Yo-mallivastaukset

Syksy 2021
Pitkä matematiikka

Tiesitkö tämän?

Mafylaiset veivät vuoden 2020 haussa

74%

kaikista lääkiksen pääsykoekiintiön paikoista.

60%

Pk-seudun lukioista käyttää **Mafynettiä.**

Mallivastausten tekijät:

Malliratkaisujen laatimisesta ovat vastanneet MAFY:n toinen perustaja Antti Suominen sekä MAFY:n oppimateriaalitiimi, jonka päätehtävä on laatia ja kehittää MAFY:n lukioon tarkoitettuja oppimateriaaleja.

Oppimateriaalitiimistä mukana olivat Antti Suomisen lisäksi Jori Suominen, Sampsa Kurvinen, Timo Kalinainen ja Sakke Suomalainen. Lisäksi työn tukena olivat Tuomas Hauvala ja Matti Virolainen.

Mafy oppimateriaalit

Olemme Helsingissä, Tampereella, Turussa ja Jyväskylässä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys.

Palveluitamme ovat:

- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali
- Lääketieteellisen valmennuskurssit
- Kauppatieteellisen valmennusmateriaalit
- DI-valmennuskurssit
- Yo-kokeisiin valmentavat kurssit

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Käyttöehdot

MAFY Oy:n yhteystiedot:

https://mafy.fi/yhteydenotto

Koetehtävät

Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.

Linkit malliratkaisuihin

Malliratkaisut päivitetty 22. syyskuuta 2021 klo. 10:36.

1. Sopivia lukuja (12 p.)

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 3 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

1.1. Mikä on lausekkeen $1 - 3x$ arvo, kun $x = 2$? (3 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

1.2. Jonon (a_n) yleinen termi on muotoa $a_n = 3 \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Mikä on termi a_3? (3 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

1.3. Jono (b_n) toteuttaa ehdot $b_6 = 6$ ja $b_{n+1} = b_n + 4$, $n \in \mathbb{N}$. Mikä on termi b_4? (3 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

1.4. Polynomi $(x^2 + 5x + 1)(x + 3)$ kerrotaan auki, jolloin muodostuu kolmannen asteen polynomi. Mikä on sen toisen asteen termin kerroin? (3 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

Ratkaisu.

1.1 $-5.$ 3p (yht. 3p)

Miten vastaukseen päädyttiin: Sijoitetaan $x = 2$ lausekkeeseen $1 - 3x$.

$$1 - 3 \cdot 2 = 1 - 6 = -5.$$

1.2 $24.$ 3p (yht. 3p)

Miten vastaukseen päädyttiin: Termi a_3 saadaan, kun sijoitetaan yleisen termin lausekkeeseen $n = 3$. Lasketaan tällä tavalla a_3.

$$a_3 = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24.$$

1.3 $-2.$ 3p (yht. 3p)

Miten vastaukseen päädyttiin: Tehtävänannon mukaan $b_{n+1} = b_n + 4$, eli vastaavasti $b_n = b_{n+1} - 4$. Lisäksi tehtävänannon mukaan $b_6 = 6$. Lasketaan tämän avulla b_5.

$$b_5 = b_6 - 4 = 6 - 4 = 2.$$

Lasketaan vastaavasti b_4.

$$b_4 = b_5 - 4 = 2 - 4 = -2.$$

1.4 $8.$ 3p (yht. 3p)

Miten vastaukseen päädyttiin (tapa 1): Huomataan, että toisen asteen termin kerroin muodostuu tulossa ainoastaan termeistä $x^2 \cdot 3$ ja $5x \cdot x$, joten toisen asteen termi on

$$x^2 \cdot 3 + 5x \cdot x = 8x^2,$$

eli toisen asteen termin kerroin on 8.

Miten vastaukseen päädyttiin (tapa 2:) Lasketaan tulo auki.

$$\begin{aligned}(x^2+5x+1)(x+3) &= x^2\cdot x + x^2\cdot 3 + 5x\cdot x + 5x\cdot 3 + 1\cdot x + 1\cdot 3\\ &= x^3+3x^2+5x^2+15x+x+3\\ &= x^3+8x^2+16x+3.\end{aligned}$$

Tästä nähdään, että toisen asteen termin kerroin on 8.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

2. Geometrisia pikkutehtäviä (12 p.)

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

2.1. Paraabelit $y = 4x^2$ ja $y = x^2 - 1$ (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: ”eivät leikkaa”, ”leikkaavat yhdessä pisteessä”, ”leikkaavat kahdessa pisteessä”, ”leikkaavat useammassa kuin kahdessa pisteessä”.

2.2. Pisteiden $(1, 6)$ ja $(-1, -6)$ välisen janan keskinormaalin kulmakertoimelle k on voimassa (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: $k < -1$, $k = -1$, $-1 < k < 0$, $k = 0$, $0 < k < 1$, $k = 1$, $k > 1$.

2.3. Ympyrän $9x^2 + 9y^2 = 1$ säde on (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: 1, 9, $1/9$, 3, $1/3$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{1/3}$.

2.4. Tasokäyrä koostuu kaikista niistä pisteistä, jotka ovat yhtä kaukana yhdestä kiinteästä pisteestä ja yhdestä kiinteästä suorasta. Tämä tasokäyrä on (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: ”ympyrä”, ”suora”, ”Gaussin kellokäyrä”, ”paraabeli”, ”kolmio”, ”sinikäyrä”.

2.5. Kuinka monta ratkaisua on yhtälöllä $\cos(3x) = 0{,}5$ välillä $0 < x < \pi$? (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

2.6. Ympyrälle $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ on piirretty tangentti, joka kulkee pisteen $(0, -4)$ kautta. Tangentti (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: ”ei voi olla laskeva”, ”ei voi olla nouseva”, ”voi olla laskeva tai nouseva”, ”on x-akselin suuntainen”, ”on y-akselin suuntainen”.

Ratkaisu.

2.1 Eivät leikkaa. 2p (yht. 2p)

Miten vastaukseen päädyttiin: Paraabelit leikkaavat sellaisissa pisteissä, joissa niiden x- ja y-koordinaatit ovat keskenään samat, eli kun pätee

$$4x^2 = x^2 - 1$$
$$3x^2 + 1 = 0$$

Termi $3x^2$ on epänegatiivinen kaikilla x, joten lauseke $3x^2 + 1 > 0$ kaikilla x. Yhtälöllä ei siis ole ratkaisuja, joten paraabeleilla ei ole leikkauspisteitä.

2.2 $-1 < k < 0$. 2p (yht. 2p)

Miten vastaukseen päädyttiin: Lasketaan ensin pisteiden $(1, 6)$ ja $(-1, -6)$ välisen janan kulmakerroin.

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{6 - (-6)}{1 - (-1)} \\ &= \frac{6 + 6}{1 + 1} \\ &= \frac{12}{2} \\ &= 6. \end{aligned}$$

Keskinormaali on kohtisuorassa janaa vastaan, joten keskinormaalin kulmakertoimelle k ja janan kulmakertoimelle k_1 pätee.

$$k \cdot k_1 = -1 \quad \| : k_1$$
$$k = \frac{-1}{k_1}$$
$$k = \frac{-1}{6}$$
$$k = -\frac{1}{6}.$$

Näin ollen oikea vaihtoehto on $-1 < k < 0$.

2.3 $1/3$. 2p (yht. 2p)

Miten vastaukseen päädyttiin: Muunnetaan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$9x^2 + 9y^2 = 1 \quad \| : 9$$
$$x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$$
$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Tästä nähdään, että ympyrän säde on $1/3$. Jos keskipistemuoto ei muistunut kokeessa mieleen, tästä pystyy myös Pythagoraan lauseen avulla päättelemään, että tämän yhtälön toteuttavat pisteet (x, y), jotka ovat etäisyydellä $1/3$ origosta.

