

Yo-mallivastaukset



Syksy 2021
Fysiikka

Tiesitkö tämän?

Mafylaiset veivät
vuoden 2021
haussa

74%

kaikista lääkiksen
pääsykoekiintöön paikoista.

60%

Pk-seudun lukioista
käyttää **Mafynettiä**.

Mafynetti

Mallivastausten tekijät:

Malliratkaisujen laatimisesta ovat vastanneet MAFY:n toinen perustaja Antti Suominen sekä MAFY:n oppimateriaalitiimi, jonka päätehtävä on laatia ja kehittää MAFY:n lukioon tarkoitettuja oppimateriaaleja.

Oppimateriaalitiimistä mukana olivat Antti Suomisen lisäksi Sakke Suomalainen, Linnea Tokola ja Timo Kalinainen. Lisäksi työn tukena olivat Tuomas Hauvala ja Matti Virolainen.

Mafy oppimateriaalit

Olemme Helsingissä, Tampereella, Turussa ja Jyväskylässä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys.

Palveluitamme ovat:

- Mafynetti – sähköinen oppimateriaali
- Lääketieteellisen valmennuskurssit
- Kauppatieteellisen valmennusmateriaalit
- DI-valmennuskurssit
- Yo-kokeisiin valmentavat kurssit

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kurseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Käyttöehdot

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafy.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion fysiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukiokursseillasi. Nämä mallivastaukset ovat MAFY Oy:n omaisuutta.

MAFY Oy:n yhteystiedot:

<https://mafy.fi/yhteydenotto>

Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	6
Ratkaisu tehtävään 3	11
Ratkaisu tehtävään 4	20
Ratkaisu tehtävään 5	22
Ratkaisu tehtävään 6	26
Ratkaisu tehtävään 7	30
Ratkaisu tehtävään 8	33
Ratkaisu tehtävään 9	36
Ratkaisu tehtävään 10	39
Ratkaisu tehtävään 11	47

Malliratkaisut päivitetty 16. syyskuuta 2021 klo. 11:23.

1. Täydennystehtäviä fysiikan eri osa-alueilta (20 p.)

Täydennä jokaisessa kohdassa (1.1–1.10) lauseet yhdellä tai muutamalla sanalla siten, että syntyy asiayhteyteen sopiva, fysiikkaa oikein kuvaava lause. Oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

1.1. Täydennä lause (2 p.)

Aurinkokuntaa koossa pitävä vuorovaikutus on nimeltään .

1.2. Täydennä lause (2 p.)

Atomiydintä pitää koossa vuorovaikutus.

1.3. Täydennä lause (2 p.)

Kun kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima on nollasta poikkeava, kappale on liikkeessä.

1.4. Täydennä lause (2 p.)

Kahden kappaleen törmätessä kimmottomasti toisiinsa kappaleiden yhteenlaskettu säilyy.

1.5. Täydennä lause (2 p.)

Kun kolikon lämpötilaa kasvatetaan, kolikon paksuus .

1.6. Täydennä lause (2 p.)

Kun termodynaamiseen systeemiin tuodaan lämpö määrä Q ja systeemi tekee työn W , jolle pätee $|W| = |Q|$, systeemin lämpötila .

1.7. Täydennä lause (2 p.)

Kun viulun kieltä kiristetään, kielen lähettämän äänen aallonpituus .

1.8. Täydennä lause (2 p.)

Valon kulkiessa ilmasta lasiin valon pysyy samana.

1.9. Täydennä lause (2 p.)

Kaksi varattua muovipalloa vetää toisiaan puoleensa, jos niillä on varaukset.

1.10. Täydennä lause (2 p.)

Induktiolain mukaan suljettuun johdinsilmukkaan syntyvän sähkövirran saa aikaan .

Ratkaisu.

1.1. Aurinkokuntaa koossa pitävä vuorovaikutus on nimeltään **gravitaatio**.

2p (yht. 2p)

Myös **gravitaatiovuorovaikutus** hyväksytään.

1.2. Atomiydintä pitää koossa **vahva** vuorovaikutus.

2p (yht. 4p)

Vahva vuorovaikutus vaikuttaa kvarkkien välillä ja pitää siten kvarkeista koostuvat protonit ja neutronit koossa. Vuorovaikutus ulottuu jonkin verran näiden nukleonien ulkopuolelle. Tämä ns. jäännösvoima pitää atomiytimen kasassa. Tätä jäännösvoimaa voidaan nimittää erikseen ydinvoimaksi tai vahvaksi ydinvoimaksi.

