

Yo-mallivastaukset



Syksy 2021
Lyhyt matematiikka

Tiesitkö tämän?

Mafylaiset veivät
vuoden 2020
haussa

81%

kaikista lääiksen
pääsykoekiintiön paikoista.

60%

Pk-seudun lukioista
käyttää **Mafynettiä**.

Mafynetin oppimateriaalit tulossa kaikkiin LOPS 2021
moduuleihin matematiikkaan, fysiikkaan, kemiaan ja
biologiaan!

Mafynetti

Mallivastausten tekijät:

Malliratkaisujen laatimisesta ovat vastanneet MAFY:n toinen perustaja Antti Suominen sekä MAFY:n oppimateriaalitiimi, jonka päätehtävä on laatia ja kehittää MAFY:n lukioon tarkoitettuja oppimateriaaleja.

Oppimateriaalitiimistä mukana olivat Antti Suomisen lisäksi Saija Ojala, Jori Suominen ja Timo Kalinainen.

Lisäksi työn tukena olivat Tuomas Hauvala ja Matti Virolainen.

Mafy oppimateriaalit

Olemme Helsingissä, Tampereella, Turussa ja Jyväskylässä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys.

Palveluitamme ovat:

- Mafynetti – sähköinen oppimateriaali
- Lääketieteellisen valmennuskurssit
- Kauppatieteellisen valmennusmateriaalit
- DI-valmennuskurssit
- Yo-kokeisiin valmentavat kurssit

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kurseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Käyttöehdot

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafyvalmennus.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion matematiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukiokursseillasi. Nämä mallivastaukset ovat MAFY Oy:n omaisuutta.

MAFY Oy:n yhteystiedot:

<https://mafy.fi/yhteydenotto>

Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	7
Ratkaisu tehtävään 3	12
Ratkaisu tehtävään 4	19
Ratkaisu tehtävään 5	21
Ratkaisu tehtävään 6	23
Ratkaisu tehtävään 7	25
Ratkaisu tehtävään 8	26
Ratkaisu tehtävään 9	28
Ratkaisu tehtävään 10	36
Ratkaisu tehtävään 11	39
Ratkaisu tehtävään 12	43
Ratkaisu tehtävään 13	45

Malliratkaisut päivitetty 22. syyskuuta 2021 klo. 03:52.

1. Lausekkeita ja yhtälöitä (12 p.)

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 3 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

1.1. Mikä on lausekkeen $2x + 8$ arvo, kun $x = -3$? (3 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: $-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

1.2. Aritmeettisen lukujonon (a_n) yleinen termi on $a_n = 3n + 9$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Mikä on indeksin n pienin arvo, jota vastaava termi a_n on suurempi kuin 100? (3 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: $n = 10, n = 11, n = 30, n = 31, n = 100, n = 101$, "ei mikään näistä vaihtoehdoista".

1.3. Yhtälö $x^2 - 4x = 0$ toteutuu (3 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "vain arvolla $x = 4$ ", "vain arvolla $x = 0$ ", "vain arvolla $x = -4$ ", "arvoilla $x = 0$ ja $x = 4$ ", "arvoilla $x = 0$ ja $x = -4$ ", "arvoilla $x = -4$ ja $x = 4$ ".

1.4. Yhtälöparilla (3 p.)

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$$

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "ei ole ratkaisua", "on täsmälleen yksi ratkaisu", "on äärettömän monta ratkaisua", "ei mikään näistä vaihtoehdoista toteudu".

Ratkaisu.**1.1. Vastaus:** 2 3 p. (yht. 3 p.)

Perustelut:

Sijoitetaan luku -3 lausekkeeseen $2x + 8$ muuttujan x paikalle.

$$2 \cdot (-3) + 8 = -6 + 8 = 2$$

1.2. Vastaus: $n = 31$ 3 p. (yht. 6 p.)

Perustelut:

Ratkaisuvaihtoehto 1

Aritmeettisen lukujonon yleinen termi on $a_n = 3n + 9$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Selvittäään, mikä on pienin lukujonon jäsen, joka on suurempi kuin 100. Ratkaistaan siis yhtälö $a_n = 100$.

$$a_n = 100$$

$$3n + 9 = 100 \quad || - 9$$

$$3n = 91 \quad || : 3$$

$$n = 30,333\dots$$

Koska erotusluku $d = 3$ on positiivinen, lukujonon jäsen kasvaa indeksin n kasvaessa. Pienin indeksin n arvo, jota vastaava termi a_n on suurempi kuin 100, on siis 31.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Lasketaan lukujonon jäseniä annetuilla vaihtoehdoilla.

$$a_{10} = 3 \cdot 10 + 9 = 39$$

$$a_{11} = 3 \cdot 11 + 9 = 42$$

$$a_{30} = 3 \cdot 30 + 9 = 99$$

$$a_{31} = 3 \cdot 31 + 9 = 102$$

$$a_{100} = 3 \cdot 100 + 9 = 309$$

$$a_{101} = 3 \cdot 101 + 9 = 312$$

Koska indeksi n on kokonaisluku, niin huomataan, että pienin indeksin n arvo on 31, jota vastaava termi a_n on suurempi kuin 100.

1.3. **Vastaus:** arvoilla $x = 0$ ja $x = 4$ 3 p. (yht. 9 p.)

Perustelut:

Ratkaisuvaihtoehto 1

Ratkaistaan yhtälö käyttäen toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa.

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{4+4}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{4-4}{2}$$

$$x = \frac{8}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{0}{2}$$

$$x = 4 \quad \text{tai} \quad x = 0$$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Ratkaistaan yhtälö tulon nollasäännöllä.

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 4 = 0 \quad \parallel + 4$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 4$$

1.4. **Vastaus:** on täsmälleen yksi ratkaisu

3 p. (yht. 12 p.)

Perustelut:

Ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$$

Ratkaistaan ylemmästä yhtälöstä x .

$$x + 2y = 10 \quad \parallel - 2y$$

$$x = 10 - 2y$$

Sijoitetaan tämä yhtälöparin alempaan yhtälöön muuttujan x paikalle ja ratkaistaan y .

$$\begin{aligned}2x - y &= 10 && \parallel x = 10 - 2y \\2 \cdot (10 - 2y) - y &= 10 \\2 \cdot 10 - 2 \cdot 2y - y &= 10 \\20 - 4y - y &= 10 \\20 - 5y &= 10 && \parallel - 20 \\-5y &= 10 - 20 \\-5y &= -10 && \parallel : (-5) \\y &= 2\end{aligned}$$

Ratkaistaan vielä x .

$$\begin{aligned}x &= 10 - 2y && \parallel y = 2 \\x &= 10 - 2 \cdot 2 \\x &= 10 - 4 \\x &= 6\end{aligned}$$

Yhtälöparilla on siis ratkaisu, jossa $x = 6$ ja $y = 2$. Täten yhtälöparilla on täsmälleen yksi ratkaisu.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

2. Pituuksia ja pinta-aloja (12 p.)

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria. Kunkin vastauksen maksimipituus on 10 merkkiä. Vastaukset arvostellaan tietokoneavusteisesti ja ohjeiden noudattamatta jättäminen voi johtaa pistevähennyksiin. Jokaisesta kohdasta voi saada 3 pistettä.

- 2.1. Suorakulmion lävistäjän pituus on 5,0 cm ja lyhyemmän sivun pituus 2,0 cm. Määritä suorakulmion pidemmän sivun pituus millimetrin tarkkuudella. (3 p.)

Vastaus: mm

- 2.2. Suorakulmion yhden sivun pituus on 5,0 cm, ja se muodostaa 35° kulman suorakulmion lävistäjän kanssa. Laske suorakulmion piiri millimetrin tarkkuudella. (3 p.)

Vastaus: mm

- 2.3. Vinoneliö (eli neljäkäs) on suunnikas, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. Vinoneliön lävistäjät leikkaavat toisensa kohtisuoraan ja niiden pituudet ovat 2,0 cm ja 5,0 cm. Määritä vinoneliön pinta-ala yhden neliösenttimetrin tarkkuudella. (3 p.)

Vastaus: cm²

- 2.4. Ympyräsektorin säde on 3,00 cm ja keskuskulma $26,0^\circ$. Määritä sektorin pinta-ala 0,01 cm²:n tarkkuudella. (3 p.)

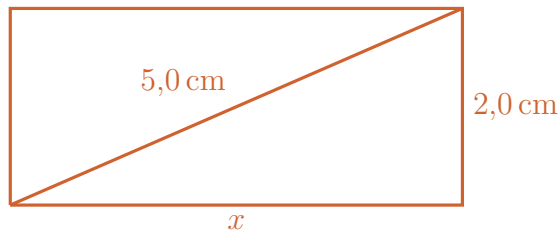
Vastaus: cm²

Ratkaisu.

2.1. **Vastaus:** 46 mm 3 p. (yht. 3 p.)

Perustelut:

Piirretään mallikuva.



Merkitään suorakulmion pidemmän sivun pituutta kirjaimella x . Pythagoraan lauseella saadaan, että

$$\begin{aligned}x^2 + 2,0^2 &= 5,0^2 \\x^2 + 4,0 &= 25,0 & \parallel - 4,0 \\x^2 &= 25,0 - 4,0 \\x^2 &= 21,0 \\x &= \pm 4,5825 \dots\end{aligned}$$

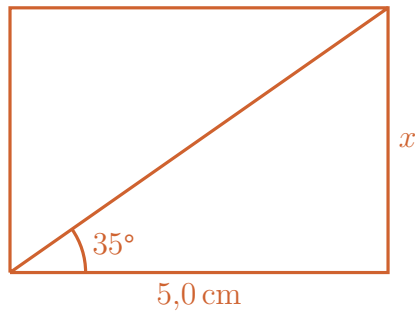
Hylätään negatiivinen vaihtoehto, koska suorakulmion sivun pituus ei voi olla negatiivinen. Suorakulmion sivun pituus on siis

$$4,5825 \dots \text{ cm} = 45,825 \dots \text{ mm} \approx 46 \text{ mm}.$$

2.2. **Vastaus:** 170 mm 3 p. (yht. 6 p.)