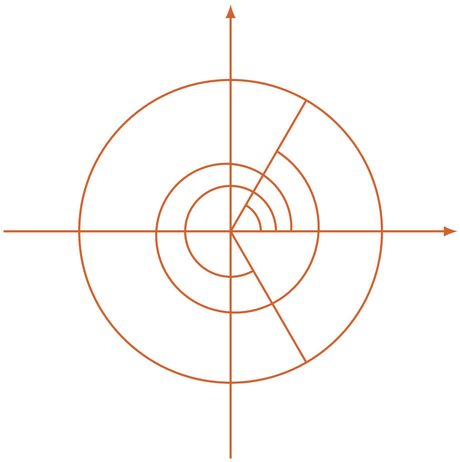
2.4 Paraabeli. 2p (yht. 2p)

Miten vastaukseen päädyttiin: Kokeessa oli paras vain muistaa, että paraabeli on määritelty tällä tavalla pisteen ja suoran avulla. Jos tätä ei muistanut, oikean vastauksen pystyi myös varsin helposti arvata piirtämällä pisteen ja suoran ja hahmottelemalla silmämääräisesti pisteitä, jotka ovat yhtä kaukana pisteestä ja suorasta. Näin pystyi päätellä, että paraabelia lukuunottamatta muut annetut vaihtoehdot (ympyrä, suora, gaussin kellokäyrä, kolmio ja sinikäyrä) eivät ole mahdollisia.)

2.5 3. 2p (yht. 2p)

Miten vastaukseen päädyttiin (tapa 1, nopea päättely):

Jos $0 < x < \pi$, niin $0 < 3x < 3\pi$, eli yhtälöllä $\cos(3x) = 0{,}5$ on välillä $0 < x < \pi$ yhtä monta ratkaisua kuin yhtälöllä $\cos(y) = 0{,}5$ välillä $0 < y < 3\pi$. Hahmotellaan ratkaisut yksikköympyrään.



Yksikköympyrän avulla huomataan, että yhtälöllä $\cos(y) = 0{,}5$ on kolme ratkaisua välillä $0 < y < 3\pi$, joten vastaus on 3.

Miten vastaukseen päädyttiin (tapa 2, tarkka laskelma):

Väli $0 < x < \pi$ vastaa asteina väliä $0 < x < 180°$. Muistetaan (löytyy myös MAOL-taulukosta), että

$$\cos(60°) = 0{,}5.$$

Näin ollen kosiniyhtälön $\cos(3x) = 0{,}5$ kaikki ratkaisut saadaan yhtälöstä

$$3x = \pm 60° + 360° \cdot n \quad \| : 3$$

$$x = \pm 20° + 120° \cdot n$$

eli yhtälöistä

$$x = 20° + 120° \cdot n \tag{1}$$

$$x = -20° + 120° \cdot n \tag{2}$$

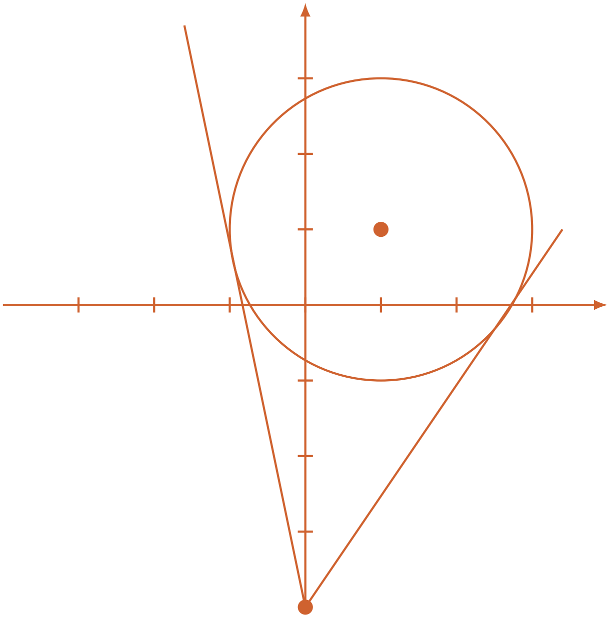
Yhtälön (1) ratkaisuista kysytyllä välillä ovat $x = 20°$ ja $x = 140°$, ja yhtälön (2) ratkaisuista $x = 100°$. Näin ollen ratkaisuja on kysytyllä välillä 3 kappaletta.

2.6 Voi olla laskeva tai nouseva. 2p (yht. 2p)

Miten ratkaisuun päädyttiin: Ympyrän yhtälö keskipistemuodossa on

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2,$$

eli ympyrän keskipiste on $(1, 1,)$ ja sen säde on 2. Hahmotellaan ympyrä suttupaperille.



Kuvan perusteella voidaan päätellä, että tangentti voi olla nouseva tai laskeva.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

3. Integraaleja (12 p.)

Jokaisesta osatehtävästä voi saada 4 pistettä.

1. Laske
$$\int (x^2+1)\,dx.$$
2. Laske
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\,dx.$$
3. Laske
$$\int_{-1}^{1} |x|^3\,dx.$$

Ratkaisu.

1.

$$\int (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2+1}x^{2+1} + x + C = \frac{1}{3}x^3 + x + C.$$ 4p (yht. 4p)

2. Muistetaan, että funktion $\sin(x)$ derivaatta on $\cos(x)$. Derivoidaan $\sin(2x)$.
$$\mathrm{D}\sin(2x) = \cos(2x)\cdot \mathrm{D}\,2x = \cos(2x)\cdot 2 = 2\cos(2x).$$
Tästä voidaan huomata, että funktion $\frac{1}{2}\sin(2x)$ derivaatta on $\cos(2x)$, jolloin saadaan laskettua tehtävän integraali.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(2x)$$ 2p (yht. 2p)

$$= \frac{1}{2}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot 0)$$

$$= \frac{1}{2}\sin(\pi) - \frac{1}{2}\sin(0)$$ 1p (yht. 3p)

$$= \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot 0$$

$$= 0.$$ 1p (yht. 4p)

3.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Funktion $y = |x|^3$ kuvaaja on symmetrinen y-akselin suhteen, joten

$$\int_{-1}^{1} |x|^3 \,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{0}^{1} |x|^3 \,\mathrm{d}x$$

$$= 2 \cdot \int_{0}^{1} x^3 \,\mathrm{d}x$$ 2p (yht. 2p)

$$= 2 \cdot \Big/_{0}^{1} \left(\frac{1}{3+1} x^{3+1} \right)$$

$$= 2 \cdot \Big/_{0}^{1} \left(\frac{1}{4} x^4 \right)$$ 1p (yht. 3p)

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{4} \cdot 0^4 \right)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}.$$ 1p (yht. 4p)

Ratkaisuvaihtoehto 2

$$\int_{-1}^{1} |x|^3 \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} |x|^3 \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} |x|^3 \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x)^3 \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x^3 \, \mathrm{d}x$$ 2p (yht. 2p)

$$= \int_{-1}^{0} -x^3 \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x^3$$

$$= \Big/_{-1}^{0} \left(-\frac{1}{3+1}x^{3+1}\right) + \Big/_{0}^{1} \left(\frac{1}{3+1}x^{3+1}\right)$$

$$= \Big/_{-1}^{0} \left(-\frac{1}{4}x^4\right) + \Big/_{0}^{1} \left(\frac{1}{4}x^4\right)$$ 1p (yht. 3p)

$$= \left(-\frac{1}{4} \cdot 0^4 - \left(-\frac{1}{4} \cdot (-1)^4\right)\right) + \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{4} \cdot 0^4\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}.$$ 1p (yht. 4p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

4. Tasokäyrä (12 p.)

Tarkastellaan vektoreita $\bar{v}(t) = t\bar{i} + \frac{1}{t^2}\bar{j}$, kun $t > 0$.

1. Laske pistetulo $(\bar{i} - \bar{j}) \cdot \bar{v}(3)$. (3 p.)
2. Määritä vektorin $\bar{v}(3)$ pituus. (2 p.)
3. Millä muuttujan $t > 0$ arvolla vektori $\bar{v}(t)$ on mahdollisimman lyhyt? (7 p.)

Tällaista jatkuvaa vektoriarvoista funktiota kutsutaan *käyrän parametrisoinniksi*.

Ratkaisu.

1. Lasketaan kysytty pistetulo.

$$
\begin{aligned}
(\bar{i} - \bar{j}) \cdot \bar{v}(3) &= (\bar{i} - \bar{j}) \cdot \left(3\bar{i} + \frac{1}{3^2}\bar{j}\right) \quad \boxed{\text{1p (yht. 1p)}} \\
&= (\bar{i} - \bar{j}) \cdot \left(3\bar{i} + \frac{1}{9}\bar{j}\right) \\
&= 1 \cdot 3 - 1 \cdot \frac{1}{9} \quad \boxed{\text{1p (yht. 2p)}} \\
&= 3 - \frac{1}{9} \\
&= \frac{27}{9} - \frac{1}{9} \\
&= \frac{26}{9}. \quad \boxed{\text{1p (yht. 3p)}}
\end{aligned}
$$

2. Lasketaan vektorin $\overline{v}(3)$ pituus.

$$\begin{aligned}|\overline{v}(3)| &= |3\overline{i} + \frac{1}{9}\overline{j}| \\ &= \sqrt{3^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2} \quad \boxed{\text{1p (yht. 1p)}} \\ &= \sqrt{9 + \frac{1}{81}} \\ &= \sqrt{\frac{729}{81} + \frac{1}{81}} \\ &= \sqrt{\frac{730}{81}} \\ &= \frac{\sqrt{730}}{9} \quad \boxed{\text{1p (yht. 2p)}} \\ &= 3{,}0020\ldots\end{aligned}$$

Pisteytyksestä: Jos on laskettu vain likiarvo, saa kohdasta 2 korkeintaan 1 p.

