

Yo-mallivastaukset



Kevät 2022
Lyhyt matematiikka

Tiesitkö tämän?

Mafylaiset veivät
vuoden 2021
haussa

75%

kaikista lääiksen
pääsykoekiintiön paikoista.

60%

Pk-seudun lukioista
käyttää **Mafynettiä**.

Mafynetin oppimateriaalit tulossa kaikkiin LOPS 2021
moduuleihin matematiikkaan, fysiikkaan, kemiaan ja
biologiaan!

Mafynetti

Mallivastausten tekijät:

Malliratkaisujen laatimisesta ovat vastanneet MAFY:n toinen perustaja Antti Suominen sekä MAFY:n oppimateriaalitiimi, jonka päätehtävä on laatia ja kehittää MAFY:n lukioon tarkoitettuja oppimateriaaleja.

Oppimateriaalitiimistä mukana olivat Antti Suomisen lisäksi Saija Ojala, Jori Suominen, Katja Niemistö ja Timo Kalinainen. Lisäksi työn tukena olivat Tuomas Hauvala ja Matti Virolainen.

Mafy oppimateriaalit

Olemme Helsingissä, Tampereella, Turussa ja Jyväskylässä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys.

Palveluitamme ovat:

- Mafynetti – sähköinen oppimateriaali
- Lääketieteellisen valmennuskurssit
- Kauppatieteellisen valmennusmateriaalit
- DI-valmennuskurssit
- Yo-kokeisiin valmentavat kurssit

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kurseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Käyttöehdot

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafyvalmennus.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion matematiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukiokursseillasi. Nämä mallivastaukset ovat MAFY Oy:n omaisuutta.

MAFY Oy:n yhteystiedot:

<https://mafy.fi/yhteydenotto>

Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	7
Ratkaisu tehtävään 3	10
Ratkaisu tehtävään 4	17
Ratkaisu tehtävään 5	19
Ratkaisu tehtävään 6	21
Ratkaisu tehtävään 7	25
Ratkaisu tehtävään 8	32
Ratkaisu tehtävään 9	37
Ratkaisu tehtävään 10	42
Ratkaisu tehtävään 11	46
Ratkaisu tehtävään 12	49
Ratkaisu tehtävään 13	54

Malliratkaisut päivitetty 26. tammikuuta 2023 klo. 10:06.

1. Peruslaskuja (12 p.)

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Jokaisen kohdan vastaus on kokonaisluku.

Tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria. Kunkin vastauksen maksimipituus on 5 merkkiä. Vastaukset arvostellaan tietokoneavusteisesti, ja ohjeiden noudattamatta jättäminen voi johtaa pistevähennyksiin. Jokaisesta kohdasta voi saada 2 pistettä.

1.1. Lausekkeen $(-9) \cdot (42 - 35)$ arvo on (2 p.)

1.2. Funktion $f(x) = 4x - 12$ nollakohta on (2 p.).

$$x = \text{$$

1.3. Suora kulkee pisteiden $A = (1, 15)$ ja $B = (7, 81)$ kautta. Suoran kulmakerroin on (2 p.)

$$k = \text{$$

1.4. Lausekkeen $6^3 \cdot 2^{-2}$ arvo on (2 p.)

1.5. Geometrinen lukujono alkaa luvuilla $a_1 = 256$, $a_2 = 128$ ja $a_3 = 64$. Lukujonon viides jäsen on (2 p.)

$$a_5 = \text{$$

1.6. Yhtälön $2^{2x-5} = 8$ ratkaisu on (2 p.)

$$x = \text{$$

Ratkaisu.**1.1 Vastaus:** -63 2 p. (yht. 2 p.)

Perustelut: Lausekkeen arvo on

$$(-9) \cdot (42 - 35) = (-9) \cdot 7 = -63.$$

1.2 Vastaus: $x = 3$ 2 p. (yht. 4 p.)Perustelut: Ratkaistaan funktion nollakohta yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0$$

$$4x - 12 = 0 \quad \parallel + 12$$

$$4x = 12 \quad \parallel : 4$$

$$x = 3$$

Funktion nollakohta on $x = 3$.**1.3 Vastaus:** 11 2 p. (yht. 6 p.)Perustelut: Pisteiden $A = (1, 15)$ ja $B = (7, 81)$ kautta kulkevan suoran kulma-kerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{81 - 15}{7 - 1}$$

$$= \frac{66}{6}$$

$$= 11.$$

1.4 **Vastaus:** 54 2 p. (yht. 8 p.)

Perustelut: Lausekkeen arvo on

$$6^3 \cdot 2^{-2} = 6^3 \cdot \frac{1}{2^2} = 216 \cdot \frac{1}{4} = 54.$$

1.5 **Vastaus:** 16 2 p. (yht. 10 p.)

Perustelut: Koska lukujono on geometrinen, niin lukujonon kahden peräkkäisen jäsenen suhde on vakio. Lasketaan ensin geometrisen lukujonon suhdeluku q

$$q = \frac{a_1}{a_2} = \frac{128}{256} = \frac{1}{2}$$

Ratkaisuvaihtoehto 1

Koska suhdeluku on $\frac{1}{2}$, saadaan lukujonon seuraava jäsen aina kertomalla lukujonon jäsen luvulla $\frac{1}{2}$.

Lukujonon kolmas jäsen on $a_3 = 64$, joten lukujonon neljäs jäsen on

$$a_4 = \frac{1}{2} \cdot a_3 = \frac{1}{2} \cdot 64 = 32.$$

Vastaavasti viides jäsen on

$$a_5 = \frac{1}{2} \cdot a_4 = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16.$$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Geometrisen lukujonon yleinen jäsen on muotoa $a_n = a_1 q^{n-1}$. Lasketaan lukujonon viides jäsen yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

$$\begin{aligned}a_5 &= a_1 q^{5-1} \\&= a_1 q^4 \\&= 256 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\&= 256 \cdot \frac{1}{2^4} \\&= 256 \cdot \frac{1}{16} \\&= 16\end{aligned}$$

Lukujonon viides jäsen on $a_5 = 16$.

1.6 **Vastaus:** $x = 4$ 2 p. (yht. 12 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 1

$$\begin{aligned}2^{2x-5} &= 8 \\2^{2x-5} &= 2^3 \\2x - 5 &= 3 & \parallel + 5 \\2x &= 3 + 5 \\2x &= 8 & \parallel : 2 \\x &= 4\end{aligned}$$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Ratkaistaan yhtälö logaritmin määritelmän $a^y = x \Leftrightarrow \log_a x = y$ avulla.

$$2^{2x-5} = 8$$

$$2x - 5 = \log_2 8$$

$$2x - 5 = 3 \quad \parallel + 5$$

$$2x = 3 + 5$$

$$2x = 8 \quad \parallel : 2$$

$$x = 4$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

2. Useita ratkaisutapoja (12 p.)

Yhtälöitä ratkaistaessa käytetään usein osittelulakia esimerkiksi silloin, kun kerrotaan sulut auki;

$$4(x + 1) = 4x + 4$$

on esimerkki sulkujen aukikertomisesta.

1. Ratkaise yhtälö $12(x - 7) = 24$ kahdella eri tavalla, joista toisessa käytetään osittelulakia ja toisessa ei käytetä. (6 p.)
2. Ratkaise yhtälö $(2x + 1)(x - 6) = 0$ kahdella eri tavalla, joista toisessa käytetään osittelulakia ja toisessa ei käytetä. (6 p.)

Ratkaisu.

2.1. Ratkaistaan yhtälö ensin käyttämällä osittelulakia.

$$12(x - 7) = 24$$

$$12 \cdot x + 12 \cdot (-7) = 24$$

$$12x - 84 = 24 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)} \quad \parallel + 84$$

$$12x = 24 + 84$$

$$12x = 108 \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)} \quad \parallel : 12$$

$$x = 9 \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Ratkaistaan yhtälö käyttämättä osittelulakia.

$$12(x - 7) = 24 \quad \parallel : 12 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

$$x - 7 = 2 \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)} \quad \parallel + 7$$

$$x = 2 + 7$$

$$x = 9 \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

2.2. Ratkaistaan yhtälö ensin käyttämällä osittelulakia.

$$(2x + 1)(x - 6) = 0$$

$$2x \cdot x + 2x \cdot (-6) + 1 \cdot x + 1 \cdot (-6) = 0$$

$$2x^2 - 12x + x - 6 = 0$$

$$2x^2 - 11x - 6 = 0 \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa.

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{4}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{169}}{4}$$

$$x = \frac{11 \pm 13}{4}$$

$$x = \frac{11 + 13}{4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{11 - 13}{4}$$

$$x = \frac{24}{4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2}{4}$$

$$x = 6 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{1}{2} \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

Ratkaistaan yhtälö käyttämättä osittelulakia. Käytetään tulon nollasääntöä. Tulo on nolla täsmälleen silloin, kun jokin (yksi tai useampi) tekijöistä on nolla.

$$(2x + 1)(x - 6) = 0$$

$$2x + 1 = 0 \quad \text{tai} \quad x - 6 = 0 \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

Ratkaistaan ensin yhtälö $2x + 1 = 0$.

$$2x + 1 = 0 \quad \parallel -1$$

$$2x = 0 - 1$$

$$2x = -1 \quad \parallel :2$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

Ratkaistaan sitten yhtälö $x - 6 = 0$.

$$x - 6 = 0 \quad || + 6$$

$$x = 0 + 6$$

$$x = 6$$

1 p. (yht. 12 p.)

Yhtälön ratkaisu on siis $x = 6$ tai $x = -\frac{1}{2}$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

3. Sisään ja ympäri piirretyt ympyrät (12 p.)

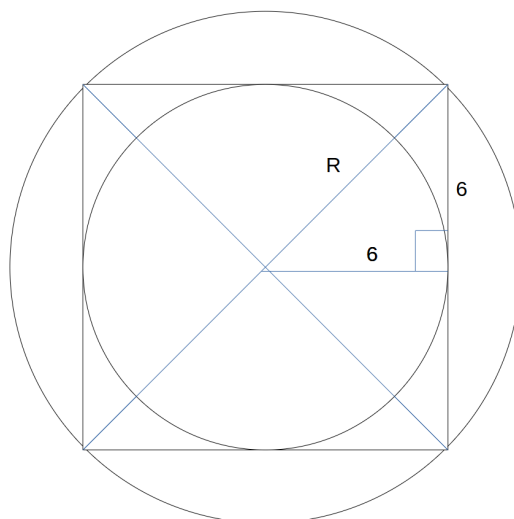
1. Neliön sisään piirretään mahdollisimman suuri ympyrä. Ympyrän säde on 6,0 cm. Määritä neliön kaikkien kärkien kautta kulkevan ympyrän säde 0,1 cm:n tarkkuudella. (6 p.)
2. Tasasivuisen kolmion sisään piirretään mahdollisimman suuri ympyrä. Ympyrän säde on 6,0 cm. Määritä kolmion kaikkien kärkien kautta kulkevan ympyrän säde 0,1 cm:n tarkkuudella. (6 p.)

Ratkaisu.

3.1.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Mallikuvaa ei vaadita ratkaisussa, mutta se kannattaa piirtää tilanteen hahmottamiseksi.



Pisteytys: Kuvasta, tai selityksestä, millainen suorakulmainen kolmio muodostuu 1 p.

Muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka molempien kateettien pituus on pienen ympyrän säde $r = 6,0 \text{ cm}$ ja hypotenuusa ison ympyrän säde R . Ratkaistaan suuremman ympyrän säde R Pythagoraan lauseella.

$$R^2 = 6^2 + 6^2 \quad \text{3 p. (yht. 4 p.)}$$

$$R^2 = 36 + 36$$

$$R^2 = 72$$

$$R = \pm\sqrt{72}$$

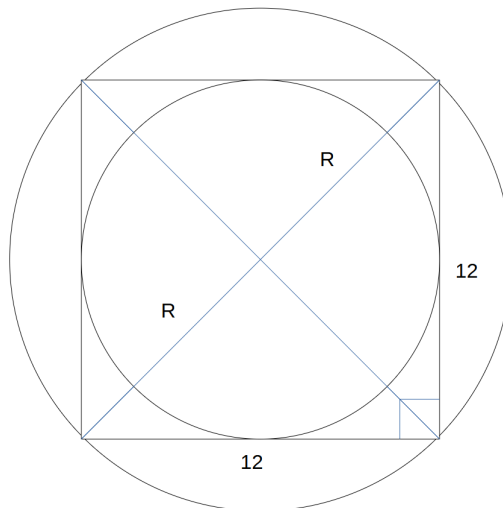
$$R = \pm 8,485 \dots \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

Säde ei voi olla negatiivinen, joten $R = 8,485 \dots \text{ cm} \approx 8,5 \text{ cm}$.