Perustelut:

Piirretään mallikuva.



Selvitetään ensin suorakulmion toisen sivun pituus suorakulmaisen kolmion kulman 35° tangentin avulla.

$$\tan 35^\circ = \frac{x}{5,0} \quad || \cdot 5,0$$

$$5,0 \cdot \tan 35^\circ = x$$

$$x = 3,5010 \dots$$

Suorakulmion sivun pituudet ovat siis $5,0 \text{ cm}$ ja $3,5010 \dots \text{ cm}$. Lasketaan suorakulmion piiri.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 5,0 \text{ cm} + 2 \cdot 3,5010 \dots \text{ cm} &= 17,0020 \dots \text{ cm} \\ &= 170,020 \dots \text{ mm} \\ &\approx 170 \text{ mm} \end{aligned}$$

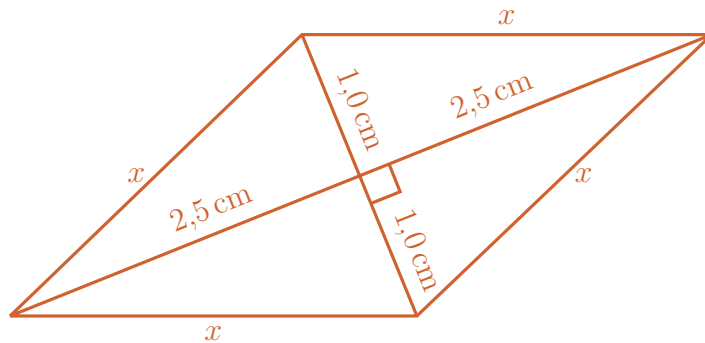
2.3. **Vastaus:** 5 cm^2 3 p. (yht. 9 p.)

Perustelut:

Ratkaisuvaihtoehto 1

Selvitetään neljäkkään pinta-ala kolmioiden avulla. Neljäkäs koostuu neljästä suorakulmaisesta kolmiosta.

Piirretään mallikuva.



Selvitetään yhden kolmion pinta-ala.

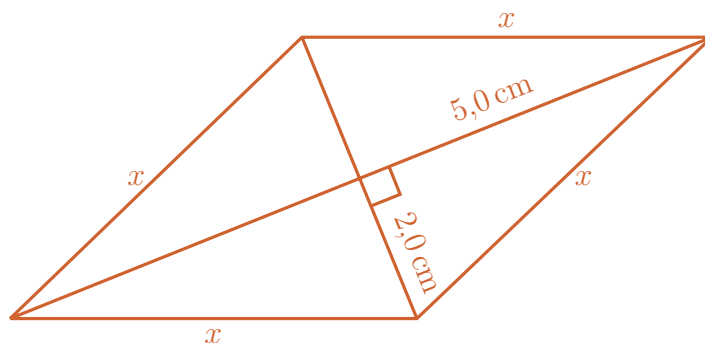
$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 1,0 \text{ cm} \cdot 2,5 \text{ cm} = 1,25 \text{ cm}^2$$

Koska neljäkäs koostuu neljästä yhtenevästä kolmiosta, neljäkkään pinta-ala on

$$4 \cdot A_1 = 4 \cdot 1,25 \text{ cm}^2 = 5,0 \text{ cm}^2 \approx 5 \text{ cm}^2.$$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Piirretään mallikuva.



Lasketaan neljäkkään pinta-ala suoraan kaavalla $A = \frac{1}{2}d_1d_2$, jossa d_1 ja d_2 ovat lävistäjien pituudet.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5,0 \text{ cm} \cdot 2,0 \text{ cm} = 5,0 \text{ cm}^2 \approx 5 \text{ cm}^2$$

2.4. **Vastaus:** $2,04 \text{ cm}^2$ 3 p. (yht. 12 p.)

Perustelut:

Ympyräsektorin pinta-ala voidaan laskea kaavalla

$$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2,$$

jossa α on ympyräsektoria vastaava keskuskulma ja r ympyrän säde. Nyt $\alpha = 26,0^\circ$ ja $r = 3,00 \text{ cm}$.

Ympyräsektorin pinta-ala on siis

$$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2 \quad \parallel \alpha = 26,0^\circ, \quad r = 3,00 \text{ cm}$$

$$A = \frac{26,0^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (3,00 \text{ cm})^2$$

$$A = 2,0420 \dots \text{ cm}^2$$

$$A \approx 2,04 \text{ cm}^2$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

3. Kukkaruukku (12 p.)

Aineisto:

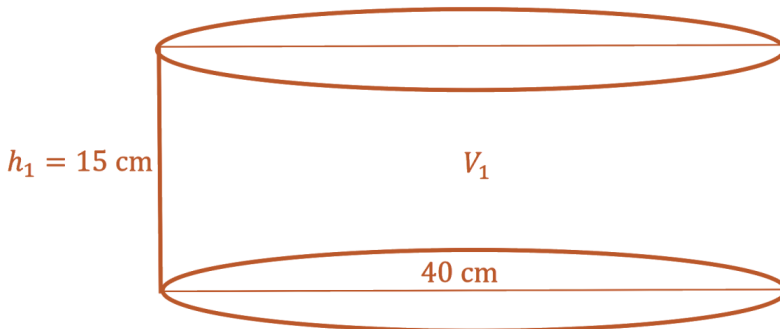
3. A [Kuva: Kukkaruukun poikkileikkaus](#)

Kukkaruukun pystysuora poikkileikkaus ja sisämitat on esitetty kuvassa [3.A](#). Kukkaruukun alaosa on suora katkaistu ympyräpohjainen kartio. Kukkaruukun pohjan halkaisija on 30 cm. Kukkaruukun alaosa levenee, kunnes se yhtyy kukkaruukun yläosaan, joka on suora ympyräpohjainen lieriö, jonka halkaisija on 40 cm. Kukkaruukun alaosan korkeus on 20 cm ja yläosan korkeus 15 cm. Laske kukkaruukun tilavuus.

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Kukkaruukku koostuu kahdesta osasta: suorasta ympyrälieriöstä ja katkaistusta ympyräpohjaisesta kartiosta. Lasketaan näiden tilavuudet erikseen.



Ympyrälieriön tilavuus on $V_1 = A_1 h_1$ jossa A_1 on pohjan pinta-ala ja h_1 lieriön korkeus. Ympyrälieriön pohjan pinta-ala on $A_1 = \pi r_1^2$. Nyt ympyrälieriön pohjan säde on $r_1 = 20$ cm ja korkeus $h_1 = 15$ cm. Ympyrälieriön tilavuus on siten

$$V_1 = A_1 h_1 \quad || A_1 = \pi r_1^2$$

$$V_1 = \pi r_1^2 \cdot h_1 \quad || r_1 = 20 \text{ cm}, \quad 1 \text{ p. (yht. 1 p.)} \quad h_1 = 15 \text{ cm}$$

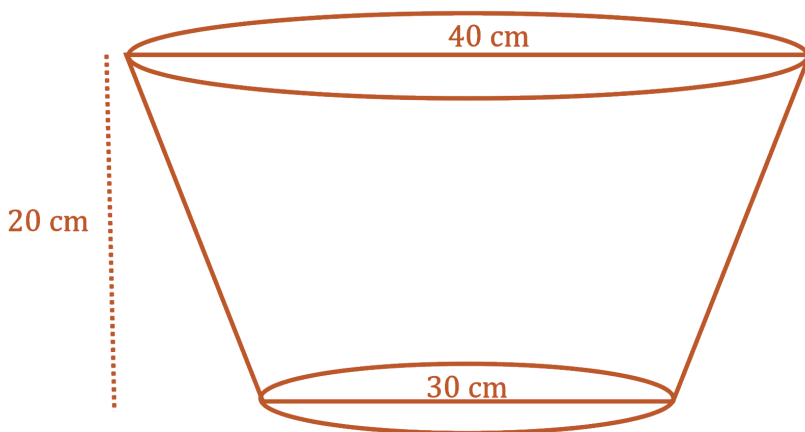
$$V_1 = \pi \cdot (20 \text{ cm})^2 \cdot 15 \text{ cm} \quad 3 \text{ p. (yht. 4 p.)}$$

$$V_1 = 18\,849,555 \dots \text{ cm}^3. \quad 1 \text{ p. (yht. 5 p.)}$$

Pisteytyksestä: Lieriön tilavuuden määrittämisestä saa yhteensä 5 pistettä:

- Lieriön pohjan säteen $r_1 = 20\text{ cm}$ määrittämisestä 1 p.
- Pohjan pinta-alan laskemisesta 2 p.
- Tilavuuden lausekkeesta 1 p.
- Tilavuuden likiarvosta 1 p.

Selvitetään sitten katkaistun ympyräpohjaisen kartion tilavuus.



Katkaistun ympyräpohjaisen kartion tilavuus voidaan laskea kaavalla

$$V_2 = \frac{\pi h_2}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2),$$

jossa h_2 on katkaistun ympyräpohjaisen kartion korkeus sekä r_1 ja r_2 pohjaympyröiden säteet.