3. Muodostetaan vektorin $\overline{v}(t)$ pituuden neliön lauseke.

$$|\overline{v}(t)|^2 = t^2 + \left(\frac{1}{t^2}\right)^2 = t^2 + \frac{1}{t^4}. \quad \boxed{\text{1p (yht. 1p)}}$$

Merkitään tätä lauseketta

$$f(t) = t^2 + t^{-4}.$$

Selvitetään, millä $t > 0$ arvolla tämä lauseke saa pienimmän arvonsa. Derivoidaan $f(t)$.

$$\begin{aligned}f'(t) &= 2t^{2-1} + -4t^{-4-1} \\ &= 2t - 4t^{-5} \\ &= 2t - \frac{4}{t^5}. \quad \boxed{\text{2p (yht. 3p)}}\end{aligned}$$

Selvitetään derivaatan nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= 0 \\
2t - \frac{4}{t^5} &= 0 \\
\frac{2t^6}{t^5} - \frac{4}{t^5} &= 0 \\
\frac{2t^6 - 4}{t^5} &= 0 \\
2t^6 - 4 &= 0 \quad \| + 4 \\
2t^6 &= 4 \quad \| : 2 \\
t^6 &= \frac{4}{2} \\
t^6 &= 2 \\
t &= \pm\sqrt[6]{2}
\end{aligned}
$$

2p (yht. 5p)

Koska $t > 0$, vain $t = \sqrt[6]{2} = 1{,}1224\ldots$ on derivaatan nollakohta. Lasketaan derivaatta kohdissa $t = 1$ ja $t = 2$.

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= 2 \cdot 1 - \frac{4}{1^5} = -2 < 0 \\
f'(2) &= 2 \cdot 2 - \frac{4}{2^5} = \frac{31}{8} > 0
\end{aligned}
$$

Kulkukaavio:

		$\sqrt[6]{2}$
$f'(t)$	$-$	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$\nearrow$

1p (yht. 6p)

Huomaa! Kulkukaavion saa piirrettyä Abitin vastauseditorin taulukkotoiminnolla ja valikosta löytyvillä symboleilla.

Funktio $f(t)$ saa siis pienimmän arvonsa kohdassa $t = \sqrt[6]{2}$. Näin ollen myös vektorin $\overline{v}(t)$ pituus on pienin tällä muuttujan t arvolla.

Vastaus: Vektori $\overline{v}(t)$ on mahdollisimman lyhyt, kun $t = \sqrt[6]{2}$. 1p (yht. 7p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

5. Ilmanpaine (12 p.)

Ilmanpaine pienenee maanpinnalta ylöspäin noustaessa kaavan

$$p(h) = p_0\left(1 - \frac{0{,}00976h}{T_0}\right)^{3{,}50}$$

mukaisesti, kun p_0 ja T_0 ovat ilmanpaine ja lämpötila maanpinnalla (yksikköinä kPa ja K), ja h on korkeus maanpinnalta (m). Lentokoneen lähtiessä nousuun on $p_0 = 101{,}3\,(\mathrm{kPa})$ ja $T_0 = 301\,(\mathrm{K})$. Kuinka monta prosenttia ilmanpaine muuttuu, kun lentokone nousee kahden kilometrin korkeudesta kolmen kilometrin korkeuteen?

Ratkaisu.

$$p_0 = 101{,}3$$

$$T_0 = 301$$

Ilmanpaine korkeuden funktiona:

$$p(h) = p_0\left(1 - \frac{0{,}00976h}{T_0}\right)^{3{,}50}$$

$$p(h) = 101{,}3 \cdot \left(1 - \frac{0{,}00976h}{301}\right)^{3{,}50}$$ 4p (yht. 4p)

Lasketaan ilmanpaine korkeuksilla $h = 2000$ ja $h = 3000$.

$$p(2000) = 80{,}111176\ldots$$

$$p(3000) = 70{,}803109\ldots$$

Kun lentokone nousee kahden kilometrin korkeudelta kolmen kilometrin korkeuteen, ilmanpaine siis muuttuu

$$\frac{p(3000) - p(2000)}{p(2000)} = \frac{70{,}803109\ldots - 80{,}111176\ldots}{80{,}111176\ldots}$$ 4p (yht. 8p)

$$= -0{,}116189\ldots$$ 1p (yht. 9p)

$$= -11{,}6189\ldots\,\%$$ 1p (yht. 10p)

$$\approx -11{,}6\%$$ 1p (yht. 11p)

Vastaus: Ilmanpaine pienenee $11{,}6\,\%$, kun lentokone nousee kahden kilometrin korkeudelta kolmen kilometrin korkeuteen. 1p (yht. 12p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

6. Yhtälöitä tasossa (12 p.)

1. Tasojoukko A koostuu niistä pisteistä (x, y), joiden etäisyys pisteestä $(-3, 1)$ on 4. Mikä yhtälö kuvaa joukon A pisteitä? Miksi joukon A pisteitä ei voida esittää muodossa $y = f(x)$ minkään funktion f avulla? (6 p.)

2. Määritä niiden ympyröiden yhtälöt, joiden keskipiste on $(1, 2)$ ja jotka sivuavat ympyrää $x^2 + (y-2)^2 = 4$. (6 p.)

Ratkaisu.

1. Kyseessä on ympyrä, jonka keskipiste on $(-3, 1)$ ja säde on 4. Tällaisen ympyrän yhtälö keskipistemuodossa on

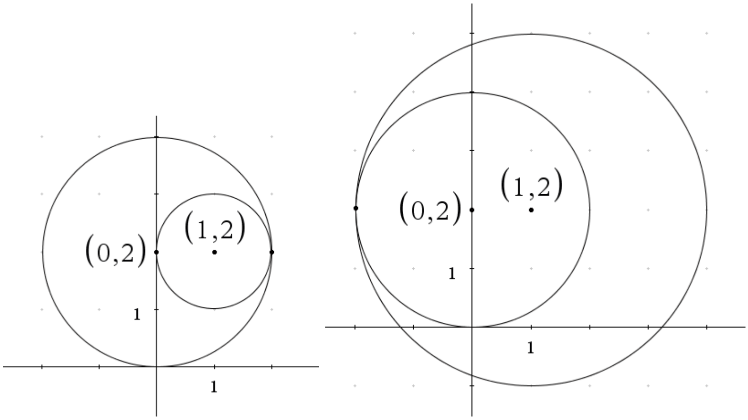
$$(x-(-3))^2 + (y-1)^2 = 4^2$$
$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 16. \quad \boxed{\text{3p (yht. 3p)}}$$

Muodossa $y = f(x)$ voidaan esittää pistejoukot, joissa tiettyä x:n arvoa vastaa täsmälleen yksi y:n arvo, eli jos piste (x_1, y_1) kuuluu pistejoukkoon, ei ole olemassa sellaista $y_2 \neq y_1$, että myös (x_1, y_2) kuuluisi pistejoukkoon. 1p (yht. 4p) Tehtävän pistejoukko A on ympyrä, joten siinä melkein kaikkia pistejoukon pisteitä (x_1, y_1) vastaa toinen piste (x_1, y_2), joka myös kuuluu joukkoon A. Täten pistejoukkoa A ei voida esittää muodossa $y = f(x)$. 2p (yht. 6p)

2. Ympyrän Y_1 yhtälö on

$$x^2 + (y-2)^2 = 4$$
$$(x-0)^2 + (y-2)^2 = 2^2,$$

eli sen keskipiste on $(0, 2)$ ja säde on 2. 1p (yht. 1p) Piirretään koordinaatistoon tämä ympyrä, sekä ne ympyrät, joiden keskipiste on $(1, 2)$ ja jotka sivuavat ensimmäistä ympyrää. Kuvat ovat lisäselitystä, jota ei vaadita ratkaisussa, mutta niiden lisääminen ratkaisun selkeyden parantamiseksi on hyvä ajatus.