Vastaus: 8,5 cm 1 p. (yht. 6 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 2

Mallikuva, jota ei vaadita:



Pisteytys: Kuvasta, tai siitä tiedosta, että neliön sivun pituus on 12 cm 1 p.

Neliö jakautuu kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Ratkaistaan neliön lävistäjä $D = 2R$ 1 p. (yht. 2 p.) Pythagoraan lauseen avulla.

$$D^2 = 12^2 + 12^2 \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

$$D^2 = 144 + 144$$

$$D^2 = 288$$

$$D = \pm\sqrt{288}$$

$$D = \pm 16,970 \dots \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Halkaisija ei voi olla negatiivinen, joten $D = 16,970 \dots$ cm. Tällöin

$$R = \frac{D}{2} = \frac{16,970 \dots \text{ cm}}{2} \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)} = 8,485 \dots \text{ cm} \approx 8,5 \text{ cm}.$$

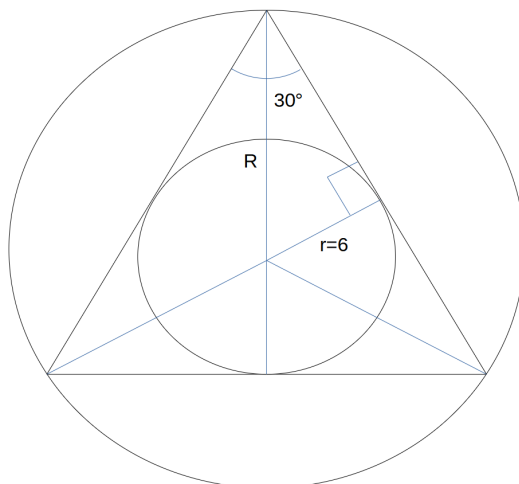
Vastaus: 8,5 cm 1 p. (yht. 6 p.)

3.2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Symmetrian vuoksi korkeusjana kulkee ympyrän keskipisteen kautta ja jakaa kolmion huippukulman kahteen yhtä suureen osaan. Tasasivuisen kolmion kulman suuruus on $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$, joten kulman puolikas on $\frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Mallikuva, jota ei vaadita:



Pisteytys: Kuvasta, tai sanallisesta selityksestä, jossa kuvataan janojen piirtämisen kuvioon 1 p.

Muodostuu suorakulmainen kolmio, jossa on 30° kulma 2 p. (yht. 9 p.), kyseisen kulman vastaisen kateetin pituus on $r = 6,0 \text{ cm}$ ja hypotenuusa on ison ympyrän säde R .

Ratkaistaan kolmion kaikkien kärkien kautta kulkevan ympyrän säde R suorakulmaisen kolmion trigonometrian avulla.

$$\sin(30^\circ) = \frac{6}{R} \quad \text{2 p. (yht. 11 p.)} \quad || \cdot R$$

$$R \cdot \sin(30^\circ) = 6 \quad || : \sin(30^\circ)$$

$$R = \frac{6}{\sin(30^\circ)}$$

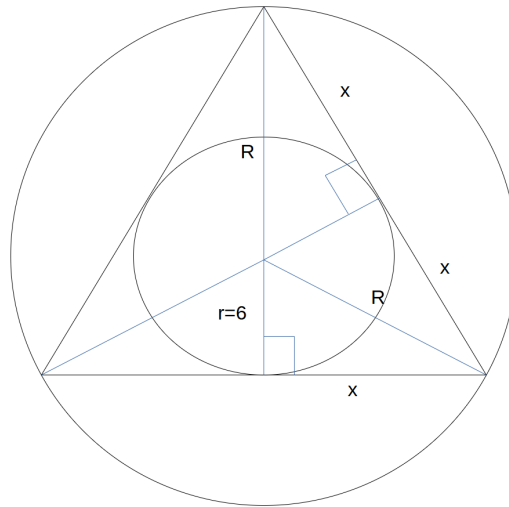
$$R = 12 \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: 12 cm

Ratkaisuvaihtoehto 2

Symmetrian vuoksi korkeusjana kulkee ympyrän keskipisteen kautta ja jakaa kolmion sivun kahteen yhtä pitkään osaan. Merkitään kolmion sivun puolikkaasta kirjaimella x

Mallikuva, jota ei vaadita:



Pisteytys: Kuvasta, tai sanallisesta selityksestä, jossa kuvataan janojen piirtäminen kuvioon 1 p.

Muodostetaan yhtälö tasasivuisen kolmion puolikkaasta Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 + (6 + R)^2 = (2x)^2 \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

$$x^2 + (6 + R)(6 + R) = 2^2 x^2$$

$$x^2 + 6 \cdot 6 + 6 \cdot R + R \cdot 6 + R \cdot R = 4x^2$$

$$x^2 + 36 + 6R + 6R + R^2 = 4x^2 \quad \parallel - x^2$$

$$36 + 12R + R^2 = 4x^2 - x^2$$

$$36 + 12R + R^2 = 3x^2 \quad (1)$$

Muodostetaan vastaavasti yhtälö suorakulmaisesta kolmiosta, jonka kateetit ovat tasasivuisen kolmion sivun puolikas x , pienen ympyrän säde $r = 6$ cm ja hypotenuusa on ison ympyrän säde R .

$$x^2 + 6^2 = R^2 \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

$$x^2 = R^2 - 6^2$$

$$x^2 = R^2 - 36$$

Sijoitetaan saatu tulos yhtälöön (1) (1 p. (yht. 10 p.)

$$36 + 12R + R^2 = 3x^2 \quad \| x^2 = R^2 - 6^2$$

$$36 + 12R + R^2 = 3(R^2 - 36)$$

$$36 + 12R + R^2 = 3R^2 - 3 \cdot 36$$

$$36 + 12R + R^2 = 3R^2 - 108 \quad \| -3R^2 + 108$$

$$R^2 - 3R^2 + 12R + 36 + 108 = 0$$

$$-2R^2 + 12R + 144 = 0 \quad \| : 2$$

$$-R^2 + 6R + 72 = 0$$

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa. (1 p. (yht. 11 p.)

$$R = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 72}}{2 \cdot (-1)}$$

$$R = \frac{-6 \pm \sqrt{324}}{-2}$$

$$R = \frac{-6 \pm 18}{-2}$$

$$R = \frac{-6 + 18}{-2} \quad \text{tai} \quad R = \frac{-6 - 18}{-2}$$

$$R = -6 \quad \text{tai} \quad R = 12$$

Säde ei voi olla negatiivinen, joten $R = 12$ cm. (1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: 12 cm

Ratkaisuvaihtoehto 3

Taulukoista löydetään seuraavat kaavat: kun tasasivuisen kolmion sivun pituus on a , on kolmion sisään piirretyn ympyrän säde $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ 2 p. (yht. 8 p.) ja ympäri piirretyn ympyrän säde $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ 2 p. (yht. 10 p.). Siis $R = 2r$. 1 p. (yht. 11 p.)

Tehtävänannon mukaan $r = 6,0 \text{ cm}$, joten $R = 2 \cdot 6,0 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: 12 cm

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

4. Frekvenssitaulukko (12 p.)

Aineisto:

4. A [Taulukko: Koirien selän pituus](#)

Taulukossa [4.A](#) on esitetty aineisto beagle-koirien selän pituudesta.

1. Mikä on aineiston tyyppiarvo eli moodi? (2 p.)
2. Kuinka monta koiraa aineistoon sisältyy? (2 p.)
3. Mikä on aineiston koirien selän pituuden keskiarvo? (8 p.)

Ratkaisu.

- 4.1 Aineiston tyyppiarvo eli moodi on se aineiston arvo, jonka frekvenssi on suurin. Aineiston perusteella suurin frekvenssi (11) on koirilla, joiden selän korkeus on 47 cm.

Vastaus: Tyyppiarvo eli moodi on 47 cm.

Pisteytys: Moodin selittämisestä 1 p., oikeasta lukuarvosta 1 p. Vaihtoehtoisesti pelkästä oikeasta lukuarvosta 2 p.

- 4.2 Aineistoon sisältyvien koirien lukumäärä on frekvenssien summa. Lasketaan siis frekvenssit yhteen:

$$n = 1 + 0 + 8 + 7 + 4 + 11 + 3$$

1 p. (yht. 3 p.)

$$n = 34$$

Vastaus: Aineistoon kuuluu 34 koiraa.

1 p. (yht. 4 p.)

- 4.3 Koirien selän pituuden keskiarvo voidaan laskea frekvenssien avulla:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 42 + 0 \cdot 43 + 8 \cdot 44 + 7 \cdot 45 + 4 \cdot 46 + 11 \cdot 47 + 3 \cdot 48}{34}$$

4 p. (yht. 8 p.)

$$= \frac{1554}{34}$$

2 p. (yht. 10 p.)

$$= 45,70588 \dots$$

$$\approx 45,7$$

Vastaus: Koirien selän pituuden keskiarvo on 45,7 cm. 2 p. (yht. 12 p.)

Pisteytyksestä:

- Jos ei ole antanut tarkkaa arvoa $\frac{1\,554}{34}$, saa pelkästä oikeasta vastauksesta 4 p.
- Myös vastaus 46 cm hyväksytään.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

5. Päivämatkan pituus (12 p.)

Aku ja Aulis ovat pitkällä vaelluksella. Käveltyään eräänä päivänä kolmasosan päivämatkastaan he päättävät kävellä vielä 7 km ennen lounastaukoa. Lounaan jälkeen he huomaavat, että jäljellä on puolet aiotusta päivämatkasta. Kuinka pitkä aiottu päivämatka on?

Ratkaisu.

Merkitään päivämatkan pituutta kilometreinä kirjaimella x . 1 p. (yht. 1 p.)

Kun Aku ja Aulis olivat kävelleet kolmasosan päivämatkastaan, olivat he kävelleet matkan $\frac{1}{3}x$.

Ennen lounastaukoa Aku ja Aulis kävelivät päivämatkastaan kolmasosan lisäksi 7 kilometriä. Tällöin he olivat kävelleet ennen lounastaukoa matkan $\frac{1}{3}x + 7$. 2 p. (yht. 3 p.)

Toisaalta Aku ja Aulis olivat kävelleet lounastaukoon mennessä puolet päivämatkasta eli $\frac{1}{2}x$. 2 p. (yht. 5 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 1

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan yhtälöstä x laskinohjelmalla.

$$\frac{1}{3}x + 7 = \frac{1}{2}x$$
 3 p. (yht. 8 p.)

Yhtälö voidaan esittää myös muodossa

$$\frac{1}{3}x + 7 + \frac{1}{2}x = x$$

tai muodossa

$$\frac{1}{3}x + 7 = x - \frac{1}{2}x.$$

Laskinohjelmalla 2 p. (yht. 10 p.) saadaan ratkaisu $x = 42$.

Aiotun päivämatkan pituus oli siis 42 kilometriä. 2 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: 42 kilometriä

Ratkaisuvaihtoehto 2

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x .

$$\frac{1}{3}x + 7 = \frac{1}{2}x \quad \text{3 p. (yht. 8 p.)} \quad || \cdot 6 \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

$$\frac{6}{3}x + 42 = \frac{6}{2}x$$

$$2x + 42 = 3x \quad \text{2 p. (yht. 11 p.)} \quad || - 2x$$

$$42 = 3x - 2x$$

$$42 = x$$

$$x = 42$$

Aiotun päivämatkan pituus oli siis 42 kilometriä. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: 42 kilometriä

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

6. Voiton tavoittelu (12 p.)

Tarkastellaan jälleenmyyjän tekemää voittoa. Yksinkertaisuuden vuoksi tehtävässä ei oteta verotusta huomioon.

1. Jälleenmyyjä maksoi takista tukkukauppiaalle 120 euroa. Takki ei mennyt kaupaksi, joten jälleenmyyjä alensi hintaa 10 %:a. Mikä takin myyntihinnan pitää olla, jotta 10 %:n alennuksen jälkeen jälleenmyyjä tekee 20 %:a voittoa? (6 p.)
2. Jälleenmyyjä maksoi juhlakengistä tukkukauppiaalle 140 euroa ja asetti kenkien hinnaksi 199 euroa. Kengät eivät kuitenkaan menneet kaupaksi tähän hintaan, joten jälleenmyyjä päätti alentaa hintaa. Mikä on suurin mahdollinen alennusprosentti, jos hän haluaa tehdä vähintään 20 %:a voittoa ja alennusprosentin pitää olla kokonaisluku? (6 p.)

