja. Kuten kohdassa 1 todettiin, näiden jonojen määrä on 4096.

Kunkin kolmesta arvosta on oltava 13, 14 tai 15, joten kullekin arvolle on 3 mahdollisuutta. 1p (yht. 9p) Suotuisten kolmen luvun jonojen määrä on tuloperiaatteen mukaan

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27. \quad \text{1p (yht. 10p)}$$

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(\text{kaikki arvot puhdistamisen jälkeen } 15) &= \frac{27}{4096} \quad \text{2p (yht. 12p)} \\ &= 0,00659 \dots \\ &\approx 0,0066. \end{aligned}$$

Vastaus: $\frac{27}{4096} \approx 0,0066$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Kunkin kolmesta arvosta on oltava 13, 14 tai 15 1p (yht. 9p), joten kullekin arvolle on 3 mahdollisuutta.

Todennäköisyys, että hyökkäysarvo on 13, 14 tai 15, on $P_h = \frac{3}{16}$.

Todennäköisyys, että puolustusarvo on 13, 14 tai 15, on $P_p = \frac{3}{16}$.

Todennäköisyys, että kestävyysarvo on 13, 14 tai 15, on $P_k = \frac{3}{16}$ 1p (yht. 10p).

Hyökkäys-, puolustus- ja kestävyysarvo eivät riipu toisistaan, joten voidaan käyttää riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntöä. Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(\text{jokainen arvo vähintään 13}) &= P_h \cdot P_p \cdot P_k \\ &= \frac{3}{16} \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{3}{16} \quad \text{1p (yht. 11p)} \\ &= \frac{27}{4096} \quad \text{1p (yht. 12p)} \\ &= 0,00659 \dots \\ &\approx 0,0066. \end{aligned}$$

Vastaus: $\frac{27}{4096} \approx 0,0066$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

13. Suurin pinta-ala (12 p.)

Suorakulmion alareuna on positiivisella x -akselilla, vasen pystyreuna positiivisella y -akselilla ja oikea yläkulma paraabelilla $y = -x^2 + 9$. Määritä derivaatan avulla suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala.

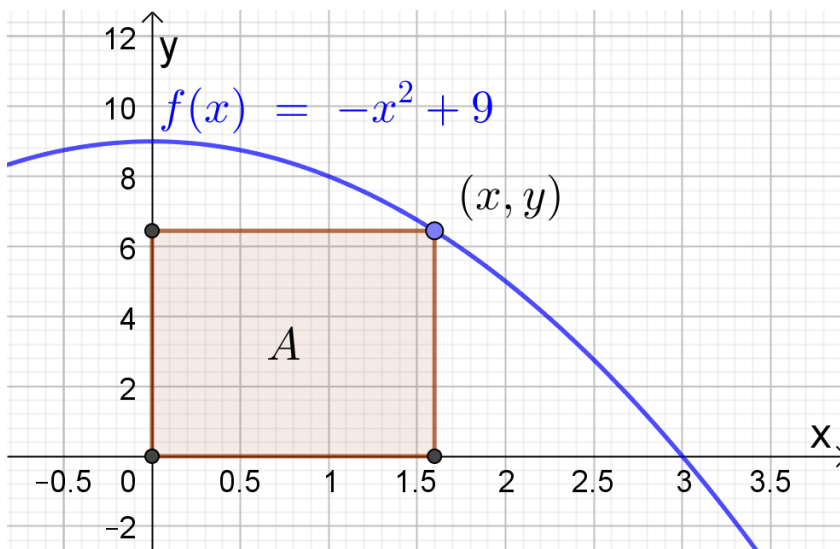
Ratkaisuvaihtoehto 1

Suorakulmion kärkien koordinaatit ovat $(0, 0)$, $(x, 0)$, (x, y) ja $(0, y)$ 1p (yht. 1p), jossa

$$y = 9 - x^2. \quad \text{1p (yht. 2p)}$$

Funktio $f(x) = -x^2 + 9$ on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

Mallikuva, jota ei vaadita:



Koska suorakulmion vasen reuna on y -akselilla, on oltava $x \geq 0$.

Koska suorakulmion yläreuna kulkee paraabelilla olevan pisteen kautta ja alareuna on x -akselilla, paraabelilla olevan kärjen y -koordinaatin on oltava vähintään 0. Rat-

kaistaan funktion $f(x) = -x^2 + 9$ nollakohdat.

$$f(x) = 0$$

$$-x^2 + 9 = 0$$

$$-x^2 = -9$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

Koska funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, funktio saa nollakohtien välissä positiivisia arvoja. Vasemmanpuolisen nollakohdan vasemmalla puolella funktio saa negatiivisia arvoja, samoin oikeanpuoleisen nollakohdan oikealla puolella. On siis oltava $-3 \leq x \leq 3$.

Yhdistämällä epäyhtälöt $x \geq 0$ ja $-3 \leq x \leq 3$ saadaan $0 \leq x \leq 3$.