Merkitään Y_2:lla ympyrää, jonka keskipiste on $(1, 2)$. Ympyröiden Y_1 ja Y_2 keskipisteiden y-koordinaatit ovat samat, joten niiden etäisyys on x-koordinaattien erotus, eli $1 - 0 = 1$. Tämä on pienempi kuin ympyrän Y_1 säde, joten ympyrän Y_2 keskipiste on ympyrän Y_1 sisäpuolella. 1p (yht. 2p)

Ympyrät sivuavat toisiaan, kun niillä on täsmälleen yksi yhteinen piste. Tämä toteutuu kahdessa tilanteessa.

1) Kun ympyrän Y_1 säde on suurempi kuin ympyrän Y_2 säde, jolloin ympyrän Y_2 säde on ympyrän Y_1 säteen ja ympyröiden keskipisteiden etäisyyden erotus, eli ympyrän Y_2 säde on $2 - 1 = 1$. 1p (yht. 3p)

2) Kun ympyrän Y_2 säde on suurempi kuin ympyrän Y_1 säde, jolloin ympyrän Y_2 säde on ympyröiden keskipisteiden etäisyyden ja ympyrän Y_1 säteen summa, eli ympyrän Y_2 säde on $1 + 2 = 3$. 1p (yht. 4p)

Kyseisten ympyröiden Y_2 yhtälöt ovat siis:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$$ 1p (yht. 5p)

ja

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9.$$ 1p (yht. 6p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

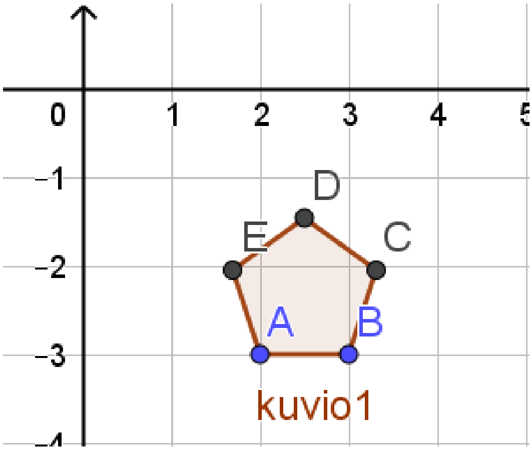
7. Avaruuskappale (12 p.)

Tämä tehtävä on tarkoitettu ratkaistavaksi ohjelmistolla. Vastaukset voi antaa likiarvoina, ja perusteluiksi riittävät kuvakaappaukset tai selitykset, joista ilmenee, mitä on mitattu. Tehtävän voi myös ratkaista algebrallisesti laskemalla. Tarkastellaan monitahokasta $M = ABCDEF$, jonka pohja $ABCDE$ on säännöllinen viisikulmio ja jonka sivutahkot ovat tasasivuisia kolmioita.

1. Piirrä kuva monitahokkaasta M. (4 p.)
2. Määritä monitahokkaan M särmän AF ja pohjan välinen kulma. (2 p.)
3. Määritä monitahokkaan M tahkon ABF ja pohjan välinen kulma. (2 p.)
4. Määritä monitahokkaan M tilavuus, kun särmän pituus on a. (4 p.)

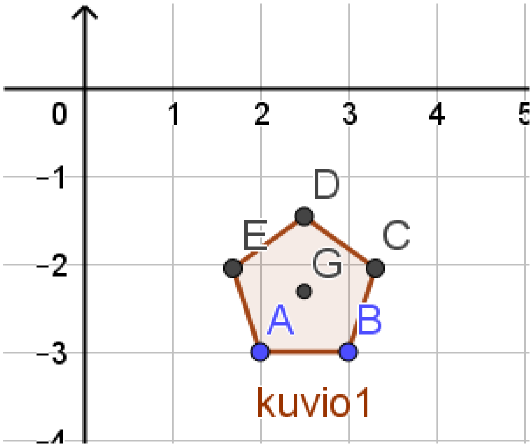
Ratkaisu.

1. Piirretään ensin GeoGebralla piirtoalueelle säännöllinen viisikulmio $ABCDE$, jonka sivun pituuden voi valita itse. Piirretään tällä kertaa säännöllinen viisikulmio, jonka sivun pituus on 1.

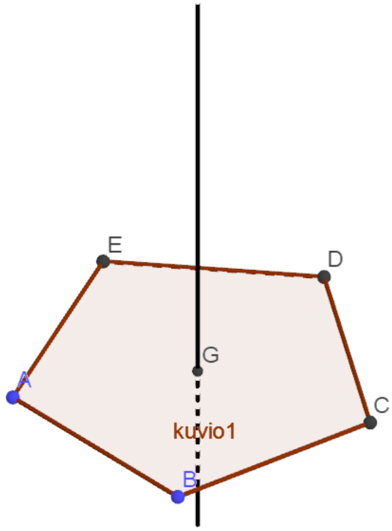


1p (yht. 1p)

Määritetään seuraavaksi viisikulmion $ABCD$ keskipiste G GeoGebran Keskipiste-työkalulla:



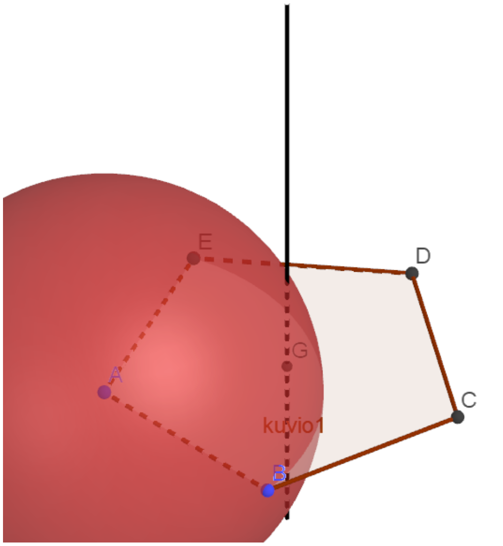
Piirretään GeoGebralla 3D-piirtoalueessa viisikulmiolle $ABCDE$ kohtisuora suora keskipisteeseen G.



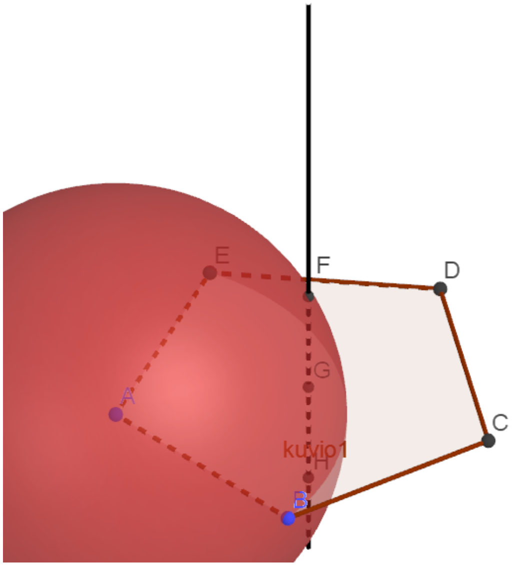
1p (yht. 2p)

Koska monitahokkaan $M = ABCDEF$ sivutahkot ovat tasasivuisia kolmioita, on kolmion sivun pituus piirroksessa 1.

Piirretään johonkin viisikulmion $ABCDE$ kärkipisteeseen pallo, jonka säde on 1.



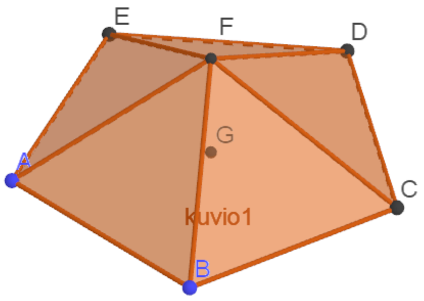
Määritetään pallon ja viisikulmion keskipisteen G kautta kulkevan suoran leikkauspisteet F ja H.



1p (yht. 3p)

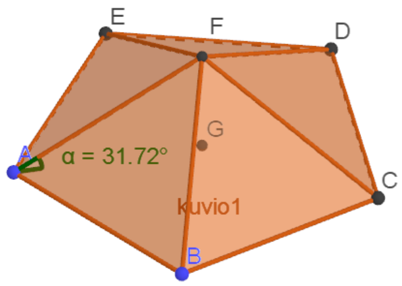
Piilotetaan kuvasta piste H, pallo ja pisteen G kautta kulkeva suora.