Ratkaisu.

6.1. Merkitään takin myyntihintaa euroina kirjaimella x .

Jälleenmyyjä alensi takin hintaa 10 %, jolloin takin uusi hinta oli $100 \% - 10 \% = 90 \%$ myyntihinnasta eli myyntihintaan nähden 0,90-kertainen. Takin hinta 10 prosentin alennuksen jälkeen oli siis $0,90 \cdot x$. 1 p. (yht. 1 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 1

Jälleenmyyjä halusi tehdä 20 % voittoa, joten alennetun myyntihinnan piti olla $100 \% + 20 \% = 120 \%$ ostohinnasta eli ostohintaan nähden 1,20-kertainen. Jälleenmyyjä maksoi takista 120 euroa, joten tehdäkseen 20 prosenttia voittoa, tuli hänen saada takista

$$1,20 \cdot 120 \text{ €} \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)} = 144 \text{ €}. \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Alennettu myyntihinta oli $0,90x$. Toisaalta alennettu myyntihinta oli 144 euroa, jotta jälleenmyyjä sai 20 prosentin voiton. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x .

$$0,90 \cdot x = 144 \quad || : 0,90 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

$$x = 160 \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

Yhtälö voidaan ratkaista myös laskinohjelmalla, kunhan tämä kirjoitetaan selkeästi malliratkaisuun.

Takin myyntihinnan tuli siis olla 160 euroa. 1 p. (yht. 6 p.)

Vastaus: 160 euroa

Ratkaisuvaihtoehto 2

Jälleenmyyjä halusi tehdä 20 % voittoa, joten voiton suuruus 120 euron takista tuli olla

$$0,20 \cdot 120 \text{ €} = 24 \text{ €}. \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

Jotta jälleenmyyjä saisi takista 24 euroa voittoa, olisi takin alennetun myyntihinnan oltava

$$120 \text{ €} + 24 \text{ €} = 144 \text{ €}. \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Alennettu myyntihinta oli $0,90x$. Toisaalta alennettu myyntihinta oli 144 euroa, jotta jälleenmyyjä sai 20 prosentin voiton. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x .

$$0,90 \cdot x = 144 \quad || : 0,90 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

$$x = 160 \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

Yhtälö voidaan ratkaista myös laskinohjelmalla, kunhan tämä kirjoitetaan selkeästi malliratkaisuun.

Takin myyntihinnan tuli siis olla 160 euroa. 1 p. (yht. 6 p.)

Vastaus: 160 euroa

6.2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Jälleenmyyjä halusi tehdä 20 % voittoa, joten alennetun myyntihinnan pitää olla $100 \% + 20 \% = 120 \%$ ostohinnasta eli ostohintaan nähden 1,20-kertainen. Jälleenmyyjä maksoi kengistä 140 euroa, joten tehdäkseen 20 prosenttia voittoa, tuli hänen saada kengistä vähintään

$$1,20 \cdot 140 \text{ €} = 168 \text{ €}.$$

Merkitään alennusprosenttia kirjaimella x .

Kenkien alkuperäinen myyntihinta oli 199 euroa. Kun alkuperäistä hintaa alennettiin x prosenttia, alkuperäinen hinta $\left(1 - \frac{x}{100}\right)$ -kertaistui. Kenkien alennettu hinta oli siis $\left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot 199$. Toisaalta jälleenmyyjä halusi kengistä vähintään 168 euroa. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan siitä x .

$$\left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot 199 \geq 168$$

Laskinohjelmalla saadaan ratkaisu $x \leq 15,577 \dots$

Suurin mahdollinen alennusprosentti on siis 15.

Vastaus: Suurin mahdollinen alennusprosentti on 15.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Jälleenmyyjä halusi tehdä 20 % voittoa, joten voiton suuruus 140 euron kengistä tuli olla vähintään

$$0,20 \cdot 140 \text{ €} = 28 \text{ €}.$$

Tällöin kenkien alennetun myyntihinnan tuli olla vähintään

$$140 \text{ €} + 28 \text{ €} = 168 \text{ €}.$$

Kenkien alkuperäinen myyntihinta oli 199 euroa, joten kenkien alennetun myyntihinnan tuli olla vähintään

$$\frac{168 \text{ €}}{199 \text{ €}} = 0,84422 \dots = 84,422 \dots \%$$

alkuperäisistä myyntihinnasta.

Kengistä voitiin antaa alennusta siis korkeintaan

$$100 \% - 84,422 \dots \% = 15,577 \dots \%. \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)})$$

Koska alennusprosentin oli oltava kokonaisluku, niin suurin mahdollinen alennusprosentti oli 15. 1 p. (yht. 12 p.)

Jos alennusprosentti olisi 16 kenkien myyntihinta olisi

$$0,84 \cdot 199 \text{ €} = 167,16 \text{ €},$$

jolloin jälleenmyyjä ei saisi 20 prosentin voittoa, sillä hänen tuli saada kengistä vähintään 168 euroa.

Vastaus: Suurin mahdollinen alennusprosentti on 15.

Ratkaisuvaihtoehto 3

Jälleenmyyjä halusi tehdä 20 % voittoa, joten alennetun myyntihinnan pitää olla $100 \% + 20 \% = 120 \%$ ostohinnasta eli ostohintaan nähden 1,20-kertainen. Jälleenmyyjä maksoi kengistä 140 euroa, joten tehdäkseen 20 prosenttia voittoa, tuli hänen saada kengistä vähintään

$$1,20 \cdot 140 \text{ €} \quad (1 \text{ p. (yht. 7 p.)}) = 168 \text{ €}. \quad (1 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

Etsitään kokeilemalla sopiva alennusprosentti.

Kun alennusprosentti on 15, on hinta $0,85 \cdot 199 \text{ €} = 169,15 \text{ €} > 168 \text{ €}$.
1 p. (yht. 9 p.)

Kun alennusprosentti on 16, on hinta $0,84 \cdot 199 \text{ €} = 167,16 \text{ €} < 168 \text{ €}$.
1 p. (yht. 10 p.)

Vastaus: Suurin mahdollinen alennusprosentti on 15. 2 p. (yht. 12 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

7. Taloudellisempi auto (12 p.)

Aineisto:

7. A [Taulukko: Autojen tiedot](#)

Matti aikoo ostaa joko sähkö- tai polttomoottoriauton. Hän vertailee vaihtoehtoja taulukon [7.A](#) arvioiden perusteella.

Matti tarvitsee auton koko hinnan suuruisen tasalyhennyslainan. Lainan vuosikorko on 2,4 % (jolloin kuukausikorko on 0,2 %) ja lyhennys 200 euroa kuukaudessa.

Laske autojen arvot ja jäljellä olevien lainojen määrät viiden vuoden kuluttua. Laske myös autojen käyttökustannukset ja lainojen korkokustannukset viiden vuoden aikana. Kumpi vaihtoehto olisi ollut viiden vuoden käytön jälkeen taloudellisempi valinta? Tehtävässä ei tarvitse ottaa huomioon rahan arvon muutosta, eli inflaatiota tai deflaatiota.

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Lasketaan ensin kaikki sähköautoon liittyvä. Sähköautoa varten on otettava lainaa 25 000 €. Yksi lyhennys on 200 €, lyhennyksiä on vuodessa 12 ja viidessä vuodessa $5 \cdot 12$. Tällöin lainaa on viiden vuoden kuluttua jäljellä

$$25\,000\text{ €} - 5 \cdot 12 \cdot 200\text{ €} = 13\,000\text{ €}.$$

1 p. (yht. 1 p.)

Sähköauton arvo alenee 8 % vuodessa, joten vuoden päästä arvo on $100\% - 8\% = 92\%$ nykyisestä arvosta, eli nykyiseen arvoon nähden 0,92-kertainen. Kun aikaa kuluu 5 vuotta, arvo tulee

$$0,92 \cdot 0,92 \cdot 0,92 \cdot 0,92 \cdot 0,92 = 0,92^5\text{-kertaiseksi.}$$

Sähköauton arvo on viiden vuoden kuluttua

$$25\,000\text{ €} \cdot 0,92^5 = 16\,477,038\ldots\text{ €} \approx 16\,500\text{ €}.$$

1 p. (yht. 2 p.)

Tasalyhennyslainan korot muodostavat aritmeettisen lukujonon, joten korkojen summa voidaan laskea aritmeettisen summan avulla.

2 p. (yht. 4 p.)

Aritmeettisen summan kaava on

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2},$$

jossa n on yhteenlaskettavien aritmeettisen lukujonon jäsenten määrä, a_1 ensimmäinen yhteenlaskettava jäsen ja a_n viimeinen yhteenlaskettava jäsen.

Ensimmäinen korko on $0,002 \cdot 25\,000 \text{ €} = 50 \text{ €}$. Viiden vuoden aikana viimeisen koron määräytyessä lainaa on jäljellä

$$13\,000 \text{ €} + 200 \text{ €} = 13\,200 \text{ €},$$

joten viimeinen korko on $0,002 \cdot 13\,200 \text{ €} = 26,40 \text{ €}$. Korkojen lukumäärä on $n = 5 \cdot 12 = 60$. Korkokulut ovat

$$S_{60} = 60 \cdot \frac{50 \text{ €} + 26,40 \text{ €}}{2} = 2\,292 \text{ €}. \quad (1 \text{ p. (yht. 5 p.)})$$

Sähkö maksaa yhteensä $5 \cdot 12 \cdot 30 \text{ €} = 1\,800 \text{ €}$.

Muut kulut ovat yhteensä $5 \cdot 800 \text{ €} = 4\,000 \text{ €}$.

Käyttökustannukset ovat $1\,800 \text{ €} + 4\,000 \text{ €} = 5\,800 \text{ €}$. (1 p. (yht. 6 p.)

Lasketaan auton ostajan nettovoitto viiden vuoden kuluttua vähentämällä auton arvosta kaikki maksetut kulut (myös lainan lyhennykset, joita ei ole laskettu edellä) ja jäljellä olevan lainan määrä.

$$\begin{aligned} 16\,477,038 \dots \text{ €} - 2\,292 \text{ €} - 5 \cdot 12 \cdot 200 \text{ €} - 5\,800 \text{ €} - 13\,000 \text{ €} \\ = -16\,614,961 \dots \text{ €} \end{aligned}$$

Nettovoitto on $-16\,614,961 \dots \text{ €}$, eli kuluja on ollut $16\,614,961 \dots \text{ €}$ enemmän kuin auton arvo on.

Lasketaan nyt kaikki polttomoottoriautoon liittyvä.

Polttomoottoriautoa varten on otettava lainaa $12\,000 \text{ €}$. Viiden vuoden kuluttua lainaa on jäljellä

$$12\,000 \text{ €} - 5 \cdot 12 \cdot 200 \text{ €} = 0 \text{ €}. \quad (1 \text{ p. (yht. 7 p.)})$$

Polttomoottoriauton arvo alenee 12% vuodessa, joten vuoden päästä arvo on $100 \% - 12 \% = 88 \%$ nykyisestä arvosta, eli nykyiseen arvoon nähden $0,88$ -kertainen. Kun aikaa kuluu 5 vuotta, arvo tulee

$$0,88 \cdot 0,88 \cdot 0,88 \cdot 0,88 \cdot 0,88 = 0,88^5\text{-kertaiseksi}.$$

Polttomoottoriauton arvo on viiden vuoden kuluttua

$$12\,000 \text{ €} \cdot 0,88^5 = 6\,332,783 \dots \text{ €} \approx 6\,300 \text{ €}. \quad (1 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

Ensimmäinen korko on $0,002 \cdot 12\,000 \text{ €} = 24 \text{ €}$. Viimeinen korko on $0,002 \cdot 200 \text{ €} = 0,40 \text{ €}$. Korkokulut ovat yhteensä

$$S_{60} = 60 \cdot \frac{24 \text{ €} + 0,40 \text{ €}}{2} = 732 \text{ €}. \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

Polttoainekulut ovat yhteensä $5 \cdot 12 \cdot 150 \text{ €} = 9\,000 \text{ €}$.

Muut kulut ovat yhteensä $5 \cdot 1\,200 \text{ €} = 6\,000 \text{ €}$.

Käyttökustannukset ovat yhteensä $9\,000 \text{ €} + 6\,000 \text{ €} = 15\,000 \text{ €}$. 1 p. (yht. 10 p.)