Suorakulmion kanta on x ja korkeus $y = -x^2 + 9$. Suorakulmion pinta-ala on

$$A = xy \quad \text{1p (yht. 3p)}$$

$$= x(-x^2 + 9) \quad \text{1p (yht. 4p)}$$

$$= -x^3 + 9x. \quad \text{1p (yht. 5p)}$$

Derivoidaan funktio $A(x) = -x^3 + 9x$.

$$A'(x) = -3x^2 + 9. \quad \text{2p (yht. 7p)}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$A'(x) = 0$$

$$-3x^2 + 9 = 0$$

$$-3x^2 = -9 \quad || : (-3)$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3} \quad \text{1p (yht. 8p)}$$

$$x = \pm 1,732 \dots$$

Näistä vain $x = \sqrt{3}$ toteuttaa ehdon $0 \leq x \leq 3$. 1p (yht. 9p)

Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Lasketaan funktion $A(x) = -x^3 + 9x$ arvot välin $0 \leq x \leq 3$ päätepisteissä $x = 0$ ja $x = 3$ sekä derivaatan nollakohdassa $x = \sqrt{3}$.

$$A(0) = -0^3 + 9 \cdot 0 = 0$$

$$A(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}^3 + 9 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3} = 10,392 \dots$$

$$A(3) = -3^3 + 9 \cdot 3 = 0$$
 1p (yht. 10p)

Näistä arvoista suurin on $A(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} = 10,392 \dots \approx 10,39$ 1p (yht. 11p).

Vastaus: $6\sqrt{3} \approx 10,39$ 1p (yht. 12p)

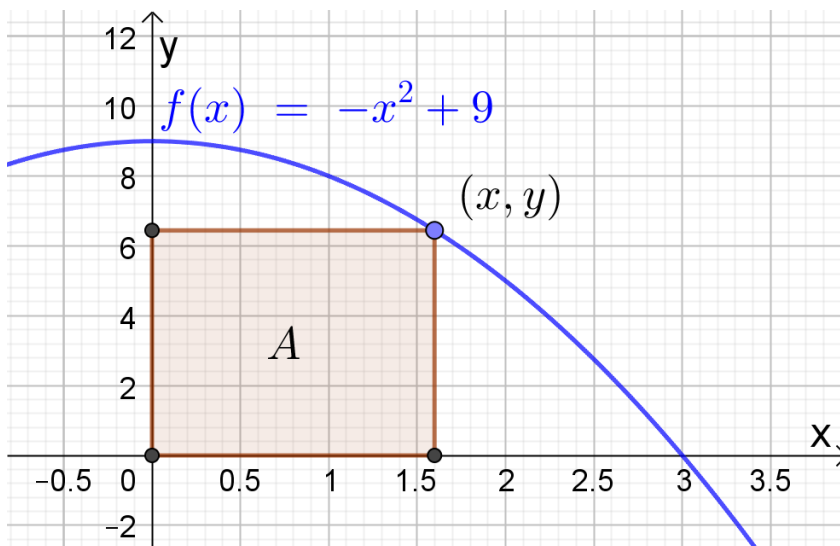
Ratkaisuvaihtoehto 2

Suorakulmion kärkien koordinaatit ovat $(0, 0)$, $(x, 0)$, (x, y) ja $(0, y)$ 1p (yht. 1p), jossa

$$y = 9 - x^2.$$
 1p (yht. 2p)

Funktio $f(x) = -x^2 + 9$ on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

Mallikuva, jota ei vaadita:



Koska suorakulmion vasen reuna on y -akselilla, on oltava $x \geq 0$.

Koska suorakulmion yläreuna kulkee paraabelilla olevan pisteen kautta ja alareuna on x -akselilla, paraabelilla olevan kärjen y -koordinaatin on oltava vähintään 0.

Tallennetaan funktio $f(x) = -x^2 + 9$ laskinohjelman muistiin. Laskinohjelmalla saadaan epäyhtälön $f(x) \geq 0$ ratkaisuksi $-3 \leq x \leq 3$.

Yhdistämällä epäyhtälöt $x \geq 0$ ja $-3 \leq x \leq 3$ saadaan $0 \leq x \leq 3$.

Suorakulmion kanta on x ja korkeus $y = -x^2 + 9$. Suorakulmion pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= xy \quad \text{1p (yht. 3p)} \\ &= x(-x^2 + 9). \quad \text{2p (yht. 5p)} \end{aligned}$$

Tallennetaan funktio $A(x) = x(-x^2 + 9)$ laskinohjelman muistiin. Ratkaistaan laskinohjelmalla funktion A derivaatan nollakohdat yhtälöstä $A'(x) = 0$. Ratkaisuksi saadaan $x = \pm\sqrt{3} = \pm 1,732 \dots$ 3p (yht. 8p)

Derivaatan nollakohdista vain $x = \sqrt{3}$ toteuttaa ehdon $0 \leq x \leq 3$ 1p (yht. 9p).