Piirretään sivutahkot AFB, BFC, CFD, DFE ja EFA, jolloin saadaan monitahokas $M = ABCDEF$. Sivutahkot voi piirtää joko Monikulmio- tai Pyramidityökalulla.



1p (yht. 4p)

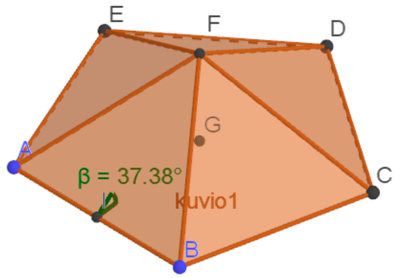
2. Monitahokkaan M särmän AF ja pohjan välinen kulma on sama kuin kolmion AGF kulma GAF. Määritetään GeoGebran Kulma-työkalulla kulma GAF: 1p (yht. 1p)



Monitahokkaan M särmän AF ja pohjan välinen kulma on noin $31{,}7°$. 1p (yht. 2p)

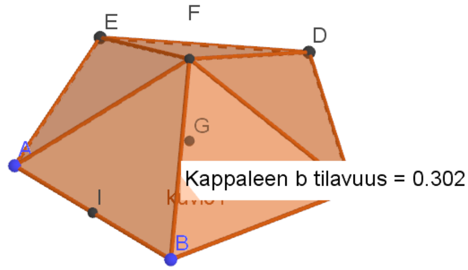
3. Monitahokkaan M tahkon ABF ja pohjan välinen kulma on sama kuin kolmion IGF kulma GIF, jossa piste I on sivun AB keskipiste. 1p (yht. 1p)

   Määritetään GeoGebran Kulma-työkalulla kulma GIF:



Monitahokkaan M tahkon ABF ja pohjan välinen kulma on noin $37{,}4°$. 1p (yht. 2p)

4. Määritetään GeoGebralla Tilavuus-työkalulla GeoGebralla piirretyn monitahokkaan $ABCDEF$ tilavuus:



2p (yht. 2p)

Piirroksessa särmän pituus on 1 ja tehtävässä särmän tulee olla a, joten kerrotaan tilavuus $0{,}302$ luvulla a^3. 1p (yht. 3p)

Tilavuus on siis $0{,}302a^3$. 1p (yht. 4p)

8. Raja-arvon suhteellinen virhe (12 p.)

Tarkastellaan raja-arvoa

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin t - \frac{1}{\sqrt{2}}}{t - \frac{\pi}{4}}.$$

1. Laske raja-arvolle likiarvot, kun $t - \frac{\pi}{4} = 10^{-k}$, $k = 2, 3, 4$. (4 p.)
2. Osoita, että raja-arvon tarkka arvo on $\frac{1}{\sqrt{2}}$ tulkitsemalla tutkittava lauseke erotusosamääräksi. (4 p.)
3. Määritä osatehtävässä 1 laskemiesi likiarvojen suhteelliset virheet. (4 p.)

Ratkaisu.

Merkitään

$$f(t) = \frac{\sin(t) - \frac{1}{\sqrt{2}}}{t - \frac{\pi}{4}}.$$

1. Tarkastellaan tehtävänannon mukaisesti t:n arvoja

$$t - \frac{\pi}{4} = 10^{-k}$$
$$t = \frac{\pi}{4} + 10^{-k},$$

kun $k = 2, 3, 4$, eli arvoja

$$t_2 = \frac{\pi}{4} + 10^{-2}$$
$$t_3 = \frac{\pi}{4} + 10^{-3}$$
$$t_4 = \frac{\pi}{4} + 10^{-4}.$$ 1p (yht. 1p)

Lasketaan näitä vastaavat $f(t)$:n likiarvot CAS-ohjelman avulla.

$$f(t_2) = 0{,}7035594\ldots \approx 0{,}703559$$ 1p (yht. 2p)

$$f(t_3) = 0{,}7067531\ldots \approx 0{,}706753$$ 1p (yht. 3p)

$$f(t_4) = 0{,}7070714\ldots \approx 0{,}707071$$ 1p (yht. 4p)

2. Tiedetään, että

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

joten tehtävänannon raja-arvo on

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{t - \frac{\pi}{4}},$$

Tämä on erotusosamäärän raja-arvona funktion $\sin(t)$ derivaatta kohdassa $x = \frac{\pi}{4}$. 1p (yht. 1p) Funktion $\sin(t)$ derivaatta on $\cos(t)$, 1p (yht. 2p) joten raja-arvon tarkka arvo on

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$ 2p (yht. 4p)

3. Suhteelliset virheet ovat

$$\begin{aligned}\frac{f(t_2) - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} &= -0{,}0050166\ldots\\ &= -0{,}50166\ldots\%\\ &\approx -0{,}502\%\end{aligned}$$ 2p (yht. 2p)

$$\begin{aligned}\frac{f(t_3) - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} &= -0{,}00050016\ldots\\ &= -0{,}050016\ldots\%\\ &\approx -0{,}0500\%\end{aligned}$$ 1p (yht. 3p)

$$\begin{aligned}\frac{f(t_4) - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} &= -0{,}00005000\ldots\\ &= -0{,}005000\ldots\%\\ &\approx -0{,}00500\%\end{aligned}$$ 1p (yht. 4p)

Pisteytyksestä: Kohdassa 3 saa 2 p ensimmäisen suhteellisen virheen laskemisesta, ja 1 p / suhteellinen virhe seuraavien kahden laskemisesta.

9. Tilin tyhjennys (12 p.)

Mikko tyhjentää tilinsä nostamalla pankkiautomaatista 370 euroa. Automaatti antaa hänelle x kappaletta kahdenkymmenen ja y kappaletta viidenkymmenen euron seteleitä.

1. Muodosta tapahtumaa kuvaava yhtälö, jonka luvut x ja y toteuttavat. (3 p.)
2. Kuinka monella eri tavalla automaatti voi antaa 370 euroa pelkkinä 20 ja 50 euron seteleinä? Seteleiden järjestystä ei oteta huomioon. (9 p.)

Ratkaisu.

1. Koska x ja y ovat seteleiden kappalemääriä, ovat ne ei-negatiivisia kokonaislukuja.

   Automaatti antaa x kappaletta 20 euron seteleitä ja y kappaletta 50 euron seteleitä, joten rahaa on yhteensä $20x + 50y$. Mikko tyhjensi tilinsä, joten tilannetta kuvaa yhtälö

   $$20x + 50y = 370,$$

   jossa x ja y ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja. 3p (yht. 3p)

2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Yksinkertaistetaan ensin yhtälöä:

$$20x + 50y = 370 \quad \| : 10$$
$$2x + 5y = 37.$$ 1p (yht. 1p)

Koska x ja y ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja, yhtälöllä

$$2x + 5y = 37$$

tulee olla siis kokonaislukuratkaisuja $x \geq 0$ ja $y \geq 0$.

Päätellään seuraavaksi, mitä kokonaislukuarvoja muuttujat x ja y voivat saada:

Täytyy olla $2x \leq 37$, joten x voi olla korkeintaan kokonaisluku 16. Toisin sanoen $0 \leq x \leq 16$.

Täytyy olla $5y \leq 37$, joten y voi olla korkeintaan kokonaisluku 7. Toisin sanoen $0 \leq y \leq 7$. 2p (yht. 3p)

Tämän lisäksi huomataan, että summan $2x + 5y$ tulee olla pariton $(= 37)$. Koska $2x$ on aina parillinen, tulee siis luvun $5y$ olla pariton. Luku $5y$ on pariton, kun luku y on pariton, 1p (yht. 4p) joten luvuiksi y kelpaavat vain luvut 1, 3, 5 ja 7. 2p (yht. 6p)

Käydään läpi kaikki neljä eri vaihtoehtoa sijoittamalla muuttujan y arvot 1, 3, 5 ja 7 yhtälöön $2x + 5y = 37$ ja ratkaisemalla x.