Nettovoitto viiden vuoden kuluttua on

$$\begin{aligned} 6\,332,783 \dots \text{ €} - 732 \text{ €} - 5 \cdot 12 \cdot 200 \text{ €} - 15\,000 \text{ €} \\ = -21\,399,216 \dots \text{ €,} \end{aligned}$$

joten polttomoottoriauto tulee kalliimmaksi kuin sähköauto.

Vastaus:

Sähköauto: arvo on viiden vuoden kuluttua $16\,500 \text{ €}$, lainaa on viiden vuoden kuluttua jäljellä $13\,000 \text{ €}$, korkokustannukset ovat viiden vuoden aikana $2\,292 \text{ €}$ ja käyttökustannukset $5\,800 \text{ €}$.

Polttomoottoriauto: arvo on viiden vuoden kuluttua $6\,300 \text{ €}$, lainaa on viiden vuoden kuluttua jäljellä 0 € , korkokustannukset ovat viiden vuoden aikana 732 € ja käyttökustannukset $15\,000 \text{ €}$.

Sähköauto on taloudellisempi valinta. 2 p. (yht. 12 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 2

Lasketaan ensin kaikki sähköautoon liittyvä.

Sähköautoa varten on otettava lainaa $25\,000 \text{ €}$. Yksi lyhennys on 200 € , lyhennyksiä on vuodessa 12 ja viidessä vuodessa $5 \cdot 12$.

Tällöin lainaa on viiden vuoden kuluttua jäljellä

$$25\,000 \text{ €} - 5 \cdot 12 \cdot 200 \text{ €} = 13\,000 \text{ €}. \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

Sähköauton arvo alenee 8 % vuodessa, joten vuoden päästä arvo on $100 \% - 8 \% = 92 \%$ nykyisestä arvosta, eli nykyiseen arvoon nähden 0,92-kertainen. Kun aikaa kuluu 5 vuotta, arvo tulee

$$0,92 \cdot 0,92 \cdot 0,92 \cdot 0,92 \cdot 0,92 = 0,92^5\text{-kertaiseksi.}$$

Sähköauton arvo on viiden vuoden kuluttua

$$25\,000\text{ €} \cdot 0,92^5 = 16\,477,038 \dots \text{ €} \approx 16\,500\text{ €}. \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

Lasketaan korkokulut LibreOffice Calcilla.

	A	B	C
1	Sähköauto		
2		Lainapääoma ennen	
	Maksuerä	lyhennystä (€)	Korko (€)
3	1	25000	=0,002*B3
4	=A3+1	=B3-200	=0,002*B4
5	=A4+1	=B4-200	=0,002*B5
6	=A5+1	=B5-200	=0,002*B6
7	=A6+1	=B6-200	=0,002*B7

...

59	=A58+1	=B58-200	=0,002*B59
60	=A59+1	=B59-200	=0,002*B60
61	=A60+1	=B60-200	=0,002*B61
62	=A61+1	=B61-200	=0,002*B62
63		Yhteensä	=SUMMA(C3:C62)

	A	B	C
1	Sähköauto		
2		Lainapääoma ennen	
	Maksuerä	lyhennystä (€)	Korko (€)
3	1	25000	50
4	2	24800	49,6
5	3	24600	49,2
6	4	24400	48,8
7	5	24200	48,4

...

59	57	13800	27,6
60	58	13600	27,2
61	59	13400	26,8
62	60	13200	26,4
63		Yhteensä	2292

1 p. (yht. 3 p.)

Korkokulut ovat 2 292 €. 1 p. (yht. 4 p.)

Sähkö maksaa yhteensä $5 \cdot 12 \cdot 30 \text{ €} = 1\,800 \text{ €}$.

Muut kulut ovat yhteensä $5 \cdot 800 \text{ €} = 4\,000 \text{ €}$.

Käyttökustannukset ovat $1\,800 \text{ €} + 4\,000 \text{ €} = 5\,800 \text{ €}$. 1 p. (yht. 5 p.)

Lasketaan auton ostajan nettovoitto viiden vuoden kuluttua vähentämällä auton arvosta kaikki maksetut kulut (myös lainan lyhennykset, joita ei ole laskettu edellä) ja jäljellä olevan lainan määrä.

$$\begin{aligned} 16\,477,038 \dots \text{ €} - 2\,292 \text{ €} - 5 \cdot 12 \cdot 200 \text{ €} - 5\,800 \text{ €} - 13\,000 \text{ €} \\ = -16\,614,961 \dots \text{ €} \end{aligned}$$

Nettovoitto on $-16\,614,961 \dots \text{ €}$, eli kuluja on ollut $16\,614,961 \dots \text{ €}$ enemmän kuin auton arvo on.

Lasketaan nyt kaikki polttomoottoriautoon liittyvä.

Polttomoottoriautoa varten on otettava lainaa 12 000 €. Viiden vuoden kuluttua lainaa on jäljellä

$$12\,000 \text{ €} - 5 \cdot 12 \cdot 200 \text{ €} = 0 \text{ €}. \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

Polttomoottoriauton arvo alenee 12 % vuodessa, joten vuoden päästä arvo on $100 \% - 12 \% = 88 \%$ nykyisestä arvosta, eli nykyiseen arvoon nähden 0,88-kertainen. Kun aikaa kuluu 5 vuotta, arvo tulee

$$0,88 \cdot 0,88 \cdot 0,88 \cdot 0,88 \cdot 0,88 = 0,88^5\text{-kertaiseksi.}$$

Polttomoottoriauton arvo on viiden vuoden kuluttua

$$12\,000 \text{ €} \cdot 0,88^5 = 6\,332,783 \dots \text{ €} \approx 6\,300 \text{ €}. \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

Lasketaan korkokulut LibreOffice Calcilla.

D	E	F
Polttomoottoriauto		
	Lainapääoma ennen lyhennystä	
Maksuerä (€)		Korko (€)
1	12000	=0,002*E3
=D3+1	=E3-200	=0,002*E4
=D4+1	=E4-200	=0,002*E5
=D5+1	=E5-200	=0,002*E6
=D6+1	=E6-200	=0,002*E7

...

=D58+1	=E58-200	=0,002*E59
=D59+1	=E59-200	=0,002*E60
=D60+1	=E60-200	=0,002*E61
=D61+1	=E61-200	=0,002*E62
	Yhteensä	=SUMMA(F3:F62)

Polttomoottoriauto		
	Lainapääoma ennen lyhennystä	
Maksuerä	(€)	Korko (€)
1	12000	24
2	11800	23,6
3	11600	23,2
4	11400	22,8
5	11200	22,4

...

57	800	1,6
58	600	1,2
59	400	0,8
60	200	0,4
	Yhteensä	732

1 p. (yht. 8 p.)

Korkokulut ovat 732 €. 1 p. (yht. 9 p.)

Polttoainekulut ovat yhteensä $5 \cdot 12 \cdot 150 \text{ €} = 9\,000 \text{ €}$.Muut kulut ovat yhteensä $5 \cdot 1\,200 \text{ €} = 6\,000 \text{ €}$.Käyttökustannukset ovat yhteensä $9\,000 \text{ €} + 6\,000 \text{ €} = 15\,000 \text{ €}$. 1 p. (yht. 10 p.)

Nettovoitto viiden vuoden kuluttua on

$$6\,332,783 \dots \text{ €} - 732 \text{ €} - 5 \cdot 12 \cdot 200 \text{ €} - 15\,000 \text{ €} \\ = -21\,399,216 \dots \text{ €,}$$

joten polttomoottoriauto tulee kalliimmaksi kuin sähköauto.

Vastaus:

Sähköauto: arvo on viiden vuoden kuluttua 16 500 €, lainaa on viiden vuoden kuluttua jäljellä 13 000 €, korkokustannukset ovat viiden vuoden aikana 2 292 € ja käyttökustannukset 5 800 €.

Polttomoottoriauto: arvo on viiden vuoden kuluttua 6 300 €, lainaa on viiden vuoden kuluttua jäljellä 0 €, korkokustannukset ovat viiden vuoden aikana 732 € ja käyttökustannukset 15 000 €.

Sähköauto on taloudellisempi valinta. 2 p. (yht. 12 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

8. Suurin arvo (12 p.)

Lukuun 10 lisätään erään positiivisen luvun neliön ja kuution erotus. Määritä derivaatan avulla suurin mahdollinen arvo, joka näin voidaan saada.

Ratkaisu.

Merkitään lukua kirjaimella x . Luku x on positiivinen, joten $x > 0$. **Positiivisen luvun x neliö on x^2 ja kuutio x^3 .** Kun lukuun 10 lisätään positiivisen luvun neliön ja kuution erotus, saadaan funktio

$$f(x) = 10 + (x^2 - x^3) = -x^3 + x^2 + 10. \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)}$$

Ratkaisuvaihtoehto 1

Tallennetaan funktio muistiin laskinohjelmalla. Tässä on käytetty GeoGebraa.

1	$f(x) := 10 + (x^2 - x^3)$
•	$\rightarrow f(x) := -x^3 + x^2 + 10$

Funktion f suurin arvo löydetään derivaatan nollakohtien avulla.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat laskinohjelmalla.

2	Ratkaise($f'(x)=0$)
○	$\rightarrow \left\{ x = 0, x = \frac{2}{3} \right\}$

Laskinohjelmalla saadaan, että derivaatan nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = \frac{2}{3}$. 4 p. (yht. 6 p.)
Koska luku x oli positiivinen, on oltava $x > 0$, joten ainoastaan ratkaisu $x = \frac{2}{3}$ kelpaa.

Ratkaistaan laskinohjelmalla, milloin derivaatta saa negatiivisia arvoja ja milloin positiivisia arvoja.

3	Ratkaise($f'(x) < 0$)
○	$\rightarrow \left\{ x < 0, x > \frac{2}{3} \right\}$
4	Ratkaise($f'(x) > 0$)
○	$\rightarrow \left\{ 0 < x < \frac{2}{3} \right\}$

2 p. (yht. 8 p.)

Koska $f'(x) \geq 0$, kun $0 < x \leq \frac{2}{3}$ ja $f'(x) \leq 0$, kun $x \geq \frac{2}{3}$, niin funktio on kasvava, kun $0 < x \leq \frac{2}{3}$ ja vähenevä, kun $x \geq \frac{2}{3}$. Funktio saa siis suurimman arvonsa kohdassa $x = \frac{2}{3}$. 2 p. (yht. 10 p.) Lasketaan funktion suurin arvo laskinohjelmalla.

5

→

$f(2/3)$
 $\frac{274}{27}$

Funktion suurin arvo on siis $f\left(\frac{2}{3}\right)$ 1 p. (yht. 11 p.) $= \frac{274}{27}$ 1 p. (yht. 12 p.) $= 10,148 \dots$

Vastaus: Suurin mahdollinen arvo on $\frac{274}{27}$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = -3x^2 + 2x$$
 2 p. (yht. 4 p.)

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -3x^2 + 2x &= 0 \end{aligned}$$

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 0}}{2 \cdot (-3)}$$
 1 p. (yht. 5 p.)

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4}}{-6}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2}{-6}$$

$$x = \frac{-2 + 2}{-6} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2 - 2}{-6}$$

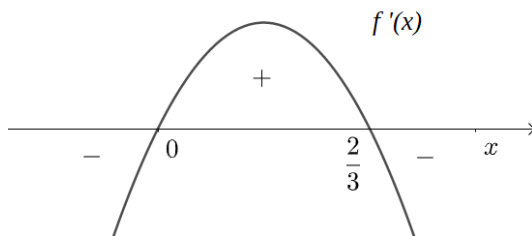
$$x = \frac{0}{-6} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-4}{-6}$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2}{3}$$
 1 p. (yht. 6 p.)

Koska luku x oli positiivinen, on oltava $x > 0$, joten ainoastaan ratkaisu $x = \frac{2}{3}$ kelpaa.

Hahmotellaan funktion f' kuvaaja. Funktion $f'(x) = -3x^2 + 2x$ kuvaaja on paraabeli, koska kyseessä on toisen asteen polynomifunktio. Koska toisen asteen termin kerroin on negatiivinen, paraabeli aukeaa alaspäin.

1 p. (yht. 7 p.)



1 p. (yht. 8 p.)

Muodostetaan kulkukaavio kuvaajan perusteella.

	0	$\frac{2}{3}$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$		

max

2 p. (yht. 10 p.)

Kulkukaavion perusteella funktio f saa suurimman arvonsa kohdassa $x = \frac{2}{3}$.