1.3. Kun kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima on nollasta poikkeava, kappale on **kiihtyvässä** liikkeessä.

2p (yht. 6p)

Newtonin toisen lain mukaan $\sum F = ma$, eli kokonaisvoima (voimien summa) on yhtä suuri kuin massan ja kiihtyvyyden tulo. Jos kokonaisvoima poikkeaa nolasta, myöskään kappaleen kiihtyvyys ei voi olla nolla.

1.4. Kahden kappaleen törmätessä kimmottomasti toisiinsa kappaleiden yhteenlaskettu **liikemäärä** säilyy.

2p (yht. 8p)

Liikemäärä säilyy törmäyksissä, jos kappaleisiin vaikuttavien ulkoisten voimien kohdistamat impulssit ovat merkityksettömän pienet. Yleisesti ottaen kappaleiden törmäyksissä kappaleiden välinen voima on ulkoisiin voimiin nähden suuri

ja törmäyksen kesto niin lyhyt, että liikemäärä säilyy lähes kaikissa tarkasteltavissa törmäyksissä. Liike-energia säilyy vain kimmoisissa törmäyksissä (kuten ideaalisten biljardipallojen törmäyksissä).

- 1.5. Kun kolikon lämpötilaa kasvatetaan, kolikon paksuus **kasvaa**. 2p (yht. 10p)

Kyse on lämpölaajenemisesta. Kun kappaletta lämmitetään, sen kaikki mitat kasvavat siten, että kappaleen muoto säilyy.

- 1.6. Kun termodynaamiseen systeemiin tuodaan lämpömäärä Q ja systeemi tekee työn W , jolle pätee $|W| = |Q|$, systeemin lämpötila **ei muutu**. 2p (yht. 12p)

Myös **pysyy vakiona** hyväksytään.

Termodynamiikan ensimmäisen pääsäännön mukaan $\Delta U = Q + W$, eli systeemin sisäenergian muutos on yhtä suuri kuin systeemiin tuodun lämpömäärän Q ja systeemiin tehdyn mekaanisen työn W summa. (Laki voidaan esittää monessa eri muodossa riippuen siitä, tarkoitetaanko W :llä systeemiin tuotua vai systeemin ulospäin tekemää mekaanista työtä.)

Tehtävän tilanteessa systeemiin tuodaan lämpöenergiaa ja systeemi tekee ulospäin saman verran työtä. Voitaisiin siis kirjoittaa $\Delta U = Q - W = 0$. Systeemin sisäenergia ei siis muutu. Systeemin lämpötila riippuu sen sisäenergiasta. Systeemin lämpötila ei siis muutu.

- 1.7. Kun viulun kieltä kiristetään, kielen lähettämän äänen aallonpituus **pienenee**. 2p (yht. 14p)

Kun viulun kieltä kiristetään, mekaanisen aaltoliikkeen eli värähtelyn nopeus kielessä kasvaa. Kielen pituus ei muutu, joten kieleen muodostuvan seisovan aallon aallonpituus ei muutu. Koska nopeus kasvaa ja aallonpituus pysyy vakiona aaltoliikkeen perusyhtälön $v = f\lambda$ perusteella kielen värähtelytaajuuden on kasvettava. Kielen värähtely saa sitä ympäröivän ilman värähtelemään samalla taajuudella. Myös kielen lähettämän äänen taajuus siis kasvaa.

Äänen nopeus ilmassa ei (juurikaan) riipu äänen taajuudesta, joten aaltoliikkeen perusyhtälön $v = f\lambda$ perusteella aallonpituuden λ pitää lyhentyä, kun taajuus f kasvaa ja nopeus v pysyy vakiona. Arkikielellä sanoen ääni muuttuu korkeammaksi kun viulun kieltä kiristetään.

- 1.8. Valon kulkiessa ilmasta lasiin valon **taajuus** pysyy vakiona. 2p (yht. 16p)

Valon ja muun aaltoliikkeen taajuus määräytyy aaltolähteen perusteella eikä muutu aallon edetessä. Valon nopeus riippuu väliaineesta. Kun valo kulkee ilmasta lasiin, sen nopeus pienenee ja aaltoliikkeen perusyhtälön $v = f\lambda$ mukaan myös sen aallonpituus pienenee.

- 1.9. Kaksi varattua muovipalloa vetää toisiaan puoleensa, jos niillä on **erimerkkiset** varaukset. 2p (yht. 18p)

Sähkömagneettisen vuorovaikutuksen aiheuttama Coulombin voima voi olla puoleensavetävä tai hylkivä. Voima on hylkivä, jos varaukset ovat samanmerkkiset ja puoleensa vetävä jos varaukset ovat erimerkkiset.