Katkaistun ympyräpohjaisen kartion tilavuus on

$$V_2 = \frac{\pi h_2}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \quad \| h_2 = 20\text{ cm}, r_1 = 20\text{ cm}, r_2 = 15\text{ cm} \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

$$V_2 = \frac{\pi \cdot 20\text{ cm}}{3} ((20\text{ cm})^2 + 20\text{ cm} \cdot 15\text{ cm} + (15\text{ cm})^2) \quad \text{4 p. (yht. 10 p.)}$$

$$V_2 = 19\,373,154 \dots \text{ cm}^3. \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

Kukkaruukun tilavuus on siten

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= 18\,849,555 \dots \text{ cm}^3 + 19\,373,154 \dots \text{ cm}^3 \\ &= 38\,222,710 \dots \text{ cm}^3 \\ &\approx 40\,000 \text{ cm}^3 \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)} \end{aligned}$$

Vastaus: $40\,000 \text{ cm}^3$

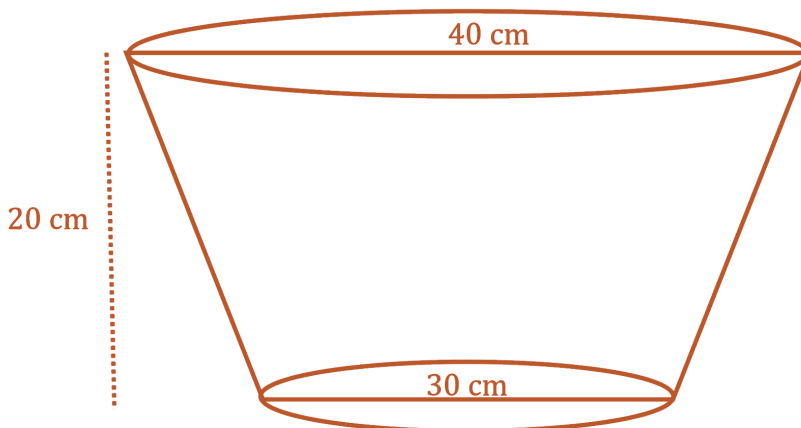
Pyöristyksestä: YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 21.9.2021) vastaus on annettu kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella. Kuitenkin epätarkimmat lähtöarvot on annettu yhden merkitsevän numeron tarkkuudella. Todennäköisesti ainakin yhden, kahden ja kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella annetut vastaukset hyväksytään.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Kukkaruukku koostuu kahdesta osasta: suorasta ympyrälieriöstä ja katkaistusta ympyräpohjaisesta kartiosta. Lasketaan näiden tilavuudet erikseen.

Ympyrälieriön tilavuus lasketaan vastaavasti kuin edellä, jolloin saadaan, että $V_1 = 18\,849,555 \dots \text{ cm}^3$. 5 p. (yht. 5 p.)

Selvitetään sitten katkaistun ympyräpohjaisen kartion tilavuus.



Katkaistun ympyräpohjaisen kartion tilavuus voidaan laskea kaavalla

$$V_2 = \frac{h_2}{3} \left(\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \sqrt{\pi r_1^2 \cdot \pi r_2^2} \right),$$

jossa h_2 on katkaistun ympyräpohjaisen kartion korkeus sekä r_1 ja r_2 pohjaympyröiden säteet.

Nyt $h_2 = 20$ cm, $r_1 = 20$ cm ja $r_2 = 15$ cm 1 p. (yht. 6 p.), joten katkaistun ympyräpohjaisen kartion tilavuus on

$$V_2 = \frac{h_2}{3} \left(\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \sqrt{\pi r_1^2 \cdot \pi r_2^2} \right)$$

$$V_2 = \frac{20}{3} \left(\pi \cdot 20^2 + \pi \cdot 15^2 + \sqrt{\pi \cdot 20^2 \cdot \pi \cdot 15^2} \right) \text{ cm}^3 \quad \text{4 p. (yht. 10 p.)}$$

$$V_2 = 19\,373,154 \dots \text{ cm}^3. \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

Pisteytyksestä: Jos on sanonut pohjan pinta-alaksi $r_2 = \pi \cdot (15 \text{ cm})^2$, jo siitä saa 2 p.

Kukkaruukun tilavuus on siten

$$V_1 + V_2 = 18\,849,555 \dots \text{ cm}^3 + 19\,373,154 \dots \text{ cm}^3$$

$$= 38\,222,710 \dots \text{ cm}^3$$

$$\approx 40\,000 \text{ cm}^3 \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

Vastaus: $40\,000 \text{ cm}^3$

Pyörityksestä: YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 21.9.2021) vastaus on annettu kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella. Kuitenkin epätarkimmat lähtöarvot on annettu yhden merkitsevän numeron tarkkuudella. Todennäköisesti ainakin yhden, kahden ja kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella annetut vastaukset hyväksytään.

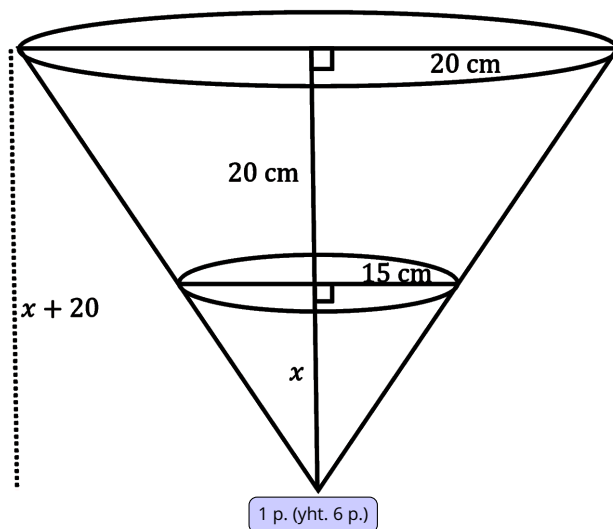
Ratkaisuvaihtoehto 3

Kukkaruukku koostuu kahdesta osasta: suorasta ympyrälieriöstä ja katkaistusta ympyräpohjaisesta kartiosta. Lasketaan näiden tilavuudet erikseen.

Ympyrälieriön tilavuus lasketaan vastaavasti kuin edellä, jolloin saadaan, että $V_1 = 18\,849,555 \dots \text{ cm}^3$. 5 p. (yht. 5 p.)

Selvitetään sitten katkaistun ympyräpohjaisen kartion tilavuus.

Täydennetään katkaistu ympyräpohjainen kartio kokonaiseksi kartioksi. Merkitään kirjaimella x kartion poisleikatun osan korkeutta.



Ympyräpohjaisen kartion sisälle muodostuu kk-lauseen perusteella kaksi yhdenmuotoista kolmiota 1 p. (yht. 7 p.), joten saadaan yhtälö

$$\frac{x}{x+20} = \frac{15}{20}. \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

Ratkaistaan yhtälö laskinohjelmalla.

Laskinohjelmalla saadaan ratkaisu $x = 60$. Kartion poisleikatun osan korkeus on siis 60 cm. Ympyräpohjaisen kartion korkeus on $60 \text{ cm} + 20 \text{ cm} = 80 \text{ cm}$.

Ympyräpohjaisen kartion tilavuus voidaan laskea kaavalla

$$V = \frac{1}{3}Ah,$$

jossa $A = \pi r^2$ on kartion pohjan pinta-ala, r on ympyrän säde ja h kartion korkeus.

Lasketaan ensin koko kartion tilavuus, jolloin $r = 20$ cm ja $h = 80$ cm. Koko kartion tilavuus on

$$V_{\text{koko}} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h \quad || \quad r = 20 \text{ cm}, h = 80 \text{ cm}$$

$$V_{\text{koko}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (20 \text{ cm})^2 \cdot 80 \text{ cm}$$

$$V_{\text{koko}} = 33\,510,321 \dots \text{ cm}^3. \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

Lasketaan vastaavasti poisleikatun kartion tilavuus, jolloin $r_{\text{pois}} = 15$ cm ja $h_{\text{pois}} = 60$ cm. Poisleikatun kartion tilavuus on siis

$$V_{\text{pois}} = \frac{1}{3} \cdot \pi r_{\text{pois}}^2 \cdot h_{\text{pois}} \quad || \quad r_{\text{pois}} = 15 \text{ cm}, h_{\text{pois}} = 60 \text{ cm}$$

$$V_{\text{pois}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (15 \text{ cm})^2 \cdot 60 \text{ cm}$$

$$V_{\text{pois}} = 14\,137,166 \dots \text{ cm}^3. \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)})$$

Katkaistun kartion tilavuus saadaan laskettua vähentämällä koko kartion tilavuudesta poisleikatun kartion tilavuus. Katkaistun kartion tilavuus on siis

$$V_2 = V_{\text{koko}} - V_{\text{pois}}$$

$$V_2 = 33\,510,321 \dots \text{ cm}^3 - 14\,137,166 \dots \text{ cm}^3$$

$$= 19\,373,154 \dots \text{ cm}^3 \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)})$$

Kukkaruukun tilavuus on siten

$$V_1 + V_2 = 18\,849,555 \dots \text{ cm}^3 + 19\,373,154 \dots \text{ cm}^3$$

$$= 38\,222,710 \dots \text{ cm}^3$$

$$\approx 40\,000 \text{ cm}^3 \quad (1 \text{ p. (yht. 12 p.)})$$

Vastaus: $40\,000 \text{ cm}^3$

Pyöristyksestä: YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 21.9.2021) vastaus on annettu kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella. Kuitenkin epätarkimmat lähtöarvot on annettu yhden merkitsevän numeron tarkkuudella. Todennäköisesti ainakin

yhden, kahden ja kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella annetut vastaukset hyväksytään.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

4. Lukujono (12 p.)

Rekursiivinen lukujono (a_n) on määritelty seuraavalla tavalla: $a_1 = 3$, ja $a_{n+1} = 2a_n - 1$, kun $n \geq 1$.