Funktion suurin arvo on siis

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{2}{3}\right) &= -\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 10 \\
 &= -\frac{8}{27} + \frac{4}{9} + 10 \\
 &= \frac{247}{27} \\
 &= 10,148\dots
 \end{aligned}$$

Vastaus: Suurin mahdollinen arvo on $\frac{247}{27}$.

Ratkaisuvaihtoehto 3

Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = -3x^2 + 2x \quad (2 \text{ p. (yht. 4 p.)})$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$-3x^2 + 2x = 0$$

$$x(-3x + 2) = 0$$

Käytetään tulon nollasääntöä. Tulo on nolla täsmälleen silloin, kun jokin (yksi tai useampi) sen tekijöistä on nolla.

$$x(-3x + 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad -3x + 2 = 0 \quad (1 \text{ p. (yht. 5 p.)}) \quad \parallel -2$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad -3x = -2 \quad \parallel : (-3)$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2}{3} \quad (1 \text{ p. (yht. 6 p.)})$$

Koska luku x oli positiivinen, on oltava $x > 0$, joten ainoastaan ratkaisu $x = \frac{2}{3}$ kelpaa.

Lasketaan derivaatan merkki derivaatan nollakohdan kummallakin puolella.

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4} > 0$$

$$f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = -3 + 2 = -1 < 0 \quad (2 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

Muodostetaan kulkukaavio.

	0	$\frac{2}{3}$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$		

max

(2 p. (yht. 10 p.)

Kulkukaavion perusteella funktio f saa suurimman arvonsa kohdassa $x = \frac{2}{3}$. Funktion suurin arvo on siis

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}\right) & \text{1 p. (yht. 11 p.)} = -\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 10 \\ & = -\frac{8}{27} + \frac{4}{9} + 10 \\ & = \frac{247}{27} \text{1 p. (yht. 12 p.)} \\ & = 10,148 \dots \end{aligned}$$

Vastaus: Suurin mahdollinen arvo on $\frac{247}{27}$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

9. Monivalintakoe (12 p.)

Kokeessa on 10 monivalintatehtävää. Jokaisessa tehtävässä on neljä vaihtoehtoa, joista vain yksi on oikein. Oikeasta vastauksesta saa 3 pistettä ja väärästä saa -1 pistettä. Lopuksi pisteet lasketaan yhteen, ja jos summa on negatiivinen, se muutetaan pistemääräksi nolla.

1. Eräs opiskelija ei osaa vastata yhteenkään tehtävään tietojensa pohjalta, ja hän vastaa kaikkiin tehtäviin arvaamalla. Millä todennäköisyydellä hän saa kokeesta nolla pistettä? (6 p.)
2. Toinen opiskelija pystyy sulkemaan jokaisesta tehtävästä pois yhden väärän vastausvaihtoehdon, ja hän vastaa kaikkiin tehtäviin arvaamalla jäljellä olevista vaihtoehdoista. Millä todennäköisyydellä hän saa kokeesta täydet pisteet? (6 p.)

Ratkaisu.

9.1.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Todennäköisyys, että monivalintatehtävä menee oikein, on $\frac{1}{4}$. Tällöin todennäköisyys, että monivalintatehtävä menee väärin, on $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Selvitetään, kuinka monella oikealla vastauksella kokeen yhteispistemäärä on 0:

Kun oikeita vastauksia on nolla, niin kokeen yhteispistemäärä on $-1 \cdot 10 = -10$. Yhteispistemäärä on negatiivinen, joten kokeen pistemääräksi tulee nolla.

Kun oikeita vastauksia on yksi, niin kokeen yhteispistemäärä on

$$3 + (-1 \cdot 9) = 3 - 9 = -6.$$

Yhteispistemäärä on negatiivinen, joten kokeen pistemääräksi tulee nolla.

Kun oikeita vastauksi on kaksi, niin kokeen yhteispistemäärä on

$$2 \cdot 3 + (-1 \cdot 8) = 6 - 8 = -2.$$

Yhteispistemäärä on negatiivinen, joten kokeen pistemääräksi tulee nolla.

Kun oikeita vastauksia on kolme, niin kokeen yhteispistemäärä on

$$3 \cdot 3 + (-1 \cdot 7) = 9 - 7 = 2.$$

Opiskelija saa kokeesta nolla pistettä, jos hänellä on korkeintaan kaksi tehtävää oikein. 2 p. (yht. 2 p.)

Tapahtuma "korkeintaan 2 oikein" on sama kuin "0 oikein tai 1 oikein tai 2 oikein". Koska nämä tapahtumat ovat erilliset, niin

$$P(\text{korkeintaan 2 oikein})$$

$$= P(0 \text{ oikein}) + P(1 \text{ oikein}) + P(2 \text{ oikein})$$

$$= \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10-0} + \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10-1}$$

$$+ \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10-2} \quad \text{2 p. (yht. 4 p.)}$$

$$= 0,525 \dots \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

$$\approx 0,53 \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Todennäköisyys, että monivalintatehtävä menee oikein, on $\frac{1}{4}$.

Selvitetään, kuinka monella oikealla vastauksella kokeen yhteispistemäärä on 0:

Kun oikeita vastauksia on nolla, niin kokeen yhteispistemäärä on $-1 \cdot 10 = -10$. Yhteispistemäärä on negatiivinen, joten kokeen pistemääräksi tulee nolla.

Kun oikeita vastauksia on yksi, niin kokeen yhteispistemäärä on

$$3 + (-1 \cdot 9) = 3 - 9 = -6.$$

Yhteispistemäärä on negatiivinen, joten kokeen pistemääräksi tulee nolla.

Kun oikeita vastauksi on kaksi, niin kokeen yhteispistemäärä on

$$2 \cdot 3 + (-1 \cdot 8) = 6 - 8 = -2.$$

Yhteispistemäärä on negatiivinen, joten kokeen pistemääräksi tulee nolla.

Kun oikeita vastauksia on kolme, niin kokeen yhteispistemäärä on

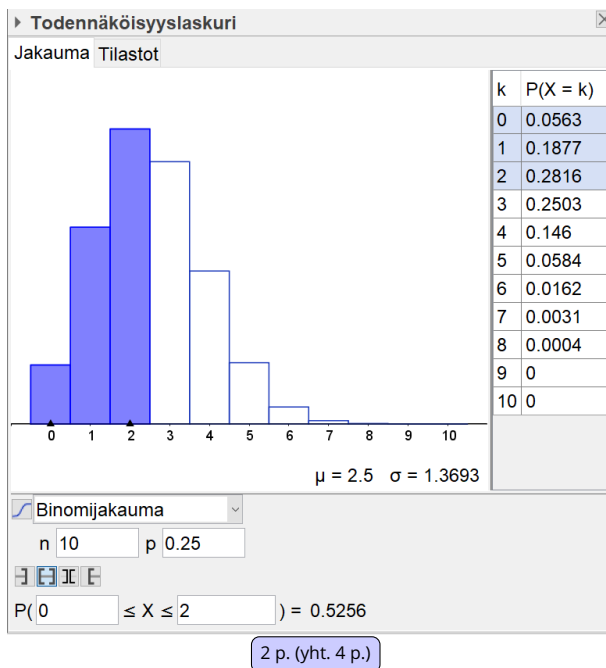
$$3 \cdot 3 + (-1 \cdot 7) = 9 - 7 = 2.$$

Opiskelija saa kokeesta nolla pistettä, jos hänellä on korkeintaan kaksi tehtävää oikein. 2 p. (yht. 2 p.)

Tapahtuma "korkeintaan 2 oikein" on sama kuin "0 oikein tai 1 oikein tai 2 oikein". Koska nämä tapahtumat ovat erilliset, niin

$$P(\text{korkeintaan 2 oikein}) = P(0 \text{ oikein}) + P(1 \text{ oikein}) + P(2 \text{ oikein})$$

Lasketaan tämä todennäköisyys GeoGebran todennäköisyyslaskurilla käyttäen binomijakaumaa:



Siis $P(\text{korkeintaan 2 oikein}) = 0,525 \dots$ 1 p. (yht. 5 p.) $\approx 0,53$. 1 p. (yht. 6 p.)

9.2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Opiskelija pystyy sulkemaan jokaisesta tehtävästä yhden väärän vastausvaihtoehdon pois, joten todennäköisyys, että tehtävä saadaan arvaamalla oikein, on $\frac{1}{3}$. 2 p. (yht. 8 p.)

Lasketaan todennäköisyys, kun kaikki monivalintatehtävät arvataan oikein:

$$P(10 \text{ oikein}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \quad \text{2 p. (yht. 10 p.)} = \frac{1}{59\,049} \approx 0,000017 \quad \text{2 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: 1. 0,53 2. $\frac{1}{59\,049} \approx 0,000017$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Opiskelija pystyy sulkemaan jokaisesta tehtävästä yhden väärän vastausvaihtoehdon pois, joten todennäköisyys, että tehtävä saadaan arvaamalla oikein, on $\frac{1}{3}$. 2 p. (yht. 8 p.) Tällöin todennäköisyys, että monivalintatehtävä menee väärin, on $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Lasketaan todennäköisyys, kun kaikki monivalintatehtävät arvataan oikein:

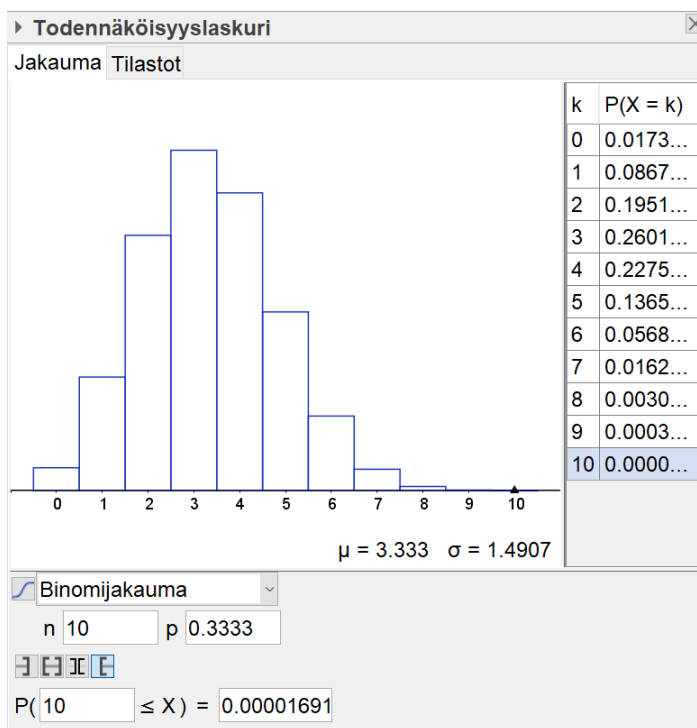
$$\begin{aligned} P(10 \text{ oikein}) &= \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-10} \quad \text{2 p. (yht. 10 p.)} \\ &= \frac{1}{59\,049} \\ &\approx 0,000017 \quad \text{2 p. (yht. 12 p.)} \end{aligned}$$

Vastaus: 1. 0,53 2. $\frac{1}{59\,049} \approx 0,000017$

Ratkaisuvaihtoehto 3

Opiskelija pystyy sulkemaan jokaisesta tehtävästä yhden väärän vastausvaihtoehdon pois, joten todennäköisyys, että tehtävä saadaan arvaamalla oikein, on $\frac{1}{3}$. (2 p. (yht. 8 p.))

Lasketaan todennäköisyys, kun kaikki monivalintatehtävät arvataan oikein, käyttäen GeoGebran todennäköisyyslaskurin binomijakaumaa:



(2 p. (yht. 10 p.))

Siis $P(10 \text{ oikein}) = \frac{1}{59\,049} \approx 0,000017$. (2 p. (yht. 12 p.))

GeoGebran asetuksista tulee muutta pyöristys esimerkiksi 10 desimaalin tarkkuuteen, jotta vastaus näkyy todennäköisyyslaskurissa.

Vastaus: 1. 0,53 2. $\frac{1}{59\,049} \approx 0,000017$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

10. Lukujono (12 p.)

Lukujono alkaa luvuilla 4 ja 9. Kuinka moni lukujonon jäsen on pienempi kuin 1 000, jos lukujono on

1. aritmeettinen (6 p.)
2. geometrinen? (6 p.)