Kun $y = 1$, niin

$$\begin{aligned} 2x + 5 \cdot 1 &= 37 \quad \| -5 \\ 2x &= 32 \quad \| : 2 \\ x &= 16. \end{aligned}$$

Kun $y = 3$, niin

$$\begin{aligned} 2x + 5 \cdot 3 &= 37 \quad \| -15 \\ 2x &= 22 \quad \| : 2 \\ x &= 11. \end{aligned}$$

Kun $y = 5$, niin

$$\begin{aligned} 2x + 5 \cdot 5 &= 37 \quad \| -25 \\ 2x &= 12 \quad \| : 2 \\ x &= 6. \end{aligned}$$

Kun $y = 7$, niin

$$\begin{aligned} 2x + 5 \cdot 7 &= 37 \quad \| -35 \\ 2x &= 2 \quad \| : 2 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

2p (yht. 8p)

Kaikki neljä eri ratkaisua toteuttavat kokonaislukuyhtälön ehdot, joten pankkiautomaatti voi antaa rahat neljällä eri tavalla. 1p (yht. 9p)

Ratkaisuvaihtoehto 2

Yksinkertaistetaan ensin yhtälöä:

$$20x + 50y = 370 \quad || : 10$$

$$2x + 5y = 37.$$ 1p (yht. 1p)

Koska x ja y ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja, yhtälöllä

$$2x + 5y = 37$$

tulee olla siis kokonaislukuratkaisuja $x \geq 0$ ja $y \geq 0.$

Kyseessä on Diofantoksen yhtälö. Etsitään yksittäisratkaisu kokeilemalla. Eräs yksittäisratkaisu on $x_0 = 1$ ja $y_0 = 7$, koska $2 \cdot 1 + 5 \cdot 7 = 37.$ 1p (yht. 2p) Yksittäisratkaisun voi etsiä myös Eukleideen algoritmilla.

Määritetään laskinohjelmalla $\mathrm{syt}(2, 5) = 1.$ Lukujen 2 ja 5 suurin yhteiden tekijä 1 voidaan myös perustella sillä, että molemmat luvut 2 ja 5 ovat alkulukuja.

Diofantoksen yhtälön $2x + 5y = 37$ yleinen ratkaisu on

$$x = x_0 + \frac{n \cdot 5}{\mathrm{syt}(2,5)} \quad \text{ja} \quad y = y_0 - \frac{n \cdot 2}{\mathrm{syt}(2,5)}$$

$$x = 1 + \frac{n \cdot 5}{1} \quad \text{ja} \quad y = 7 - \frac{n \cdot 2}{1}$$

$$x = 1 + 5n \quad \text{ja} \quad y = 7 - 2n,$$

2p (yht. 4p)

jossa n on kokonaisluku. Koska muuttujien x ja y tulee olla ei-negatiivisia, saadaan epäyhtälöt:

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$1 + 5n \geq 0 \quad \text{ja} \quad 7 - 2n \geq 0$$

1p (yht. 5p)

Ratkaistaan epäyhtälöt laskinohjelmalla, jolloin saadaan

$$-\frac{1}{5} \leq n \leq \frac{7}{2}.$$ 1p (yht. 6p)

Tähän väliin kuuluvat kokonaisluvut 0, 1, 2 ja 3. Koska n on kokonaisluku, nämä ovat siis kaikki luvun n arvot, jotka toteuttavat epäyhtälöt. 2p (yht. 8p)

Kun $n = 0$, saadaan $x = 1 + 5 \cdot 0 = 1$ ja $y = 7 - 2 \cdot 0 = 7$.

Kun $n = 1$, saadaan $x = 1 + 5 \cdot 1 = 6$ ja $y = 7 - 2 \cdot 1 = 5$.

Kun $n = 2$, saadaan $x = 1 + 5 \cdot 2 = 11$ ja $y = 7 - 2 \cdot 2 = 3$.

Kun $n = 3$, saadaan $x = 1 + 5 \cdot 3 = 16$ ja $y = 7 - 2 \cdot 3 = 1$.

Diofantoksen yhtälölle $2x + 5y = 37$ löytyy siis neljä kokonaislukuratkaisua, joten pankkiautomaatti voi antaa rahat neljällä eri tavalla. 1p (yht. 9p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

10. Osittaisderivaatta (12 p.)

Aineisto:

10. A [Kuva: Funktion kuvaaja]

Tarkastellaan kahden muuttujan funktiota

$$f(x,y) = x^4 + 32x + y^2 - 6y + 60.$$

1. Laske funktion osittaisderivaatat f_x ja f_y. (4 p.)

2. Oletetaan tunnetuksi, että tämän funktion f pienin arvo saadaan siinä tason pisteessä, jossa yhtälöpari

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

toteutuu (ks. kuva 10.A). Määritä funktion f pienin arvo tätä tietoa käyttämällä. (8 p.)

Huomautus: Osittaisderivaatalle f_x käytetään myös merkintöjä f'_x, $D_x f$, $D_1 f$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ja $\partial_1 f$; vastaavalla tavalla osittaisderivaatalle f_y.

Ratkaisu.

1. Funktio on

$$f(x,y) = x^4 + 32x + y^2 - 6y + 60.$$

Lasketaan osittaisderivaatta f_x, eli derivoidaan $f(x,y)$ muuttujan x suhteen.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^{4-1} + 32 \cdot 1x^{1-1} + 0 \\ &= 4x^3 + 32. \quad \boxed{\text{2p (yht. 2p)}} \end{aligned}$$

Lasketaan osittaisderivaatta f_y, eli derivoidaan $f(x,y)$ muuttujan y suhteen.

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= 0 + 2y^{2-1} - 6 \cdot 1y^{1-1} + 0 \\ &= 2y - 6. \quad \boxed{\text{2p (yht. 4p)}} \end{aligned}$$

2. Yhtälöpari on siis kohdan 1 nojalla

$$4x^3 + 32 = 0$$
$$2y - 6 = 0.$$

Ratkaistaan yhtälöt CAS-ohjelman avulla. Saadaan

$$x = -2$$ 3p (yht. 3p)

$$y = 3.$$ 3p (yht. 6p)

Selvitetään funktion pienin arvo sijoittamalla $x = -2$ ja $y = 3$ funktion lausekkeeseen.

$$\begin{aligned} f(-2,3) &= (-2)^4 + 32 \cdot (-2) + 3^2 - 6 \cdot 3 + 60 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Vastaus: Funktion pienin arvo on 3. 2p (yht. 8p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

11. Noppapeli (12 p.)

Eräässä pelissä kaksi pelaajaa A ja B heittävät noppaa vuorotellen, kunnes toinen pelaaja voittaa ja peli loppuu.
Pelaaja A voittaa pelin, jos hän heittää vuorollaan tuloksen 1 tai 2.
Pelaaja B voittaa pelin, jos hän heittää vuorollaan tuloksen 1, 2 tai 3.
Pelaaja A aloittaa.

1. Millä todennäköisyydellä peli päättyy siihen, että A voittaa ensimmäisellä heitollaan? (2 p.)
2. Millä todennäköisyydellä peli päättyy siihen, että B voittaa ensimmäisellä heitollaan? (4 p.)
3. Mikä on kummankin pelaajan todennäköisyys voittaa peli? (6 p.)

Ratkaisu.

Oletetaan, että kyseessä on 6-tahkoinen noppa, jossa ovat numerot 1, 2, 3, 4, 5 ja 6.

1. Pelaaja A voittaa pelin, jos hän heittää vuorollaan tuloksen 1 tai 2. Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on 6. Suotuisia alkeistapauksia on 2. Pelaaja A voittaa siis ensimmäisellä heitollaan todennäköisyydellä

$$P(A \text{ voittaa 1. heitolla}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$ 2p (yht. 2p)

2. Merkitään:

$$A = A \text{ voittaa 1. heitolla}$$

$$\overline{A} = A \text{ ei voita 1. heitolla}$$

$$B = B \text{ voittaa 1. heitolla}$$

Pelaaja A ei voita peliä ensimmäisellä heitollaan todennäköisyydellä

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$P(\overline{A}) = \frac{2}{3}.$$ 1p (yht. 1p)

Pelaaja B voittaa pelin, jos hän heittää vuorollaan tuloksen 1, 2 tai 3. Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on 6. Suotuisia alkeistapauksia on siis 3. Pelaaja B voittaa ensimmäisellä heitollaan todennäköisyydellä

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$ 1p (yht. 2p)

Todennäköisyys sille, että pelaaja B voittaa ensimmäisellä heittovuorollaan ja peli päättyy, on

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \text{ ja } B) &= P(\overline{A}) \cdot P(B) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$ 2p (yht. 4p)

3.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Ensimmäisellä kierroksella pelaajan A voittotodennäköisyys on $\frac{1}{3}$ ja pelaajan B voittotodennäköisyys on $\frac{1}{3}$. Siis ensimmäisellä kierroksella kummankin pelaajan todennäköisyys on sama. 1p (yht. 1p)