1. Laske a_2 , a_3 ja a_4 . (4 p.)
2. Miksi lukujono (a_n) ei ole aritmeettinen eikä geometrinen? Voit käyttää perusteluissa esimerkiksi kohdassa 4.1 laskettuja lukuja. (8 p.)

Ratkaisu.

1. Lasketaan lukujonon jäsenet a_2 , a_3 ja a_4 tehtävässä annetun rekursiokaavan avulla:

$$a_2 = 2 \cdot a_1 - 1 \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)})$$

$$= 2 \cdot 3 - 1$$

$$= 6 - 1$$

$$= 5 \quad (1 \text{ p. (yht. 2 p.)})$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 - 1$$

$$= 2 \cdot 5 - 1$$

$$= 10 - 1$$

$$= 9 \quad (1 \text{ p. (yht. 3 p.)})$$

$$a_4 = 2 \cdot a_3 - 1$$

$$= 2 \cdot 9 - 1$$

$$= 18 - 1$$

$$= 17 \quad (1 \text{ p. (yht. 4 p.)})$$

Vastaus: $a_2 = 5$, $a_3 = 9$ ja $a_4 = 17$

2. Lukujono on aritmeettinen, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus on vakio. Laske-
taan lukujonon (a_n) peräkkäisten jäsenten erotukset:

$$\begin{aligned}a_2 - a_1 &= 5 - 3 \\ &= 2 \quad (1 \text{ p. (yht. 5 p.)})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_3 - a_2 &= 9 - 5 \\ &= 4 \quad (1 \text{ p. (yht. 6 p.)})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_4 - a_3 &= 17 - 9 \\ &= 8\end{aligned}$$

Lukujonon peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio (1 p. (yht. 7 p.)), joten lukujono ei ole aritmeettinen. (1 p. (yht. 8 p.)) (Jo kahden erotuksen laskeminen riittää, tässä on laskettu kaikki kolme selkeyden vuoksi.)

Lukujono on geometrinen, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde on vakio. Laske-
taan lukujonon (a_n) peräkkäisten jäsenten suhteet:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{5}{3} = 1,666 \dots \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{9}{5} = 1,8 \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)})$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{17}{9} = 1,888 \dots$$

Lukujonon peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio (1 p. (yht. 11 p.)), joten lukujono ei ole geometrinen. (1 p. (yht. 12 p.)) (Jo kahden suhteen laskeminen riittää, tässä on laskettu kaikki kolme selkeyden vuoksi.)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

5. Hampaiden harjaajat (12 p.)

Hammaslääkäriliiton suositusten mukaan hampaita on harjattava kahdesti päivässä kaksi minuuttia kerrallaan. Lisäksi aikuisten tulee huolehtia lasten hampaiden harjaamisesta. Virtasen perheessä on neljä lasta, isä ja äiti. Hampaiden harjausvastuu on jaettu tasan molempien vanhempien kesken, eli kumpikin vanhempi harjaa omat sekä kahden lapsen hampaat. Kuinka monta tuntia vuodessa perheen isä viettää hampaita harjaten?

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Virtasen perheen isä harjaa omien hampaidensa lisäksi kahden lapsensa hampaat, joten hän harjaa yhteensä kolmen hengen hampaat päivässä. 1 p. (yht. 1 p.)

Yhteen harjauskertaan kuluu aikaa 2 minuuttia ja hampaat harjataan kahdesti päivässä, joten yhden hengen hampaiden harjaaminen vie päivässä $2 \cdot 2 = 4$ minuuttia. 2 p. (yht. 3 p.)

Koska yhdessä päivässä isä harjaa kolmen hengen hampaat, kuluu päivässä hampaiden harjaamiseen $3 \cdot 4 = 12$ minuuttia. 2 p. (yht. 5 p.)

Vuodessa on 365 päivää, joten vuodessa isältä kuluu aikaa hampaiden harjaukseen $365 \cdot 12 = 4380$ 2 p. (yht. 7 p.) minuuttia.

Koska yksi tunti on 60 minuuttia 1 p. (yht. 8 p.), niin 4380 minuuttia on

$$\frac{4380}{60} \text{ 2 p. (yht. 10 p.) } = 73 \text{ 2 p. (yht. 12 p.) }$$

tuntia. Perheen isältä kuluu hampaiden harjaukseen vuodessa siis 73 tuntia.

Vastaus: 73 tuntia

Ratkaisuvaihtoehto 2

Virtasen perheen isä harjaa omien hampaidensa lisäksi kahden lapsensa hampaat, joten hän harjaa yhteensä kolmen hengen hampaat päivässä. 1 p. (yht. 1 p.)

Hampaat harjataan kahdesti päivässä, joten perheen isälle tulee päivässä harjauskertoja $3 \cdot 2 = 6$ 2 p. (yht. 3 p.) kappaletta.

Yhteen harjauskertaan kuluu aikaa 2 minuuttia, joten yhdessä päivässä hampaiden harjaukseen kuluu isältä aikaa $6 \cdot 2 = 12$ minuuttia. 2 p. (yht. 5 p.)

Vuodessa on 365 päivää, joten vuodessa isältä kuluu aikaa hampaiden harjaukseen $365 \cdot 12 = 4380$ 2 p. (yht. 7 p.) minuuttia.

Koska yksi tunti on 60 minuuttia, 1 p. (yht. 8 p.) niin 4380 minuuttia on

$$\frac{4380}{60} \text{ 2 p. (yht. 10 p.) } = 73 \text{ 2 p. (yht. 12 p.) }$$

tuntia. Perheen isältä kuluu hampaiden harjaukseen vuodessa siis 73 tuntia.

Vastaus: 73 tuntia

6. Esteratsastus (12 p.)

Esteratsastus on kehittynyt hevosten suorituskyvyn parantuessa, ja hevosten suoriutumista on myös tutkittu kokeellisesti. On selvinnyt, että parhaimman ponnistuskohdan ja esteen välinen etäisyys d saadaan kertomalla esteen korkeus h luvulla 1,3 ja lisäämällä tulokseen 20 cm.

1. Mikä on etäisyys d , kun esteen korkeus on 140 cm? (3 p.)
2. Kuinka korkean esteen hevonen ja ratsastaja yrittävät ylittää, jos hevosen ponnistuskohdan etäisyys esteeseen on 215 cm? (3 p.)
3. Määritä etäisyyden d lauseke esteen korkeuden h funktiona. (3 p.)
4. Määritä esteen korkeuden h lauseke etäisyyden d funktiona. (3 p.)

Ratkaisu.

1. Muodostetaan lauseke hevosen ponnistuskohdan ja esteen väliselle etäisyydelle d .

Etäisyys d saadaan kertomalla esteen korkeus h luvulla 1,3 ja lisäämällä tulokseen 20 cm. Etäisyydelle d (yksikössä cm) voidaan muodostaa siis lauseke

$$d = 1,3h + 20,$$

jossa h on esteen korkeus senttimetreinä.

Sijoitetaan yllä olevaan lausekkeeseen esteen korkeus $h = 140$ ja lasketaan d .

$$d = 1,3 \cdot 140 + 20 \quad \boxed{1 \text{ p. (yht. 1 p.)}} = 202 \approx 200 \quad \boxed{2 \text{ p. (yht. 3 p.)}}$$

Etäisyys d on siis noin 200 cm, kun esteen korkeus on 140 cm.

Vastaus: $d = 200$ cm

2. Hevosen ponnistuskohdan etäisyys esteeseen on $d = 215$ cm. Toisaalta hevosen ponnistuskohdan etäisyys esteeseen on $d = 1,3h + 20$. Muodostetaan yhtälö ja

ratkaistaan siitä esteen korkeus h .

$$1,3h + 20 = 215 \quad || - 20$$

$$1,3h = 215 - 20 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

$$1,3h = 195 \quad || : 1,3 \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

$$h = 150$$

Yhtälö voidaan ratkaista myös laskinohjelmalla.

Hevonen ja ratsastaja yrittävät ylittää siis 150 cm korkean esteen.

Vastaus: 150 cm korkean esteen 1 p. (yht. 6 p.)

3. Etäisyydelle d (yksikössä cm) muodostettiin edellä lauseke

$$d = 1,3h + 20,$$

jossa h on esteen korkeus senttimetreinä.

Etäisyyden d lauseke esteen korkeuden h funktiona on siis

$$d = 1,3h + 20. \quad \text{3 p. (yht. 9 p.)}$$

Vastaus: $d = 1,3h + 20$

4. Ratkaistaan etäisyyden d lausekkeesta korkeus h .

$$d = 1,3h + 20 \quad || - 20$$

$$d - 20 = 1,3h \quad || : 1,3 \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

$$\frac{d - 20}{1,3} = h$$

$$h = \frac{d - 20}{1,3} \quad \text{2 p. (yht. 12 p.)}$$

Yhtälö voidaan ratkaista myös laskinohjelmalla.

Esteen korkeuden lauseke etäisyyden d funktiona on siis $h = \frac{d - 20}{1,3}$.