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Lasketaan lukujonojen jäseniä taulukkolaskentaohjelmalla. Lasketaan ensiksi aritmeettisen lukujonon erotusluku ja geometrisen lukujonon peräkkäisten jäsenten välinen suhde:

Aritmeettinen lukujono:

$$d = a_2 - a_1$$

$$d = 9 - 4$$

$$d = 5 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

Geometrinen lukujono:

$$q = \frac{b_2}{b_1}$$

$$q = \frac{9}{4} \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

Tehdään nyt taulukko, kirjoitetaan siihen lukujonojen ensimmäiset jäsenet ja kaavat, joilla seuraavat jäsenet saadaan laskettua:

	A	B	C	D
1		aritmeettinen	geometrinen	
2				
3		d = 9-4	q = 9/4	
4		=5		
5	n			
6	1	4	4	
7	2	9	9	
8	3	=B7+5	=C7*(9/4)	
9	4			

2 p. (yht. 4 p.)

2 p. (yht. 6 p.)

Vedetään kaavat alemmille riveille ja katsotaan, kuinka mones lukujonon jäsen on vielä lukuarvoltaan alle 1000:

	A	B	C	D
1		aritmeettinen	geometrinen	
2				
3		$d = 9-4$	$q = 9/4$	
4		$=5$		
5	n			
6	1	4	4	
7	2	9	9	
8	3	14	20,25	
9	4	19	45,5625	
10	5	24	102,515625	
11	6	29	230,6601563	
12	7	34	518,9853516	
13	8	39	1167,717041	
14	9	44		
15	10	49		
16	11	54		
17	12	59		

1 p. (yht. 7 p.)

Koska $q > 1$, geometrisen lukujonon jäsenet kasvavat järjestysluvun kasvaessa.

1 p. (yht. 8 p.)

Geometrisen lukujonon jäsenistä siis vain seitsemän ensimmäistä ovat pienempiä kuin 1000.

1 p. (yht. 9 p.)

Aritmeettisen lukujonon tapauksessa joudutaan viertämään kuvaa aikalailla alaspäin:

202	197	984	
203	198	989	
204	199	994	
205	200	999	
206	201	1004	
207			

1 p. (yht. 10 p.)

Koska $d > 0$, aritmeettisen lukujonon jäsenet kasvavat järjestysluvun kasvaessa.

1 p. (yht. 11 p.)

Aritmeettisen lukujonon jäsenistä siis vain 200 ensimmäistä ovat pienempiä kuin 1000.

1 p. (yht. 12 p.)

10.1. **Vastaus:** Lukujonon 200 jäsentä ovat pienempiä kuin 1000.

10.2. **Vastaus:** Lukujonon 7 jäsentä ovat pienempiä kuin 1000.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Ratkaistaan lukujonojen yleiset jäsenet ja muodostetaan niiden avulla epäyhtälöt.

10.1 Lasketaan aritmeettisen lukujonon erotusluku:

$$d = a_2 - a_1$$

$$d = 9 - 4$$

$$d = 5 \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)})$$

Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen on nyt

$$a_n = (n - 1) \cdot d + a_1$$

$$a_n = (n - 1) \cdot 5 + 4 \quad (2 \text{ p. (yht. 3 p.)})$$

$$a_n = 5n - 5 + 4$$

$$a_n = 5n - 1$$

Ratkaistaan epäyhtälö, jossa tämä yleinen jäsen on pienempi kuin 1000:

$$a_n < 1000 \quad (1 \text{ p. (yht. 4 p.)})$$

$$(n - 1) \cdot 5 + 4 < 1000 \quad || \text{laskinohjelmalla}$$

$$n < 200,2 \quad (1 \text{ p. (yht. 5 p.)})$$

Suurin n :n arvo, jolla epäyhtälö vielä toteutuu on siis $n = 200$. Siis lukujonon 200 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 1000. (1 p. (yht. 6 p.)

Vastaus: Lukujonon 200 jäsentä ovat pienempiä kuin 1000.

10.2 Lasketaan geometrisen lukujonon peräkkäisten jäsenten välinen suhde:

$$q = \frac{b_2}{b_1}$$

$$q = \frac{9}{4} \quad (1 \text{ p. (yht. 7 p.)})$$

Geometrisen lukujonon yleinen jäsen on nyt

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_n = 4 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{n-1} \quad (2 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

Ratkaistaan epäyhtälö, missä tämä yleinen jäsen on pienempi kuin 1000:

$$b_n < 1000 \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)})$$

$$4 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{n-1} < 1000 \quad || \text{laskinohjelmalla}$$

$$n < 7,808799 \dots \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)})$$

Suurin n :n arvo, jolla epäyhtälö vielä toteutuu on siis $n = 7$. Eli lukujonon 7 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 1000. (1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Lukujonon 7 jäsentä ovat pienempiä kuin 1000.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

11. Virustartunnat (12 p.)

Syksyllä 2020 koronaviruspandemian toisen aallon alkuvaiheessa Suomessa raportoitiin edeltävien kahden viikon (14 vuorokauden) aikana havaittujen tartuntatapauksien lukumääriä. Tämä lukumäärä oli 7. syyskuuta 389 ja kaksi viikkoa myöhemmin 21. syyskuuta 719 koronavirustartuntaa. (Lähde: www.hs.fi. Luettu 21.9.2020.) Oletetaan, että havaittujen tartuntojen määrä noudattaa eksponentiaalista mallia.

1. Kuinka monta koronavirustartuntaa havaittiin mallin mukaan päivämäärää 8.1.2021 edeltävällä kahden viikon jaksolla? Tammikuun 8. päivä on 140 vuorokautta päivämäärän 21.9.2020 jälkeen. (4 p.)
2. Merkitään muuttujalla t aikaa vuorokausina niin, että päivämäärä 7.9.2020 vastaa arvoa $t = 0$. Eksponentiaalisen mallin mukaan edeltävän kahden viikon aikana havaittujen tapausten lukumäärälle k pätee $k = a \cdot 2^{bt}$. Määritä vakiot a ja b . (4 p.)
3. Pohdi syitä sille, miksi tässä tehtävässä käytetty malli ei ole hyvä ennuste tartuntamäärien kehitykselle pitkällä aikavälillä. (4 p.)

Ratkaisu.

- 11.1 Eksponentiaalisessa kasvussa tautitapausten lukumäärä kasvaa samalla kertoimella jokaisen peräkkäisen aikavälin aikana. Nyt aikaväli on kaksi viikkoa eli 14 päivää ja kerroin on

$$q = \frac{719}{389} \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

$$\approx 1,84832 \dots$$

Tammikuun 8. päivään vuonna 2021 on 140 päivää eli kymmenen aikaväliä myöhemmin 1 p. (yht. 2 p.) kuin syyskuun 21. päivä vuonna 2020. Tautitapausten lukumäärä ehtii siis kasvaa eo. kertoimella kymmenen kertaa. Tautitapausten lukumäärä on siis

$$\begin{aligned} k &= a_1 \cdot q^n \\ &= 719 \cdot \left(\frac{719}{389} \right)^{10} \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)} \\ &= 334\,596,7983 \dots \\ &\approx 335\,000 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)} \end{aligned}$$

Vastaus: Mallin mukaan päivämäärää 8.1.2021 edeltävällä kahden viikon jaksolla havaitaan 335 000 koronavirustartuntaa.

Huom! Tehtävänannossa on virhe: päivästä 21.9.2020 päivään 8.1.2021 kuluu aikaa 109 päivää eikä 140 päivää, kuten tehtävänannossa väitetään. Tehtävästä saa täydet pisteet, jos on laskenut oikein käyttäen kumpaa tahansa luvuista 109 ja 140.

- 11.2 Määritetään eksponentiaalinen malli annettujen tietojen perusteella. Päivämäärällä 7.9.2020 muuttujan t arvo on nolla, eli $t = 0$ ja koronavirustartuntojen lukumäärä on 389. Muodostetaan tästä tehtävänannon mukainen yhtälö ja sijoitetaan siihen ajan ja koronavirustartuntojen lukumäärät ja ratkaistaan vakion a arvo:

$$k = a \cdot 2^{bt}$$

$$389 = a \cdot 2^{b \cdot 0}$$

$$a = 389 \quad (1 \text{ p. (yht. 5 p.)})$$

Tehtäväänannossa on annettu toistakin päivämäärää edeltävän kahden viikon jakson koronavirustartuntojen lukumäärä. Eli päivämäärällä 21.9.2020 koronavirustartuntojen lukumäärä edeltävällä kahden viikon jaksolla oli 719. Toisaalta päivämäärällä 21.9.2020 aikamuuttujan t arvo on $t = 14$. Sijoitetaan nämä arvot mallin yhtälöön ja ratkaistaan sieltä puuttuvan vakion b arvo:

$$k = a \cdot 2^{bt}$$

$$719 = 389 \cdot 2^{b \cdot 14} \quad (2 \text{ p. (yht. 7 p.)})$$

$$b = 0,06330154 \dots$$

$$b \approx 0,063 \quad (1 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

Vastaus: Eksponentiaalisen mallin vakiot ovat $a = 389$ ja $b = 0,063$.

Pisteytyksestä: Myös lukuarvo $b = 0,0633$ hyväksytään.

11.3 Lyhyellä aikavälillä tautitapausten lukumäärä voi kasvaa eksponentiaalisesti. Pitkällä aikavälillä malli ennustaisi kahden viikon jaksolle enemmän tartuntoja kuin Suomessa on asukkaita. Malli ei myöskään ota mitenkään huomioon rajoitustoimien tai rokotusten vaikutusta tartuntamäärien kehitykseen. Myös taudille alttiiden suomalaisten määrän pitäisi vähentyä, kun koronan kerran sairastaneilla on pienempi todennäköisyys sairastua tautiin uudelleen.

Pisteytys: yksi piste kustakin näistä

- pitkällä aikavälillä malli ennustaisi tartuntojen määräksi Suomen asukaslukua suuremman luvun
- malli ei ota huomioon koronarajoitusten vaikutusta
- malli ei ota huomioon rokotusten vaikutusta
- malli ei ota huomioon sitä, että sairastaneille tulee immuniteettia

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

12. Myyntitulojen maksimointi (12 p.)

Tuotteen nykyinen hinta on 60 euroa. Kauppias arvioi, että tällä hinnalla tuotetta myydään 1 000 kappaletta. Myyntituloja kasvattaakseen kauppias päättää muuttaa tuotteen hintaa. Vastaavan tuotteen myynnistä kertyneen kokemuksen perusteella kauppias arvioi, että jokainen euro, jolla tuotteen hinta nousee, vähentää myyntiä kymmenellä kappaleella. Vastaavasti jokainen euro, jolla tuotteen hintaa laskee, kasvattaa myyntiä kymmenellä kappaleella.

1. Kuinka suuret myyntitulot ovat, jos tuotteen hinta on 55 euroa? (2 p.)
2. Muodosta myyntituloja mallintava funktio $f(x)$, kun x on tuotteen hinnan muutos, ja laske sen derivaatta $f'(x)$. (5 p.)
3. Määritä se tuotteen hinta, jolla saadaan suurimmat mahdolliset myyntitulot. (5 p.)

Ratkaisu.

12.1. Kun tuotteen hinta on 60 euroa, myydään tuotetta 1000 kappaletta.

Jos tuotteen hinta on 55 euroa, on tuotteen hintaa laskettu viidellä eurolla. Koska hinnan laskeminen yhdellä eurolla kasvattaa myyntiä kymmenellä kappaleella, niin hinnan laskeminen viidellä eurolla kasvattaa myyntiä $5 \cdot 10 = 50$ kappaleella.

Kun tuotteen hinta on 55 euroa, niin tuotetta myydään $1000 + 50 = 1050$ kappaletta. Tällöin myyntitulot ovat 1 p. (yht. 1 p.)

$$55 \text{ €} \cdot 1050 = 57\,750 \text{ €}. \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

Vastaus: 57 750 euroa

12.2. Merkitään tuotteen hinnan muutosta euroina kirjaimella x .

Kun tuotteen hinta muuttuu x euroa, on tuotteen uusi hinta $60 + x$ euroa.

Koska tuotteen kappalemyynti vähenee kymmenellä, kun hinta nousee yhdellä eurolla (ja vastaavasti nousee kymmenellä, jos hinta alenee yhdellä eurolla), niin tuotetta myydään $1000 - x \cdot 10$ kappaletta, kun hinta muuttuu x eurolla.

1 p. (yht. 3 p.)

Myyntitulot saadaan, kun tuotteiden kappalemäärä kerrotaan yhden tuotteen hinnalla. Koska yhden tuotteen hinta on $(60 + x)$ euroa ja tuotetta myydään $(1000 - x \cdot 10)$ kappaletta, on myyntituloja mallintava funktio muotoa

$$f(x) = (60 + x)(1000 - x \cdot 10), \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

jossa x on tuotteen hinnan muutos euroina.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Sievennetään funktion lauseke laskinohjelmalla.