Jos kumpikaan ei voita ensimmäisellä kierroksella, toisen kierroksen alussa tilanne on identtinen ensimmäisen kierroksen alun kanssa, ja sama pätee kaikille seuraavillekin kierroksille. Näin ollen millä tahansa kierroksella pelaajien voiton todennäköisyydet ovat keskenään samat. 1p (yht. 2p)

Peli päättyy varmasti toisen pelaajan voittoon, joten todennäköisyys, että peli ei päädy, on 0. 2p (yht. 4p) Siis kummankin pelaajan todennäköisyys voittaa on $\frac{1}{2}$. 2p (yht. 6p)

Ratkaisuvaihtoehto 2

Molemmilla pelaajilla on voittotodennäköisyys joka kierroksella $\frac{1}{3}$. 1p (yht. 1p) Todennäköisyys, että edetään toiselle kierrokselle, on siis

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Todennäköisyys, että edetään kolmannelle kierrokselle, on tällöin

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}.$$

Vastaavasti todennäköisyys, että peli päätyy kierrokselle n asti, on

$$\frac{1}{3^{n-1}}.$$ 1p (yht. 2p)

Täten pelaajan voittotodennäköisyys koko pelissä on

$$P = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2} + \ldots$$ 2p (yht. 4p)

joka on suppeneva geometrinen sarja, missä $a_1 = \frac{1}{3}$ ja $q = \frac{1}{3}$. Suppenevan sarjan summa on

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Kummankin pelaajan voiton todennäköisyys on siis $\frac{1}{2}$. 2p (yht. 6p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

12. Paraabelialueita (12 p.)

Tarkastellaan paraabeleja, jotka kulkevat pisteiden $(-1,0)$ ja $(1,0)$ kautta ja ovat y-akselin suhteen symmetrisiä.

1. Kirjoita tällaisen paraabelin yleinen yhtälö. (2 p.)
2. Millä ehdolla kaksi tällaista paraabelia leikkaa toisensa kohtisuorassa? (5 p.)
3. Tarkastellaan pinta-alaa, joka jää kahden tällaisen toisensa kohtisuoraan leikkaavan paraabelin väliin. Mikä on tämän pinta-alan pienin mahdollinen arvo? (5 p.)

Ratkaisu.

1. Paraabelit ovat y-akselin suhteen symmetrisiä, joten niiden yhtälöt ovat muotoa

$$y = ax^2 + b,$$

missä $a \neq 0$ ja b ovat reaalilukuja. 1p (yht. 1p) Paraabelit kulkevat pisteen $(1,0)$ kautta, joten niille pätee

$$\begin{aligned} a \cdot 1^2 + b &= 0 \\ a + b &= 0 \\ b &= -a. \end{aligned}$$

Paraabelit kulkevat myös pisteen $(-1,0)$ kautta, mistä saadaan sama ehto kuin yllä. Paraabelin yhtälö on siis muotoa

$$\begin{aligned} y &= ax^2 - a \quad \text{1p (yht. 2p)} \\ y &= a(x^2-1). \end{aligned}$$

Huomaa! Kumpi vain ylläolevista muodoista käy vastaukseksi.

2. Paraabelit leikkaavat toisensa kohtisuorassa, jos niiden leikkauspisteeseen piirretyt tangentit ovat keskenään kohtisuorassa, eli jos tangenttien kulmakertoimille pätee

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Merkitään kahta eri paraabelia yhtälöillä

$$y = f_1(x) = a_1(x^2 - 1)$$
$$y = f_2(x) = a_2(x^2 - 1),$$

missä $a_1 \neq a_2$.

Paraabelit leikkaavat, kun

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_2(x) \\ a_1(x^2-1) &= a_2(x^2-1) \\ a_1(x^2-1) - a_2(x^2-1) &= 0 \\ (a_1 - a_2)(x^2-1) &= 0. \end{aligned}$$

Tiedetään, että $a_1 - a_2 \neq 0$, koska $a_1 \neq a_2$, joten tulon nollasäännön nojalla täytyy olla

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x &= 1 \quad \text{tai} \quad x = -1. \end{aligned}$$

Ehdot täyttävät eri paraabelit leikkaavat siis vain tehtävänannossa mainituissa pisteissä $(-1, 0)$ ja $(1, 0)$. 1p (yht. 1p) Derivoidaan paraabelien lausekkeet.

$$f_1'(x) = a_1 \cdot 2x = 2a_1x$$
$$f_2'(x) = a_2 \cdot 2x = 2a_2x.$$

Derivaatat (tangenttien kulmakertoimet) kohdassa $x = 1$:

$$f_1'(1) = 2a_1 \cdot 1 = 2a_1$$
$$f_2'(1) = 2a_2 \cdot 1 = 2a_2.$$

1p (yht. 2p)

Näin ollen paraabelit leikkaavat toisensa kohtisuorassa, kun

$$2a_1 \cdot 2a_2 = -1 \quad \text{1p (yht. 3p)}$$
$$a_1 \cdot a_2 = -\frac{1}{4}.$$

Kaksi tehtävänannon mukaista paraabelia $y = a_1(x^2 - 1)$ ja $a_2(x^2 - 1)$ leikkaavat toisensa kohtisuorassa, jos niiden kertoimille a_1 ja a_2 pätee yhtälö

$$a_1 \cdot a_2 = -\frac{1}{4}.$$ 2p (yht. 5p)

Ehdon voi esittää myös muodossa

$$a_1 = -\frac{1}{4a_2}.$$

3.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Olkoon yksi paraabeleista

$$y = f_1(x) = a(x^2 - 1).$$

Kohdassa 2 johdetun ehdon mukaisesti toisen täytyy olla

$$y = f_2(x) = -\frac{1}{4a}(x^2 - 1).$$

Olkoon $a > 0$. Tällöin paraabelien väliin jäävä pinta-ala on

$$A(a) = \int_{-1}^{1} (f_2(x) - f_1(x))\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(-\frac{1}{4a}(x^2 - 1) - a(x^2 - 1)\right)\,\mathrm{d}x$$ 1p (yht. 1p)

CAS-ohjelmalla saadaan:

$$= \frac{4a^2 + 1}{3a}$$ 2p (yht. 3p)

CAS-ohjelman toiminnolla saadaan, että pinta-ala saa pienimmän arvonsa, kun $a = \frac{1}{2}$. 1p (yht. 4p) Tällöin pinta-alan arvo on siis

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}.$$

Vastaus: Kysytty pienin mahdollinen pinta-ala on $\frac{4}{3}$. 1p (yht. 5p)

Ratkaisuvaihtoehto 2

Olkoon yksi paraabeleista

$$y = f_1(x) = a(x^2 - 1).$$

Kohdassa 2 johdetun ehdon mukaisesti toisen täytyy olla

$$y = f_2(x) = -\frac{1}{4a}(x^2 - 1).$$

Olkoon $a > 0$. Tällöin paraabelien väliin jäävä pinta-ala on

$$A(a) = \int_{-1}^{1} (f_2(x) - f_1(x))\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(-\frac{1}{4a}(x^2 - 1) - a(x^2 - 1)\right)\,\mathrm{d}x$$ 1p (yht. 1p)

CAS-ohjelmalla saadaan:

$$= \frac{4a^2 + 1}{3a}$$ 2p (yht. 3p)

Selvitetään pienin arvo. Derivoidaan $A(a)$ CAS-ohjelman avulla.

$$A'(a) = \frac{4a^2 - 1}{3a^2}.$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat CAS-ohjelman avulla.

$$A'(a) = 0$$

$$\frac{4a^2 - 1}{3a^2} = 0$$

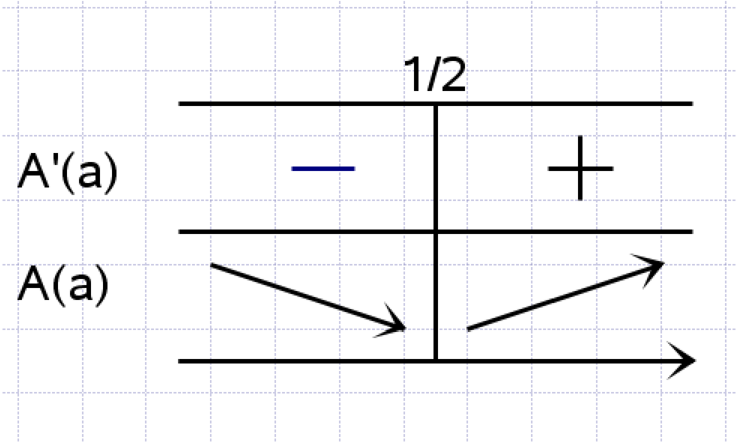
$$a = \pm\frac{1}{2}$$

Luku $a > 0$, eli derivaatan nollakohta on $a = \frac{1}{2}$. Lasketaan derivaatan arvot, kun $a = \frac{1}{4}$ ja $a = 1$.

$$A'\left(\frac{1}{4}\right) = -4$$

$$A'(1) = 1.$$

Kulkukaavio:



Pinta-ala saa siis pienimmän arvonsa, kun $a = \frac{1}{2}$. 1p (yht. 4p) Pinta-alan pienin arvo on

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}.$$

Vastaus: Kysytty pienin mahdollinen pinta-ala on $\frac{4}{3}$. 1p (yht. 5p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

13. Eksponenttiyhtälö (12 p.)

Tutki yhtälön $e^{ax} = \ln x$ positiivisten ratkaisujen lukumäärää kaikilla parametrin $a > 0$ eri arvoilla.