Vastaus: $h = \frac{d - 20}{1,3}$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

7. Kananmunien hintamuutos (12 p.)

Kananmunien kilohinta kaupassa on 3,50 euroa ilman arvonlisäveroa. Hinnasta 35 % saa alkutuotanto, 25 % pakkaamo ja 40 % kauppa. Kauppa alentaa kananmunien hintaa 10 %. Kuinka monta prosenttia kunkin toimijan saama korvaus laskee, jos euromääräinen hinnanalennus jaetaan tasan kaikkien kolmen toimijan kesken?

Ratkaisu.

Kananmunien hinta oli aluksi 3,50 €. Hinta laskee 10 %, joten hinnan alennus on

$$0,10 \cdot 3,50 \text{ €} = 0,35 \text{ €}. \quad (2 \text{ p. (yht. 2 p.)})$$

Euromääräinen hinnanalennus jaetaan tasan kaikkien kolmen toimijan kesken, joten kananmunien hinnanalennus yhtä toimijaa kohden on

$$\frac{0,35 \text{ €}}{3} = 0,1166 \dots \text{ €}. \quad (1 \text{ p. (yht. 3 p.)})$$

Alkutuotanto saa aluksi kilohinnasta 35 % eli

$$0,35 \cdot 3,50 \text{ €} = 1,225 \text{ €}. \quad (1 \text{ p. (yht. 4 p.)})$$

Alkutuotannon saama korvaus laskee 0,1166... euroa eli

$$\frac{0,1166 \dots \text{ €}}{1,225 \text{ €}} = 0,09523 \dots = 9,523 \dots \% \approx 9,5 \%. \quad (2 \text{ p. (yht. 6 p.)})$$

Pakkaamo saa aluksi kilohinnasta 25 % eli

$$0,25 \cdot 3,50 \text{ €} = 0,875 \text{ €}. \quad (1 \text{ p. (yht. 7 p.)})$$

Pakkaamon saama korvaus laskee siis

$$\frac{0,1166 \dots \text{ €}}{0,875 \text{ €}} = 0,13333 \dots = 13,333 \dots \% \approx 13 \%. \quad (2 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

Kauppa saa aluksi kilohinnasta 40 % eli

$$0,40 \cdot 3,50 \text{ €} = 1,40 \text{ €}. \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)})$$

Kaupan saama korvaus laskee

$$\frac{0,1166 \dots \text{ €}}{1,40 \text{ €}} = 0,08333 \dots = 8,333 \dots \% \approx 8,3 \%. \quad (2 \text{ p. (yht. 12 p.)})$$

Vastaus: Alkutuotannon korvaus laskee 9,5 %, pakkaamon 13 % ja kaupan 8,3 %.

8. Huippuparaabeli (12 p.)

Millä parametrien b ja c arvoilla paraabelin $y = -x^2 + bx + c$ huippu on pisteessä $(2, 1)$? Perustele vastauksesi derivaatan avulla.

Ratkaisu.

Paraabeli $y = -x^2 + bx + c$ saavuttaa huippunsa derivaatan nollakohdassa. 1 p. (yht. 1 p.)

Merkitään $f(x) = -x^2 + bx + c$.

Funktion f derivaatta on $f'(x) = -2x + b$. 2 p. (yht. 3 p.)

Derivaatan nollakohdasta voidaan muodostaa yhtälö

$$f'(x) = 0$$
$$-2x + b = 0. \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Toisaalta tiedetään, että paraabelin huipun tulee olla pisteessä $(2, 1)$, joten derivaatafunktio saa arvon 0, kun $x = 2$. Muodostetaan siis yhtälö $f'(2) = 0$ ja ratkaistaan yhtälöstä vakio b .

$$f'(2) = 0 \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$
$$-2 \cdot 2 + b = 0 \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$
$$-4 + b = 0 \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)} \quad \quad \quad || + 4$$
$$b = 4 \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

Funktio on nyt siis muotoa $f(x) = -x^2 + 4x + c$.

Selvitetään vielä vakio c . Koska paraabelin huipun tulee olla pisteessä $(2, 1)$, niin on oltava $f(2) = 1$. Ratkaistaan tästä yhtälöstä vakio c .

$$f(2) = 1 \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

$$-2^2 + 4 \cdot 2 + c = 1 \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

$$-4 + 8 + c = 1$$

$$4 + c = 1 \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)} \quad \parallel - 4$$

$$c = 1 - 4$$

$$c = -3 \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

Yhtälöt voidaan ratkaista myös laskinohjelmalla.

Vastaus: $b = 4$ ja $c = -3$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

9. Noppatilastoja (12 p.)

Aineisto:

9. A [Taulukko: Noppatilasto](#)

Tämä tehtävä on tarkoitettu ohjelmistolla ratkaistavaksi. Vastaukset voi antaa likiarvoina, ja perusteluiksi riittävät kuvakaappaukset tai selitykset, joista ilmenee, mitä on tehty.

Opiskelijat yrittivät selvittää, minkälaisen jakauman viiden nopan silmäluvun summa toteuttaa. He heittivät 100 kertaa viittä noppaa ja kirjasivat tulokset, ks. taulukko [9.A](#). Laskemalla jokaisen heittokerran viiden nopan silmäluvut yhteen saadaan *summamuuuttuja*.

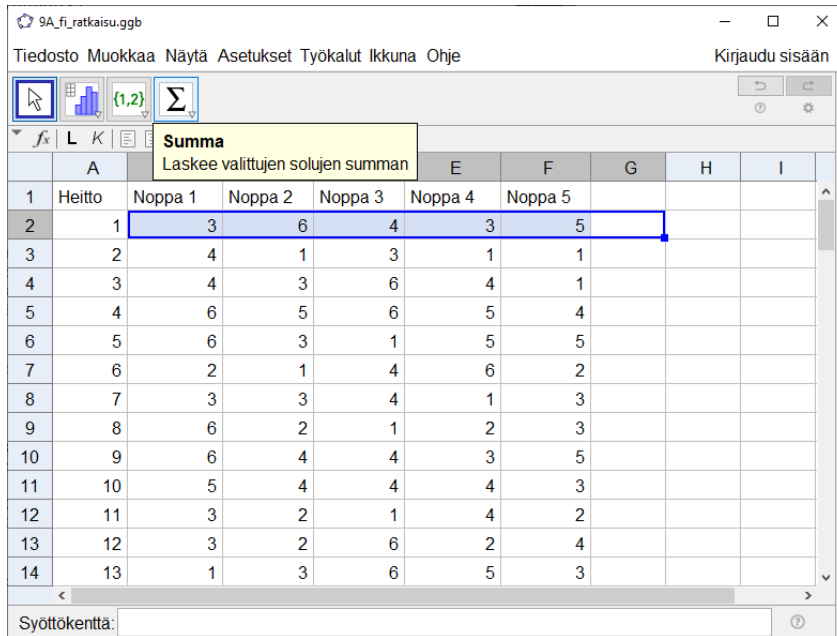
1. Määritä tämän summamuuuttujan minimi, maksimi, moodi, mediaani, keskiarvo ja keskihajonta. (6 p.)
2. Piirrä tämän summamuuuttujan jakauman pylväskaavio. (3 p.)
3. Muistuttaako jakauma enemmän normaalijakaumaa vai tasaista jakaumaa? (3 p.)

Ratkaisu.

1.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Lasketaan jokaisen heittokerran silmälukujen summa sarakkeeseen G :



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	Heitto	Noppa 1	Noppa 2	Noppa 3	Noppa 4	Noppa 5	Summa		
1	1	3	6	4	3	5			
2	2	4	1	3	1	1			
3	3	4	3	6	4	1			
4	4	6	5	6	5	4			
5	5	6	3	1	5	5			
6	6	2	1	4	6	2			
7	7	3	3	4	1	3			
8	8	6	2	1	2	3			
9	9	6	4	4	3	5			
10	10	5	4	4	4	3			
11	11	3	2	1	4	2			
12	12	3	2	6	2	4			
13	13	1	3	6	5	3			
14									

Lasketaan kysytyt tunnusluvut ja kohdassa 9.2. kysytty pylväskaavio valitsemalla juuri laskettu sarake G ja valitsemalla *yhden muuttujan analyysi*:

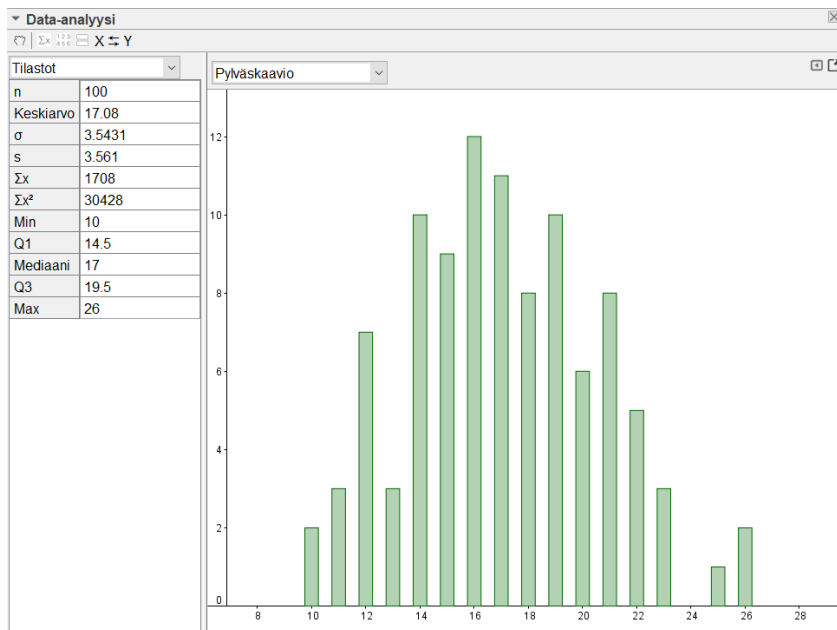
9A_fi_ratkaisu.ggb

Tiedosto Muokkaa Näytä Asetukset Työkalut Ikkuna Ohje Kirjautu sisään

Yhden muuttujan analyysi
Analysoi annettua lukujoukkoa

		D	E	F	G	H	I
1	Heitto	Noppa 1	Noppa 2	Noppa 3	Noppa 4	Noppa 5	Summ...
2	1	3	6	4	3	5	21
3	2	4	1	3	1	1	10
4	3	4	3	6	4	1	18
5	4	6	5	6	5	4	26
6	5	6	3	1	5	5	20
7	6	2	1	4	6	2	15
8	7	3	3	4	1	3	14
9	8	6	2	1	2	3	14
10	9	6	4	4	3	5	22
11	10	5	4	4	4	3	20
12	11	3	2	1	4	2	12
13	12	3	2	6	2	4	17
14	13	1	3	6	5	3	18