1	$f(x) := (60+x)(1000-10x)$	
☐	$\rightarrow f(x) := -10x^2 + 400x + 60000$	1 p. (yht. 5 p.)

Derivoidaan funktio f .

2	$f'(x)$	
☐	$\rightarrow -20x + 400$	2 p. (yht. 7 p.)

Vastaus: $f(x) = -10x^2 + 400x + 60\,000$ ja $f'(x) = -20x + 400$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Sievennetään funktion lauseke

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (60 + x)(1000 - x \cdot 10), \\
 &= 60 \cdot 1000 + 60 \cdot (-10x) + x \cdot 1000 + x \cdot (-10x) \\
 &= 60\,000 - 600x + 1000x - 10x^2 \\
 &= -10x^2 + 400x + 60\,000. \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}
 \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = -2 \cdot 10x^2 - 1 + 400 = -20x + 400. \quad \text{2 p. (yht. 7 p.)}$$

Vastaus: $f(x) = -10x^2 + 400x + 60\,000$ ja $f'(x) = -20x + 400$

12.3. Myyntituloja kuvaa funktio

$$f(x) = -10x^2 + 400x + 60\,000,$$

jossa x on tuotteen hinnan muutos.

Funktion f suurin arvo löydetään derivaatan nollakohdista.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat laskinohjelmalla.

1	$f(x) := (60+x)(1000-10x)$ ☐ → $f(x) := -10x^2 + 400x + 60000$
2	$f'(x)$ ☐ → $-20x + 400$
3	Ratkaise($f'(x)=0$) ☐ → $\{x = 20\}$

Laskinohjelmalla saatiin ratkaisu $x = 20$. 1 p. (yht. 8 p.)

Ratkaistaan laskinohjelmalla, milloin derivaatta saa negatiivisia arvoja ja milloin positiivisia arvoja.

4	Ratkaise($f'(x)>0$) ☐ → $\{x < 20\}$
5	Ratkaise($f'(x)<0$) ☐ → $\{x > 20\}$

1 p. (yht. 9 p.)

Koska $f'(x) \geq 0$, kun $x \leq 20$ ja $f'(x) \leq 0$, kun $x \geq 20$, niin funktio on kasvava, kun $x \leq 20$ ja vähenevä, kun $x \geq 20$. 1 p. (yht. 10 p.) Funktio f saa siis suurimman arvonsa kohdassa $x = 20$.

Suurimmat myyntitulot saadaan siis silloin, kun tuotteen hinta on $60\text{ €} + 20\text{ €}$ 1 p. (yht. 11 p.)
80 €.

Vastaus: 80 euroa 1 p. (yht. 12 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 2

Ratkaistaan derivaatan nollakohta.

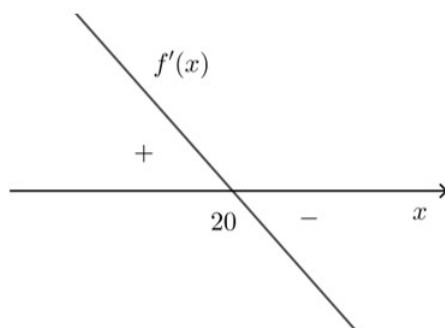
$$f'(x) = 0$$

$$-20x + 400 = 0 \quad || -400$$

$$-20x = -400 \quad || : (-20)$$

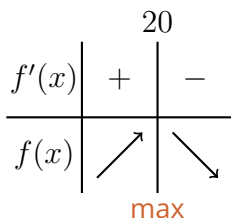
$$x = 20 \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

Hahmotellaan funktion f' kuvaaja. Funktion $f'(x) = -20x + 400$ kuvaaja on suora, koska kyseessä on ensimmäisen asteen polynomifunktio. Koska ensimmäisen asteen termin kerroin on negatiivinen, on kyseessä laskeva suora.



1 p. (yht. 9 p.)

Muodostetaan kulkukaavio kuvaajan perusteella.



1 p. (yht. 10 p.)

Kulkukaavion perusteella funktio f saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 20$.

Suurimmat myyntitulot saadaan siis silloin, kun tuotteen hinta on $60 \text{ €} + 20 \text{ €} = 80 \text{ €}$. 1 p. (yht. 11 p.)

Vastaus: 80 euroa 1 p. (yht. 12 p.)

Ratkaisuvaihtoehto 3

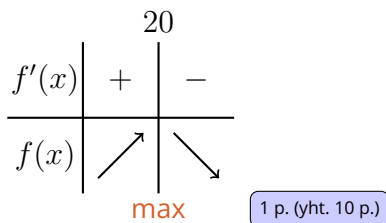
Ratkaistaan derivaatan nollakohta.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 -20x + 400 &= 0 && \parallel -400 \\
 -20x &= -400 && \parallel : (-20) \\
 x &= 20 && \text{1 p. (yht. 8 p.)}
 \end{aligned}$$

Lasketaan derivaatan merkki derivaatan nollakohdan kummallakin puolella.

$$\begin{aligned}
 f'(1) &= -20 \cdot 1 + 400 = 380 > 0 \\
 f'(21) &= -20 \cdot 21 + 400 = -20 < 0 && \text{1 p. (yht. 9 p.)}
 \end{aligned}$$

Muodostetaan kulkukaavio.



Kulkukaavion perusteella funktio f saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 20$.

Suurimmat myyntitulot saadaan siis silloin, kun tuotteen hinta on $60 \text{ €} + 20 \text{ €} = 80 \text{ €}$. 1 p. (yht. 11 p.)

Vastaus: 80 euroa 1 p. (yht. 12 p.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

13. Kuutioista monitahokkaita (12 p.)

Aineisto:

13. A [Kuva: Puuveistokset](#)

Puisen kuution särmän pituus on 2,0 cm. Tarkastellaan kahta monitahokasta, jotka saadaan sahaamalla pois kuutioiden nurkista pyramidin muotoiset kappaleet, alla kuvatuilla tavoilla, ks. kuva [13.A](#).

1. Piirretään kuution tahkoihin janat, jotka yhdistävät vierekkäisten särmien keskipisteet. Poistetaan kuution nurkista pyramidit, joiden pohjasärminä ovat piirretyt janat. Määritä näin saadun monitahokkaan tilavuus. (6 p.)
2. Piirretään kuution tahkoihin sellaiset janat, joiden päätepisteet ovat vierekkäisillä särmillä niin, että tahkoihin muodostuu säännöllinen 8-kulmio. Poistetaan kuution nurkista pyramidit, joiden pohjasärminä ovat piirretyt janat. Määritä näin saadun monitahokkaan pinta-ala. (6 p.)

Ratkaisu.

13.1.

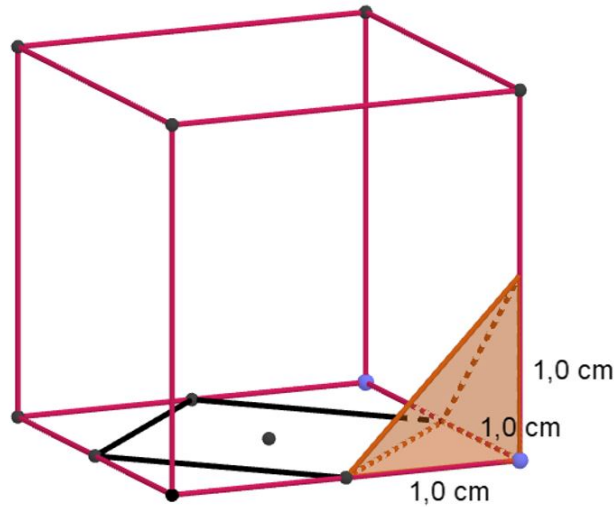
Ratkaisuvaihtoehto 1

Kuution alkuperäinen tilavuus on

$$V_k = (2,0 \text{ cm})^3 = 8,0 \text{ cm}^3. \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

Kuutiosta poistetaan nurkista pyramidit. Jäljelle jääneen monitahokkaan tilavuus saadaan, kun alkuperäisestä kuution tilavuudesta vähennetään poistettujen pyramidien tilavuudet.

Selvitetään yhden poistetun pyramidin tilavuus.



Poisleikatun pyramidin tilavuus saadaan kartion tilavuuden avulla. Kartion pohja muodostuu tasakylkisestä suorakulmaisesta kolmiosta, jonka pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} \cdot 1,0 \cdot 1,0 = \frac{1}{2} (\text{cm}^2). \quad (2 \text{ p. (yht. 3 p.)})$$

Kartion korkeus on 1,0 cm, joten kartion eli yhden pyramidin tilavuus on

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,0 = \frac{1}{6} (\text{cm}^3). \quad (2 \text{ p. (yht. 5 p.)})$$

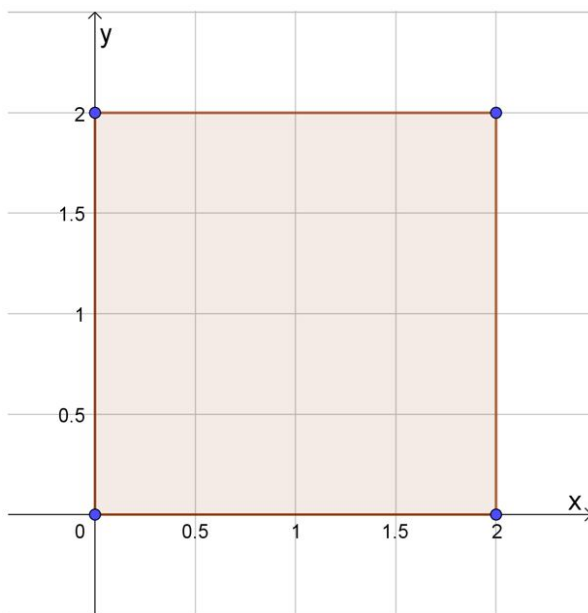
Pyramideja poistetaan yhteensä 8 kappaletta, joten koko monitahokkaan tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= V_k - 8V_p \\ &= 8,0 \text{ cm}^3 - 8 \cdot \frac{1}{6} \text{ cm}^3 \\ &= \frac{20}{3} \text{ cm}^3 \\ &= 6,666 \dots \text{ cm}^3 \\ &\approx 6,7 \text{ cm}^3. \quad (1 \text{ p. (yht. 6 p.)}) \end{aligned}$$

Vastaus: $6,7 \text{ cm}^3$

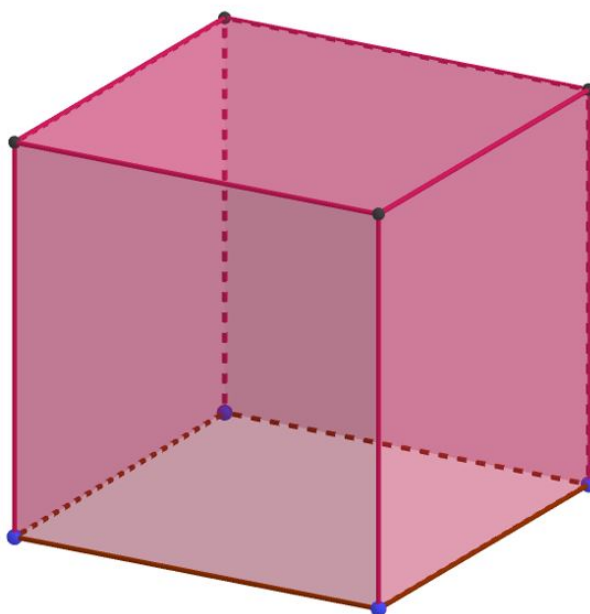
Ratkaisuvaihtoehto 2

Valitaan koordinaatiston yksiköksi senttimetri. Piirretään GeoGebralla kuutio, jonka särmän pituus on 2. Aloitetaan piirtämällä pohja.