Tehtävänanto tässä yo-tehtävässä oli epäselvä ja olisi tarvinnut tällaisen tarkennuksen: Esitä perustellen kaikki mahdolliset ratkaisujen määrät ottaen huomioon, että parametri a voi saada mitä tahansa arvoja $a > 0$. Sinun ei tarvitse sanoa, millä muuttujan a arvolla mikäkin määrä ratkaisuja saadaan. Riittää, kun osoitat, että kukin antamistasi vaihtoehdoista on mahdollinen.

Ratkaisu.

Tarkastellaan erotusfunktiota

$$f(x) = e^{ax} - \ln(x),$$

missä $a > 0$ ja $x > 0$. Sillä on täsmälleen sama määrä nollakohtia kuin tehtävänannon yhtälöllä on positiivisia ratkaisuja. 1p (yht. 1p)

Derivoidaan f.

$$f'(x) = ae^{ax} - \frac{1}{x}.$$ 1p (yht. 2p)

Derivoidaan f'.

$$f''(x) = a^2e^{ax} + \frac{1}{x^2}.$$ 1p (yht. 3p)

Toisen derivaatan $f''(x)$ lauseke on positiivinen kaikilla $a > 0$ ja $x > 0$, 1p (yht. 4p) joten derivaattafunktio f' on aidosti kasvava. Derivaattafunktio f' on myös jatkuva, joten näin ollen sillä on korkeintaan yksi nollakohta. Näin ollen jatkuvalla funktiolla f on korkeintaan kaksi nollakohtaa. 3p (yht. 7p)

Tutkitaan vielä, mitkä nollakohtien lukumääristä 0, 1 ja 2 ovat mahdollisia. Huomataan, että $\ln(x) \leq 0$, kun $x \leq 1$ ja toisaalta $e^{ax} > 0$ kaikilla x, joten

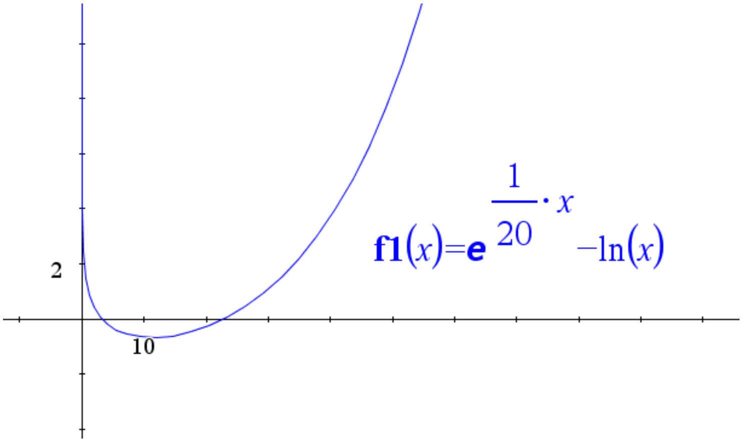
$$f(x) = e^{ax} - \ln(x) > 0,$$

kun $x \leq 1$.

Toisaalta $f'(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$, joten myös $f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$. Näin ollen riippumatta a:n arvosta $f(x)$ saa positiivisia arvoja myös tiettyä suuremmilla arvoilla.

Nyt siis jos $f(x)$ saa jossain kohtaa negatiivisia arvoja, sillä on kaksi nollakohtaa. Jos taas $f(x)$ ei saa negatiivisia arvoja, mutta saa yhdessä kohdassa arvon 0, sillä on yksi nollakohta. Jos taas $f(x)$ saa vain positiivisia arvoja, sillä ei ole yhtään nollakohtaa.

Piirretään funktion f kuvaajia a:n eri arvoilla, jotta saadaan selville a:n arvot, joiden avulla voidaan osoittaa, että eri nollakohtien määrät ovat mahdollisia. Alla oleva kuva on osa lisäselitystä eikä sitä vaadita ratkaisussa.

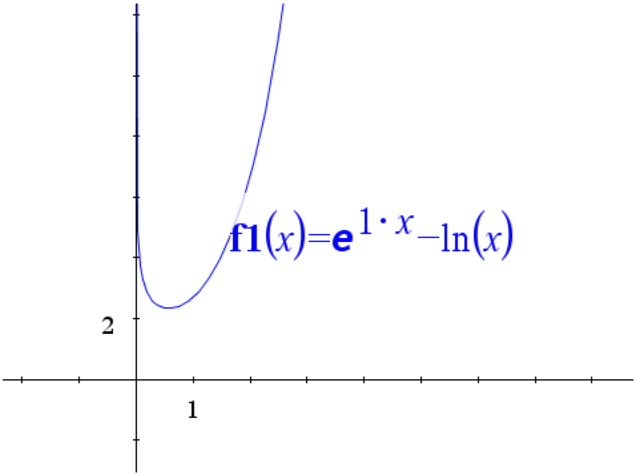


Tarkastellaan funktiota f kohdassa $x = 10$, kun $a = \frac{1}{20}$.

$$
\begin{aligned}
f(10) &= e^{\frac{1}{20}\cdot 10} - \ln(10) \\
&= e^{\frac{1}{2}} - \ln(10) \\
&= -0{,}6538\ldots < 0
\end{aligned}
$$

Funktio f saa siis negatiivisia arvoja, kun $a = \frac{1}{20}$, eli funktiolla on tällöin täsmälleen kaksi nollakohtaa. 2p (yht. 9p)

Alla oleva kuva on osa lisäselitystä eikä sitä vaadita ratkaisussa.



Tarkastellaan funktiota f, kun $a = 1$. Funktion f derivaatta on tällöin

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x}.$$

Kun $x \geq 1$, $e^x > 1 > \frac{1}{x}$, eli $f'(x) > 0$. Toisaalta aiemmin todettiin, että $f(x) > 0$, kun $x \leq 1$. Näin ollen a:n arvolla 1 ei ole lainkaan nollakohtia. 2p (yht. 11p)

Tarkastellaan funktiota

$$g(a) = e^{ax} - \ln(x).$$

Funktio g on jatkuva ja aiemmin osoitettin, että löytyy x, jolla $g\left(\frac{1}{20}\right) < 0$ ja toisaalta ei löydy x:n arvoa, jolla $g(1) < 0$. Näin ollen g:n jatkuvuuden nojalla tietyllä a:n arvolla löytyy x, jolla $g(a) = 0$, mutta ei löydy x:ää, jolla $g(a) < 0$. Tätä a:n arvoa vastaa siis tilanne, jossa funktiolla f on yksi nollakohta. 1p (yht. 12p)

Huomaa! Ylläoleva perustelu tilanteesta, jossa on täsmälleen yksi nollakohta, ei ole ihan tyydyttävällä tavalla täsmällinen. Perustelussa vedotaan osittain intuitioon siitä, mitä jatkuvuudesta seuraa. YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 22.9.2021) oli tehty vastaavalla tavalla, joten tämä tapa melko varmasti hyväksytään. Tämän kohdan voi perustella lukiotiedoilla täsmällisestikin osoittamalla, että löytyy sellainen a, jolla funktion f pienin arvo on nolla. Toisin sanoen tutkimalla yhtälöparia $f(x) = 0$ ja $f'(x) = 0$. Kyseinen laskelma perusteluineen on kuitenkin varsin pitkä ja työläs suhteessa siitä saataviin pisteisiin.

Vastaus: Yhtälöllä $e^{ax} = \ln(x)$ voi olla 0, 1 tai 2 positiivista ratkaisua riippuen positiivisen parametrin a arvosta.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!