Syöttökenttä:



Analyyisin tilastot-ikkunasta voidaan lukea summamuuttujan minimi, maksimi, mediaani, keskiarvo ja keskihajonta: summamuuttujan minimi on 10, maksimi on 26, mediaani on 17, keskiarvo on 17,08 ja keskihajonta on 3,56 (3,56 on tarkalleen ottaen otoskeskihajonta. Myös varsinainen keskihajonta 3,54 luultavasti hyväksy-

tään). Muuttujan moodi nähdään pylväskuvaajasta: moodi on se muuttujan arvo, jonka frekvenssi eli pylvään korkeus on suurin. Aineiston moodi on 16.

Vastaus: Summamuuttujan minimi on 10, maksimi on 26, moodi on 16, mediaani on 17, keskiarvo on 17,08 ja keskihajonta on 3,56.

Pisteytyksestä: Jokaisesta oikeasta tunnusluvusta 1 p.

Keskihajonnan pyöristäminen ei ole olennaista, arvon voi antaa yhden – neljän desimaalin tarkkuudella.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Lasketaan jokaisen heittokerran silmälukujen summa omaan sarakkeeseensa:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Heitto	Noppa 1	Noppa 2	Noppa 3	Noppa 4	Noppa 5	
2		1	3	6	4	3	5
3		2	4	1	3	1	1
4		3	4	3	6	4	1
5		4	6	5	6	5	4
6		5	6	3	1	5	5
7		6	2	1	4	6	2
8		7	3	3	4	1	3

	A	B	C	D	E	F	G
1	Heitto	Noppa 1	Noppa 2	Noppa 3	Noppa 4	Noppa 5	
2		1	3	6	4	3	5
3		2	4	1	3	1	1
4		3	4	3	6	4	1
5		4	6	5	6	5	4
6		5	6	3	1	5	5
7		6	2	1	4	6	2
8		7	3	3	4	1	3

Nyt voidaan laskea summamuuttujan minimi, maksimi, moodi, mediaani, keskiarvo ja keskihajonta taulukkolaskentaohjelman omilla funktiolla:

100	99	2	1	2	5	2	=SUMMA(B100:F100)
101	100	3	3	6	4	5	=SUMMA(B101:F101)
102							
103							
104							
105							
106							
107							
108							
109							
110							
...							

100	99	2	1	2	5	2	12	
101	100	3	3	6	4	5	21	
102								
103								
104								
105						minimi:	10	
106						maksimi:	26	
107						moodi:	16	
108						mediaani:	17	
109						keskiarvo:	17,08	
110						keskihajonta:	3,56	

Vastaus: Summamuuttujan minimi on 10, maksimi on 26, moodi on 16, mediaani on 17, keskiarvo on 17,08 ja keskihajonta on 3,56.

Ratkaisussa on laskettu keskihajonta funktiolla KESKIHAJONTA joka laskee otoskeskihajonnan. Funktiolla KESKIHAJONTA . P voi laskea keskihajonnan, joka olisi 3,54. Molemmat todennäköisesti hyväksytään.

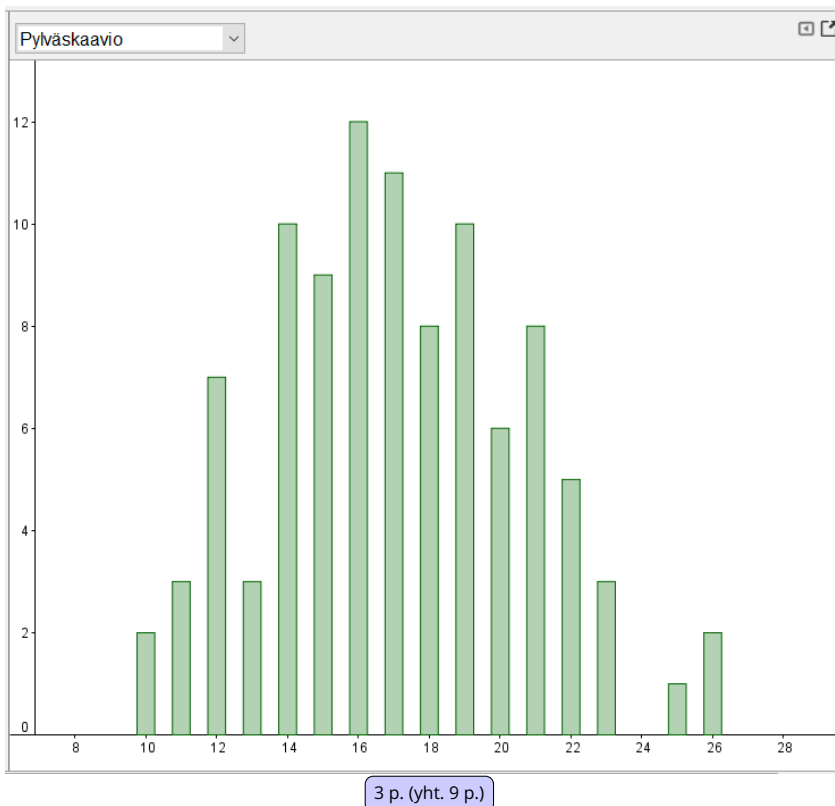
Pisteytyksestä: Jokaisesta oikeasta tunnusluvusta 1 p.

Keskihajonnan pyöristäminen ei ole olennaista, arvon voi antaa yhden — neljän desimaalin tarkkuudella.

2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Piirretään pylväskaavio summamuuttujan jakaumasta Geogebbran yhden muuttujan analyysi-työkalulla:



Ratkaisuvaihtoehto 2

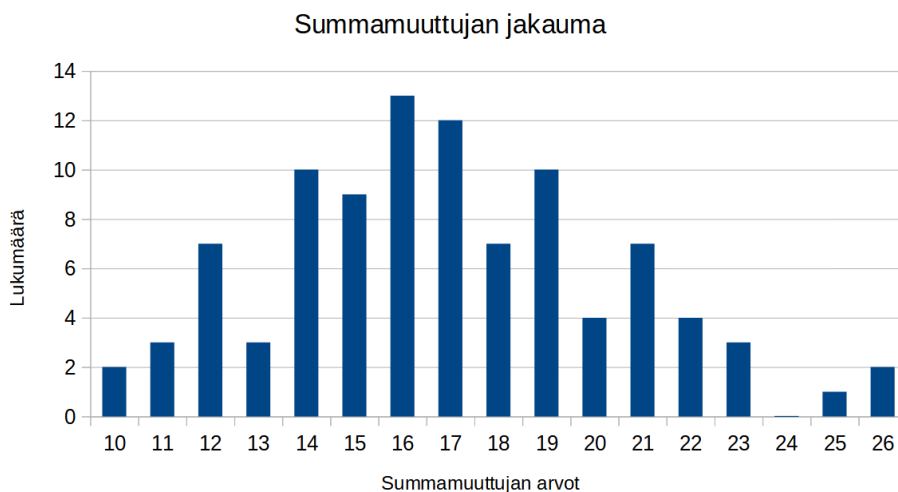
Piirretään pylväskaavio summamuuttujan jakaumasta. Tätä varten lasketaan summamuuttujan arvojen lukumäärät aineistossa. Kohdan 9.1. perusteella tiedetään, että summamuuttujan pienin arvo on 10 ja suurin arvo on 26. Lasketaan summamuuttujan lukumäärät näiden ääripäiden välillä LASKE . JOS () -funktioilla:

Summamuuttujan arvot:	Lukumäärä aineistossa:	Summamuuttujan arvot:	Lukumäärä aineistossa:
10	=LASKE.JOS(G2:G101;I105)	10	2
11	=LASKE.JOS(G3:G102;I106)	11	3
12	=LASKE.JOS(G4:G103;I107)	12	7
13	=LASKE.JOS(G5:G104;I108)	13	3
14	=LASKE.JOS(G6:G105;I109)	14	10
15	=LASKE.JOS(G7:G106;I110)	15	9
16	=LASKE.JOS(G8:G107;I111)	16	13
17	=LASKE.JOS(G9:G108;I112)	17	12
18	=LASKE.JOS(G10:G109;I113)	18	7
19	=LASKE.JOS(G11:G110;I114)	19	10
20	=LASKE.JOS(G12:G111;I115)	20	4
21	=LASKE.JOS(G13:G112;I116)	21	7
22	=LASKE.JOS(G14:G113;I117)	22	4
23	=LASKE.JOS(G15:G114;I118)	23	3
24	=LASKE.JOS(G16:G115;I119)	24	0
25	=LASKE.JOS(G17:G116;I120)	25	1
26	=LASKE.JOS(G18:G117;I121)	26	2

1 p. (yht. 7 p.)