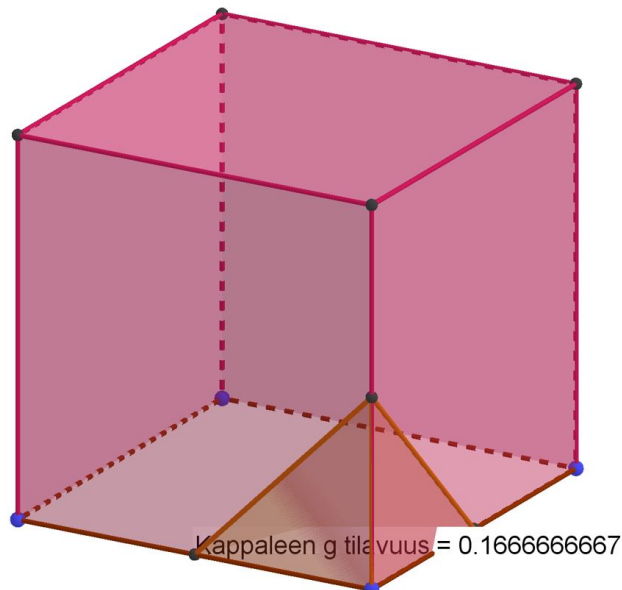
1 p. (yht. 1 p.)

Laajennetaan pohja 3D-piirtoalueessa särmiöksi, jonka korkeus on 2.



1 p. (yht. 2 p.)

Piirretään yhden sivun ja kahden tämän sivun vierekkäisen sivun keskipisteet. Piirretään pyramidi, joka näiden pisteiden avulla muodostetaan



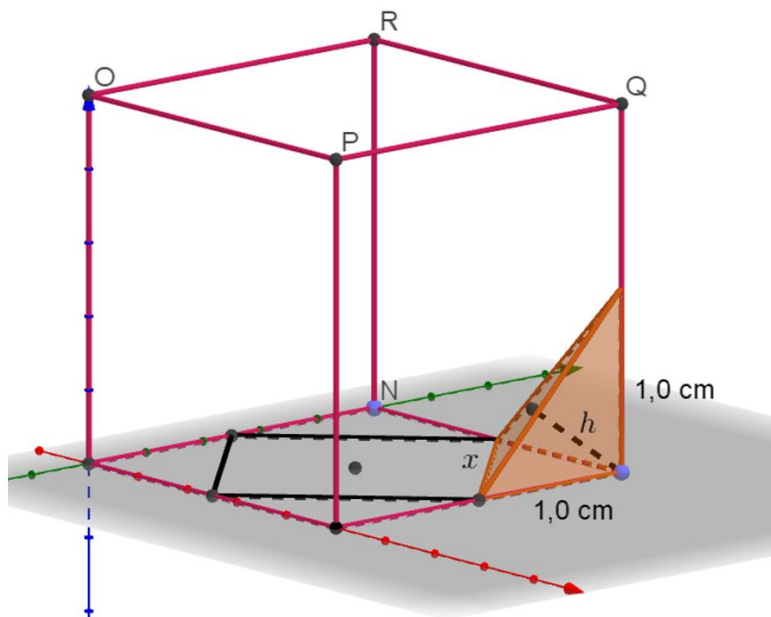
- keskipisteet piirretty 1 p. (yht. 3p.)
- pyramidi piirretty 1 p. (yht. 4 p.)
- pyramidin tilavuus kirjoitettu näkyviin 1 p. (yht. 5 p.)

Yhden pyramidin tilavuus on $V_p = 0,166 \dots \text{ cm}^3$. Pyramideja poistetaan yhteensä 8 kappaletta, joten koko monitahokkaan tilavuus on

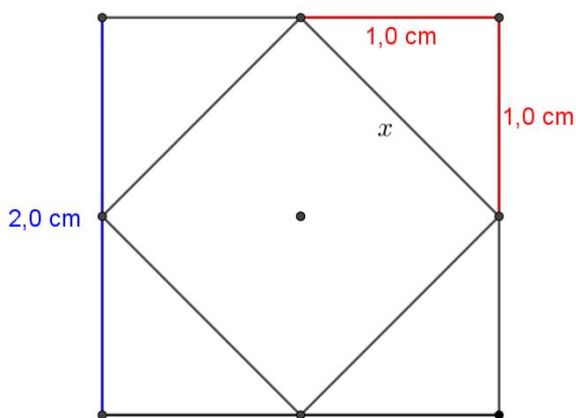
$$\begin{aligned}
 V &= V_k - 8V_p \\
 &= 8,0 \text{ cm}^3 - 8 \cdot 0,166 \dots \text{ cm}^3 \\
 &= 6,666 \dots \text{ cm}^3 \\
 &\approx 6,7 \text{ cm}^3.
 \end{aligned}$$

Vastaus: $6,7 \text{ cm}^3$

Ratkaisuvaihtoehto 3



Poisleikatun pyramidin pohja on tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on x . Piirretään kuva yhdestä tahkosta. Tahkoihin piirretyt janat yhdistävät vierekkäisten särmien keskipisteet.

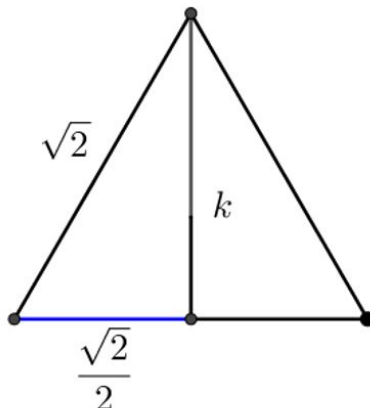


Pythagoraan lauseella saadaan

$$x^2 = 1^2 + 1^2.$$

Laskinohjelmalla saadaan ratkaisu $x = \pm\sqrt{2}$. Koska sivun pituus ei voi olla negatiivinen, hylätään negatiivinen vaihtoehto. Pyramidin pohjan sivun pituus on siis $x = \sqrt{2}$. 1 p. (yht. 1 p.)

Selvitetään tasasivuisen kolmion korkeus k .



Pythagoraan lauseella saadaan

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + k^2 = (\sqrt{2})^2.$$

Laskinohjelmalla saadaan ratkaisu $k = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$. Koska sivun pituus ei voi olla negatiivinen, on $k = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

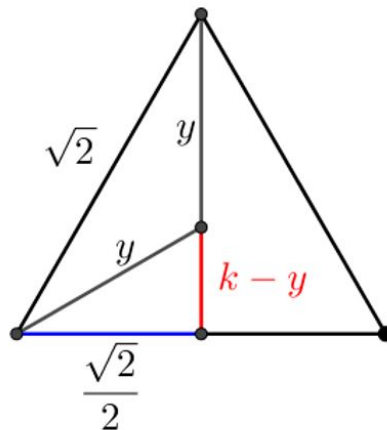
Pyramidin pohjan pinta-ala saadaan tasasivuisen kolmion pinta-alasta. Pyramidin pohjan pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot k = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\text{cm}^2). \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

Pyramidin pohjan pinta-ala voidaan laskea myös taulukosta löytyvällä tasasivuisen kolmion pinta-alan kaavalla: kun sivun pituus on $a = \sqrt{2}$, on tasasivuisen kolmion pinta-ala

$$A = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Selvitetään tasasivuisen kolmion keskipisteen etäisyys tasasivuisen kolmion kärjestä. Merkitään tätä pituutta kirjaimella y .

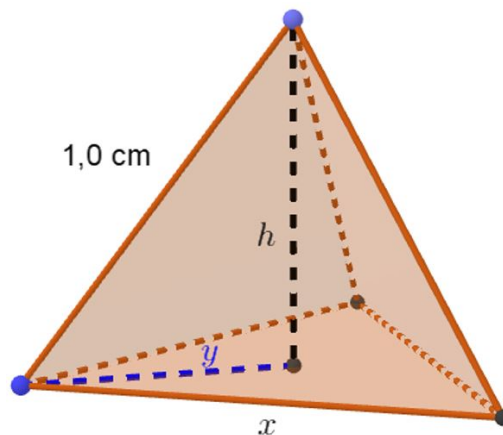


Pythagoraan lauseella saadaan, että

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - y\right)^2 = y^2.$$

Laskinohjelmalla saadaan ratkaisu $y = \frac{\sqrt{6}}{3}(\text{cm})$. 1 p. (yht. 3 p.)

Selvitetään sitten pyramidin korkeus h .



Pythagoraan lauseella saadaan, että

$$y^2 + h^2 = 1^2$$
$$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + h^2 = 1^2$$

Laskinohjelmalla saadaan ratkaisu $h = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. Pyramidin korkeus on siis $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (cm). 1 p. (yht. 4 p.)

Yhden pyramidin tilavuus on

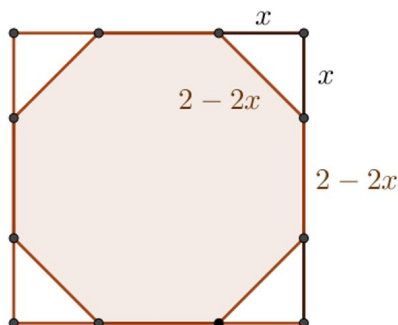
$$V_p = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{6} \text{ (cm}^3\text{)}. \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

Pyramideja poistetaan yhteensä 8 kappaletta, joten koko monitahokkaan tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= V_k - 8V_p \\ &= 8,0 \text{ cm}^3 - 8 \cdot \frac{1}{6} \text{ cm}^3 \\ &= \frac{20}{3} \text{ cm}^3 \\ &= 6,666 \dots \text{ cm}^3 \\ &\approx 6,7 \text{ cm}^3. \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)} \end{aligned}$$

Vastaus: $6,7 \text{ cm}^3$

- 13.2. Tarkastellaan kuution yhtä tahkoa, jonka kulmista on poistettu suorakulmaiset kolmiot. 1 p. (yht. 7 p.)



Merkitään kirjaimella x suorakulmaisen kolmion kateetteja. Tällöin suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on $2 - 2x$, koska tahkon sisälle muodostuu säännöllinen 8-kulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. Pythagoraan lauseella saadaan

$$x^2 + x^2 = (2 - 2x)^2.$$

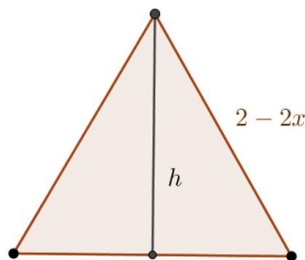
Laskinohjelmalla saadaan ratkaisuksi $x = \sqrt{2} + 2 = 3,414 \dots$ ja $x = -\sqrt{2} + 2 = 0,585 \dots$. Hylätään ratkaisu $x = \sqrt{2} + 2 = 3,414 \dots$, koska se on suurempi kuin kuution särmän pituus. Suorakulmaisen kolmion kateetin pituus on siis $x = 2 - \sqrt{2}$. 1 p. (yht. 8 p.)

8-kulmion pinta-ala on siten

$$\begin{aligned} A_{8\text{-kulmio}} &= A_{\text{neliö}} - 4A_{\text{kolmio}} \\ &= 2^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \\ &= 4 - 2 \cdot (2 - \sqrt{2})^2 \\ &= 8\sqrt{2} - 8 \end{aligned} \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

Monitahokkaan pinta-ala muodostuu kuuden 8-kulmion pinta-alasta ja kahdeksan poisleikatun pyramidin pohjan pinta-alasta.

Yhden poisleikatun pyramidin pohja on tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on $2 - 2x = 2 - 2 \cdot (2 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$.



Tasasivuisen kolmion korkeus h jakaa kannan kahteen yhtä pitkään osaan. Muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat h ja $\frac{2-2x}{2} = 1 - x = 1 - (2 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$, ja jonka hypotenuusa on $2 - 2x = 2\sqrt{2} - 2$. Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla.

$$h^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 = (2\sqrt{2} - 2)^2$$

Laskinohjelmalla saadaan $h = \sqrt{3} - \sqrt{6}$ tai $h = -\sqrt{3} + \sqrt{6}$. Koska $\sqrt{3} - \sqrt{6} = -0,717 \dots < 0$, niin $h = -\sqrt{3} + \sqrt{6}$.

Tasasivuisen kolmion pinta-ala on siten

$$\begin{aligned} A_{\text{tasasivuinen kolmio}} &= \frac{1}{2} \cdot (2 - 2x) \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2} - 2) \cdot (-\sqrt{3} + \sqrt{6}) \\ &= -2\sqrt{6} + 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

1 p. (yht. 10 p.)

Koko monitahokkaan pinta-ala on siten

$$\begin{aligned} A &= 6A_{8\text{-kulmio}} + 8A_{\text{tasas.}} \\ &= 6 \cdot (8\sqrt{2} - 8) + 8 \cdot (-2\sqrt{6} + 3\sqrt{3}) \\ &= 22,2596 \dots \\ &\approx 22. \end{aligned}$$

1 p. (yht. 11 p.)

Monitahokkaan pinta-ala on siis noin 22 cm^2 .

1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: 22 cm^2

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!