Polynomifunktio saa suljetulla välillä suuriman arvonsa välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Lasketaan funktion $A(x) = -x^3 + 9x$ arvot välin $0 \leq x \leq 3$ päätepisteissä $x = 0$ ja $x = 3$ sekä derivaatan nollakohdassa $x = \sqrt{3}$. Laskinohjelmalla saadaan seuraavat arvot:

$$\begin{aligned} A(0) &= 0 \\ A(\sqrt{3}) &= 6\sqrt{3} = 10,392 \dots \\ A(3) &= 0 \quad \text{1p (yht. 10p)} \end{aligned}$$

Näistä arvoista suurin on $A(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} = 10,392 \dots \approx 10,39$ 1p (yht. 11p).

Vastaus: $6\sqrt{3} \approx 10,39$ 1p (yht. 12p)

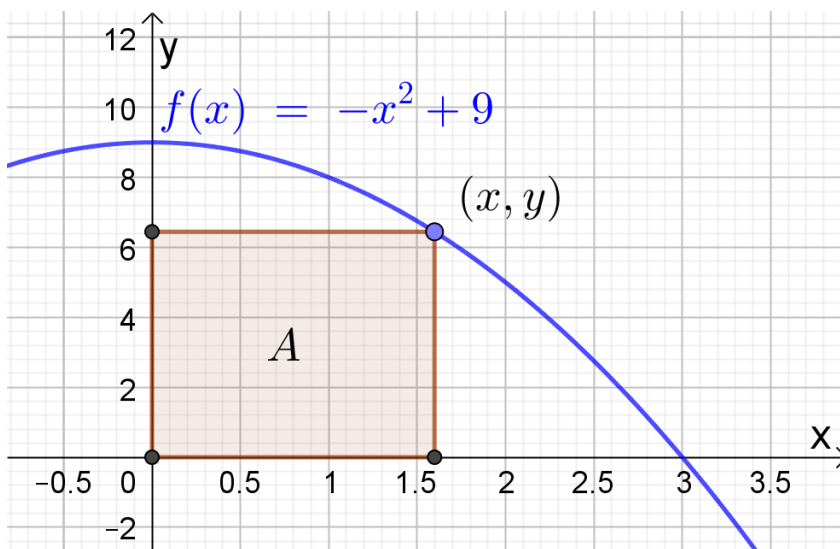
Ratkaisuvaihtoehto 3

Suorakulmion kärkien koordinaatit ovat $(0, 0)$, $(x, 0)$, (x, y) ja $(0, y)$ 1p (yht. 1p), jossa

$$y = 9 - x^2. \quad \text{1p (yht. 2p)}$$

Funktio $f(x) = -x^2 + 9$ on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

Mallikuva, jota ei vaadita:



Koska suorakulmion vasen reuna on y -akselilla, on oltava $x \geq 0$.

Koska suorakulmion yläreuna kulkee paraabelilla olevan pisteen kautta ja alareuna on x -akselilla, paraabelilla olevan kärjen y -koordinaatin on oltava vähintään 0. Ratkaistaan funktion $f(x) = -x^2 + 9$ nollakohdat.

$$f(x) = 0$$

$$-x^2 + 9 = 0$$

$$-x^2 = -9$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

Koska funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, funktio saa nollakohtien välissä positiivisia arvoja. Vasemmanpuolisen nollakohdan vasemmalla puolella funktio saa negatiivisia arvoja, samoin oikeanpuoleisen nollakohdan oikealla puolella. On siis oltava $-3 \leq x \leq 3$.

Yhdistämällä epäyhtälöt $x \geq 0$ ja $-3 \leq x \leq 3$ saadaan $0 \leq x \leq 3$.

Suorakulmion kanta on x ja korkeus $y = -x^2 + 9$. Suorakulmion pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= xy && \text{1 p (yht. 3p)} \\ &= x(-x^2 + 9) && \text{1 p (yht. 4p)} \\ &= -x^3 + 9x. && \text{1 p (yht. 5p)} \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio $A(x) = -x^3 + 9x$.

$$A'(x) = -3x^2 + 9. \quad \text{2 p (yht. 7p)}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ -3x^2 + 9 &= 0 \\ -3x^2 &= -9 \quad || : (-3) \\ x^2 &= 3 \\ x &= \pm\sqrt{3} && \text{1 p (yht. 8p)} \\ x &= \pm 1,732 \dots \end{aligned}$$

Derivaattafunktion A' kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten derivaatan merkki on positiivinen derivaatan nollakohtien $x = -\sqrt{3}$ ja $x = \sqrt{3}$ välissä ja negatiivinen, kun $x < -\sqrt{3}$ tai $x > \sqrt{3}$. 1 p (yht. 9p)

Rajoitetaan kulkukaavio välille $0 \leq x \leq 3$ ja piirretään se LibreOffice Drawlla.

	0	$\sqrt{3}$	3
$A'(x)$		+	-
$A(x)$		↗	↘

Kulkukaavion piirtämisestä 1 p (yht. 10p).

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio A saa suurimman arvonsa, kun $x = \sqrt{3}$. 1p (yht. 11p)
Lasketaan suurin arvo.

$$A(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}^3 + 9 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3} = 10,392 \dots$$

Suurin pinta-ala on $A(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} = 10,392 \dots \approx 10,39$ 1p (yht. 12p).

Vastaus: $6\sqrt{3} \approx 10,39$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!