Funktio LASKE. JOS () toimii seuraavasti: Ensimmäinen argumentti on alue, jossa esiintyvien lukujen lukumääriä lasketaan, eli nyt summamuuttujan solut G2 : G101. Puolipisteen jälkeen annetaan kriteeri, mikä lukujen pitää täyttää tullakseen lasketuiksi. Tähän on annettu viereiset solut, joissa on kaikki mahdolliset summamuuttujan arvot. Nyt LASKE. JOS ()-funktio siis laskee, kuinka monta arvoa 10 aineistossa on, kuinka monta arvoa 11 aineistossa on jne. aina arvoon 26 asti.

Nyt voidaan piirtää pylväskuvaaja summamuuttujan jakaumasta:



2 p. (yht. 9 p.)

3. Pylväskaavion perusteella jakauma muistuttaa enemmän normaalijakaumaa kuin tasaista jakaumaa, sillä keskiarvon lähellä olevia tuloksia tulee huomattavasti enemmän kuin kaukana keskiarvosta olevia tuloksia.

Vastaus: Jakauma muistuttaa enemmän normaalijakaumaa kuin tasaista jakaumaa.

Pisteytyksestä: Oikeasta vastauksesta 1 p, perusteluista 2 p.

Epätasaisuudet jakaumassa johtuvat nopanheiton satunnaisuudesta. Jos nopanheittoja toistettaisiin lisää, epätasaisuudet tasoittuisivat ja jakauma lähestyisi normaalijakaumaa.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

10. Kasvihuonekaasujen vähentäminen (12 p.)

Aineisto:

10. A [Teksti: Ehdotus Euroopan parlamentin ja neuvoston direktiiviksi \[...\]](#)

Teksti [10.A](#) käsittelee EU:n pyrkimyksiä vähentää kasvihuonekaasupäästöjä EU:n alueella. Jotta pitkän aikavälin tavoitteet saavutetaan, EU suunnitteli kiristävänsä rajoituksia aikavälille 2021–2030 tekstin kuvailemalla tavalla.

1. Laadi indeksisarja kasvihuonekaasupäästöjen enimmäismäärästä uuden päästörajan mukaisesti ja käytä indeksivuotena vuotta 2021. Vuoden 2021 indeksin arvo on siis 100. (4 p.)
2. Kuinka monta prosenttia kokonaispäästötavoite vähenee uuden päästörajan vaikutuksesta kymmenen vuoden ajanjakson 2021–2030 aikana? (4 p.)
3. Kuinka monta prosenttia pienempi on päästötavoite vuonna 2030 uuden päästörajan vuoksi verrattuna siihen, että raja olisi säilytetty ennallaan? (4 p.)

Ratkaisu.

1. Hiilidioksidipäästöt vähenevät vuodessa 2,2 prosenttia. Seuraavan vuoden indeksi saadaan siis kertomalla edellisen vuoden indeksi luvulla $1 - 0,022 = 0,978$.

1 p. (yht. 1 p.)

Kysytty indeksisarja:

	A	B
1		
2	Vuosi	indeksi
3	2021	100
4	2022	=B3*0,978
5	2023	=B4*0,978
6	2024	=B5*0,978
7	2025	=B6*0,978
8	2026	=B7*0,978
9	2027	=B8*0,978
10	2028	=B9*0,978
11	2029	=B10*0,978
12	2030	=B11*0,978

	A	B
1		
2	Vuosi	indeksi
3	2021	100
4	2022	97,80
5	2023	95,65
6	2024	93,54
7	2025	91,49
8	2026	89,47
9	2027	87,51
10	2028	85,58
11	2029	83,70
12	2030	81,86

Vuosien 2021 – 2024 indeksiluvut oikein 1 p, vuosien 2025 – 2027 indeksiluvut oikein 1 p, vuosien 2028 – 2030 indeksiluvut oikein 1 p.

2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Vuoden 2030 kokonaispäästötavoitteen indeksi on

$$0,978^9 \cdot 100 = 81,85584 \dots \quad (1 \text{ p. (yht. 5 p.)})$$

Päästöt ovat siis vähentyneet

$$\begin{aligned} (2 \text{ p. (yht. 7 p.)}) \quad \frac{100 - 0,978^9 \cdot 100}{100} &= 0,181441 \dots \\ &\approx 18 \% \quad (1 \text{ p. (yht. 8 p.)}) \end{aligned}$$

Vastaus: Kokonaispäästötavoite vähenee 18 prosenttia.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Kohdassa 10.1. laskettiin indeksin arvo vuonna 2030. Lasketaan sen avulla kuinka paljon päästöt ovat vähentyneet:

$$\begin{aligned} (3 \text{ p. (yht. 7 p.)}) \quad \frac{100 - 81,85584}{100} &= 0,1814416 \\ &\approx 18 \% \quad (1 \text{ p. (yht. 8 p.)}) \end{aligned}$$

Huomaa, että näin laskettaessa indeksistä pitää käyttää tarpeeksi tarkkaa arvoa, kun taas kohdassa 10.1. annetaan vastaus vain yhden tai kahden desimaalin tarkkuudella.

Vastaus: Kokonaispäästötavoite vähenee 18 prosenttia.

3. Vanhan päästörajan mukainen indeksi saadaan laskettua kuten edellä, mutta ker-toimena käytetään lukua $1 - 0,0174 = 0,9826$. Vanhojen rajoitusten mukainen indeksi vuonna 2030 on siis $0,9826^9 \cdot 100 \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)}) = 85,386819 \dots$

Lasketaan vanhan ja uuden päästörajan mukaisten indeksien erotus ja verrataan sitä vanhan rajan mukaiseen indeksiin vuonna 2030:

Ratkaisuvaihtoehto 1

$$\begin{aligned} \frac{0,9826^9 \cdot 100 - 0,978^9 \cdot 100}{0,9826^9 \cdot 100} &= 0,041352 \dots \\ &\approx 4,1 \% \end{aligned}$$

Vastaus: Päästötavoite on vuonna 2030 noin 4,1 prosenttia pienempi uuden päästörajan vuoksi verrattuna siihen, että raja olisi säilytetty ennallaan.

Ratkaisuvaihtoehto 2

$$\begin{aligned} \frac{85,38682 - 81,85584}{85,38682} &= 0,041352 \dots \\ &\approx 4,1 \% \end{aligned}$$

Vastaus: Päästötavoite on vuonna 2030 noin 4,1 prosenttia pienempi uuden päästörajan vuoksi verrattuna siihen, että raja olisi säilytetty ennallaan.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

11. Viiden luvun mediaani (12 p.)

Lukujen

$$x + 1, \quad 2x + 5, \quad 3x - 2, \quad 4x + 1 \quad \text{ja} \quad 5x^2$$

keskiarvo on 1.

Määritä näiden lukujen mediaanin kaikki mahdolliset arvot.

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Tehtävänannossa annettujen lukujen keskiarvo on 1. Muodostetaan tästä yhtälö ja ratkaistaan se CAS-ohjelmalla:

1 Ratkaise $\left(\frac{x + 1 + 2x + 5 + 3x - 2 + 4x + 1 + 5x^2}{5} = 1 \right)$
 $\rightarrow \{x = -2, x = 0\}$

6p (yht. 6p)

Pisteytyksestä: Yhtälön muodostamisesta saa 5 p ja yhtälön ratkaisusta 1 p.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Lasketaan tehtävänannossa annettujen lukujen keskiarvo:

$$\begin{aligned} & \frac{x + 1 + 2x + 5 + 3x - 2 + 4x + 1 + 5x^2}{5} && \text{1p (yht. 1p)} \\ &= \frac{5x^2 + x + 2x + 3x + 4x + 1 + 5 - 2 + 1}{5} \\ &= \frac{5x^2 + 10x + 5}{5} \\ &= x^2 + 2x + 1 && \text{1p (yht. 2p)} \end{aligned}$$

Keskiarvo on tehtävänannon mukaan 1. Muodostetaan tämän perusteella yhtälö ja ratkaistaan siitä mahdolliset x :n arvot:

$$x^2 + 2x + 1 = 1 \quad || - 1 \quad \text{1p (yht. 3p)}$$

$$x^2 + 2x = 0 \quad \text{1p (yht. 4p)}$$

käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} \quad \text{1p (yht. 5p)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2}{2}$$

$$x = \frac{-2 + 2}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2 - 2}{2}$$

$$x = \frac{0}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-4}{2}$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = -2 \quad \text{1p (yht. 6p)}$$

Ratkaisuvaihtoehto 3

Lasketaan tehtävänannossa annettujen lukujen keskiarvo:

$$\frac{x + 1 + 2x + 5 + 3x - 2 + 4x + 1 + 5x^2}{5} \quad \text{1p (yht. 1p)}$$

$$= \frac{5x^2 + x + 2x + 3x + 4x + 1 + 5 - 2 + 1}{5}$$

$$= \frac{5x^2 + 10x + 5}{5}$$

$$= x^2 + 2x + 1 \quad \text{1p (yht. 2p)}$$

Keskiarvo on tehtävänannon mukaan 1. Muodostetaan tämän perusteella yhtälö ja ratkaistaan siitä mahdolliset x :n arvot:

$$x^2 + 2x + 1 = 1 \quad \boxed{1 \text{ p (yht. 3p)}} \quad || - 1$$

$$x^2 + 2x = 0 \quad \boxed{1 \text{ p (yht. 4p)}}$$

$$x(x + 2) = 0 \quad \text{tulon nollasäännöllä}$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x + 2 = 0 \quad \boxed{1 \text{ p (yht. 5p)}}$$

$$x = -2 \quad \boxed{1 \text{ p (yht. 6p)}}$$

Riippumatta siitä, millä tavalla muuttujan x mahdolliset ratkaisut saatiin, tehtävän ratkaisu etenee tästä eteenpäin samalla tavalla:

Nyt kun tiedetään muuttujan x mahdolliset arvot, voidaan laskea lukujen $x + 1$, $2x + 5$, $3x - 2$, $4x + 1$ ja $5x^2$ lukuarvot ja valita niistä mediaani kummassakin tapauksessa:

- Tapaus 1: $x = 0$

Luvut ovat nyt

$$x + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$2x + 5 = 2 \cdot 0 + 5 = 5 \quad \boxed{1 \text{ p (yht. 7p)}}$$

$$3x - 2 = 3 \cdot 0 - 2 = -2$$

$$4x + 1 = 4 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$5x^2 = 5 \cdot 0^2 = 0 \quad \boxed{1 \text{ p (yht. 8p)}}$$

Järjestetään nämä kasvavaan järjestykseen. Mediaani on silloin keskimäinen eli kolmas luku:

$$-2, 0, 1, 1, 5$$

Mediaani on siis 1 silloin, kun $x = 0$. $\boxed{1 \text{ p (yht. 9p)}}$

- Tapaus 2: $x = -2$

Luvut ovat nyt

$$\begin{aligned}x + 1 &= -2 + 1 &&= -1 \\2x + 5 &= 2 \cdot (-2) + 5 &&= 1 \quad (1\text{ p (yht. 10p)}) \\3x - 2 &= 3 \cdot (-2) - 2 &&= -8 \\4x + 1 &= 4 \cdot (-2) + 1 &&= -7 \\5x^2 &= 5 \cdot (-2)^2 &&= 20 \quad (1\text{ p (yht. 11p)})\end{aligned}$$

Järjestetään nämä kasvavaan järjestykseen. Mediaani on silloin keskimäinen eli kolmas luku:

$$-8, -7, -1, 1, 20$$

Mediaani on siis -1 silloin, kun $x = -2$. (1 p (yht. 12p))

Vastaus: Lukujen mediaani on joko 1 (silloin kun $x = 0$) tai -1 (kun $x = -2$).

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

12. Tornin rakentaminen (12 p.)

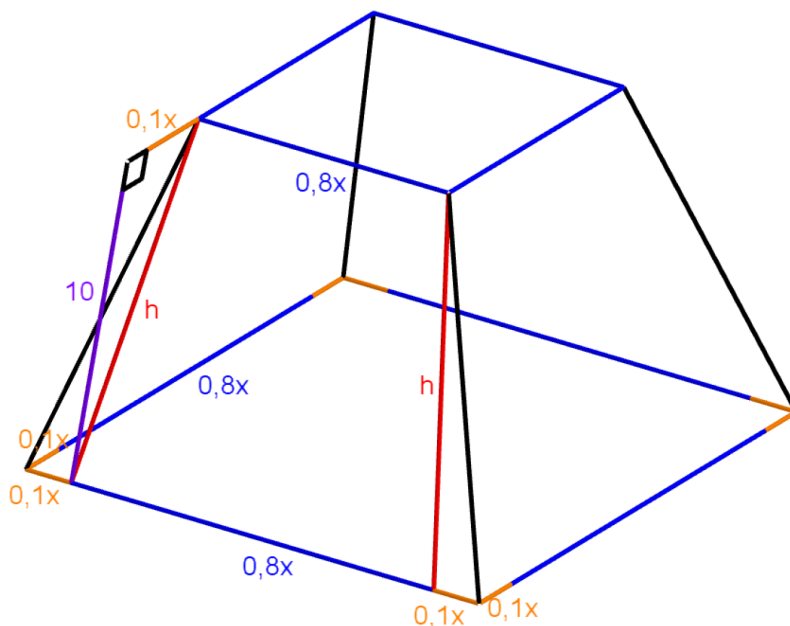
Linnaan rakennetaan katkaistun pyramidin muotoista tornia. Tornin korkeudeksi on suunniteltu 10 metriä ja seinän leveydeksi tornin huipulla 80 % leveydestä tornin juurella. Saatavilla oleva rakennusmateriaali rajoittaa tornin seinien pinta-alan 120 neliömetriin. Laske seinän leveys tornin juurella.

Ratkaisu.

Tehtävänannossa ei kerrottu, minkä muotoinen monikulmion pohja on. YTL:n hyvän vastauksen piirteissä oletettiin, että pohja on neliö, joten tämän olettamuksen tekeminen oli sallittua myös opiskelijalle. On kuitenkin oltava varovainen tehtäessä oletuksia, joita tehtävänannossa ei suoraan sanota – useimmiten niiden tekeminen ei ole luvallista.

Merkitään seinän leveyttä tornin juurella kirjaimella x . 1 p. (yht. 1 p.) Koska seinän leveys tornin huipulla on 80 % leveydestä tornin juurella, on seinän leveys tornin huipulla $0,8x$. 1 p. (yht. 2 p.) Tällöin puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituusero on $x - 0,8x = 0,2x$. Puolet tästä on $0,1x$.

Piirretään mallikuva. 1 p. (yht. 3 p.)



Tornin sivutahkot ovat puolisuunnikkaita. Selvitetään puolisuunnikkaan korkeus h Pythagoraan lauseella

$$h^2 = 10^2 + (0,1x)^2$$
$$h = \pm \sqrt{10^2 + (0,1x)^2}$$

Koska tornin sivun pituus ei voi olla negatiivinen, hylätään negatiivinen vaihtoehto. Puolisuunnikkaan korkeus on siis $h = \sqrt{10^2 + (0,1x)^2}$. 1 p. (yht. 4 p.)

Tornin yhden seinän pinta-ala on puolisuunnikkaan pinta-alan kaavalla laskettuna

$$A_1 = h \cdot \frac{x + 0,8x}{2} = \sqrt{10^2 + (0,1x)^2} \cdot \frac{x + 0,8x}{2}. \quad \text{3 p. (yht. 7 p.)}$$

Koska tornissa on neljä seinää, on seinien yhteispinta-ala

$$A = 4A_1 = 4 \cdot \sqrt{10^2 + (0,1x)^2} \cdot \frac{x + 0,8x}{2}. \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

Toisaalta seinien pinta-alan rakennusmateriaalia on käytössä 120 neliömetriä. Muodostetaan siis yhtälö ja ratkaistaan siitä x .

$$A = 120$$

$$4 \cdot \sqrt{10^2 + (0,1x)^2} \cdot \frac{x + 0,8x}{2} = 120 \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

Laskinohjelmalla saadaan ratkaisu $x = 3,331 \dots$ 2 p. (yht. 11 p.) Seinän leveys tornin juurella on siis noin 3,3 metriä. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Seinän leveys tornin juurella on 3,3 metriä.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

13. Noppapeli (12 p.)

Eräässä pelissä aloittava pelaaja A heittää tavallista noppaa. Mikäli hänen tuloksensa on 1 tai 2, hän voittaa pelin. Muussa tapauksessa pelaaja B heittää samaa noppaa. Mikäli hänen tuloksensa on 1, 2 tai 3, hän voittaa. Muussa tapauksessa peli päättyy tasapeliin, eikä kumpikaan voita. Laske pelaajien A ja B todennäköisyydet voittaa peli.

Ratkaisu.

Pelaaja A voittaa, jos tulee silmäluku 1 tai silmäluku 2. Koska eri silmälukuja on nopassa 6 kappaletta, todennäköisyys sille, että A voittaa, on

$$\begin{aligned}P(A \text{ voittaa}) &= \frac{2}{6} \quad \text{2p (yht. 2p)} \\&= \frac{1}{3} \quad \text{1p (yht. 3p)} \\&= 0,333 \dots \approx 0,33\end{aligned}$$

Pelaaja B voittaa, jos A ei voita ja pelaaja B heittää jonkun silmäluvuista 1, 2 tai 3. Lasketaan todennäköisyys sille, että B voittaa, jos A ei voita.

$$\begin{aligned}P(B \text{ voittaa, jos } A \text{ ei voita}) &= \frac{3}{6} \quad \text{2p (yht. 5p)} \\&= \frac{1}{2} \quad \text{1p (yht. 6p)}\end{aligned}$$

Pelaaja B pääsee heittämään, jos pelaaja A ei voita, eli todennäköisyydellä

$$\begin{aligned}P(A \text{ ei voita}) &= 1 - \frac{1}{3} \quad \text{2p (yht. 8p)} \\&= \frac{2}{3} \quad \text{1p (yht. 9p)}\end{aligned}$$

Lasketaan kertolaskusäännön avulla todennäköisyys sille, että B voittaa.

$$\begin{aligned}P(B \text{ voittaa}) &= P(A \text{ ei voita}) \cdot P(B \text{ voittaa, jos } A \text{ ei voita}) \\&= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{2p (yht. 11p)} \\&= \frac{1}{3} \quad \text{1p (yht. 12p)} \\&= 0,333 \dots \approx 0,33\end{aligned}$$

Vastaus: $P(A \text{ voittaa}) = \frac{1}{3}$, $P(B \text{ voittaa}) = \frac{1}{3}$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!