- 1.10. Induktiolain mukaan suljettuun johdinsilmukkaan syntyvän sähkövirran saa aikaan **magneettivuon muutos**. 2p (yht. 20p)

Induktiolain mukaan $\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, missä $\mathcal{E}$ on silmukkaan indusoituva jännite, $\Delta\Phi$ on silmukan läpi kulkevan magneettivuon muutos ja Δt on aikaväli, missä muutos tapahtuu. Kun suljettuun silmukkaan indusoituu jännite, silmukkaan syntyy myös sähkövirta, jonka voimakkuus riippuu Ohmin lain mukaan indusoidusta jännitteestä sekä silmukan resistanssista.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

2. Sulkapallo (15 p.)

Aineisto:

- 2. A [Mittausaineisto: Sulkapallon nopeus ajan funktiona](#)
- 2. B [Kuva: Sulkapallo](#)

Sulkapalloa lyötiin suuressa hallissa voimakkaasti suoraan ylöspäin. Sulkapalloon vaikuttaa olennaisesti kaksi voimaa: Maan siihen kohdistama paino sekä ilmanvastus, joka on verrannollinen sulkapallon nopeuden neliöön. Aineistossa [2.A](#) on sulkapallon mitattu nopeus ajan funktiona. Aineistossa [2.B](#) on kuva sulkapallosta ja tietoa sulkapallon ominaisuuksista.

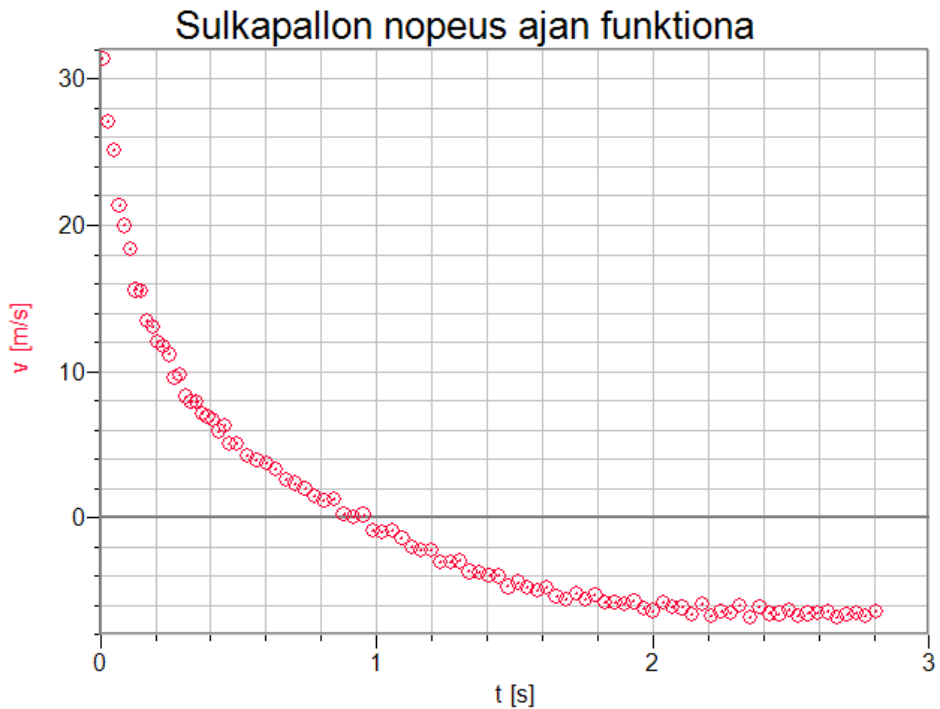
- 2.1. Esitä graafisesti sulkapallon mitattu nopeus ajan funktiona. Esitykseen ei tarvitse tehdä graafista tasoitusta. (4 p.)
- 2.2. Päätele graafisesta esityksestä, millä hetkellä sulkapallo on korkeimmillaan. Millä aikavälillä pallon nopeus on likimain vakio? (4 p.)
- 2.3. Ilmanvastuksen suuruudelle F_D pätee malli

$$F_D = \frac{1}{2}C\rho Av^2,$$

jossa C on kappaleen muodosta riippuva kerroin, ρ on ilman tiheys ($1,22 \text{ kg/m}^3$), A on kappaleen poikkipinta-ala ja v on kappaleen nopeus. Tarkastele aikaväliä, jolla pallon nopeus on likimain vakio. Määritä kerroin C kokeessa käytetylle sulkapallolle. (7 p.)

Ratkaisu.

2.1.

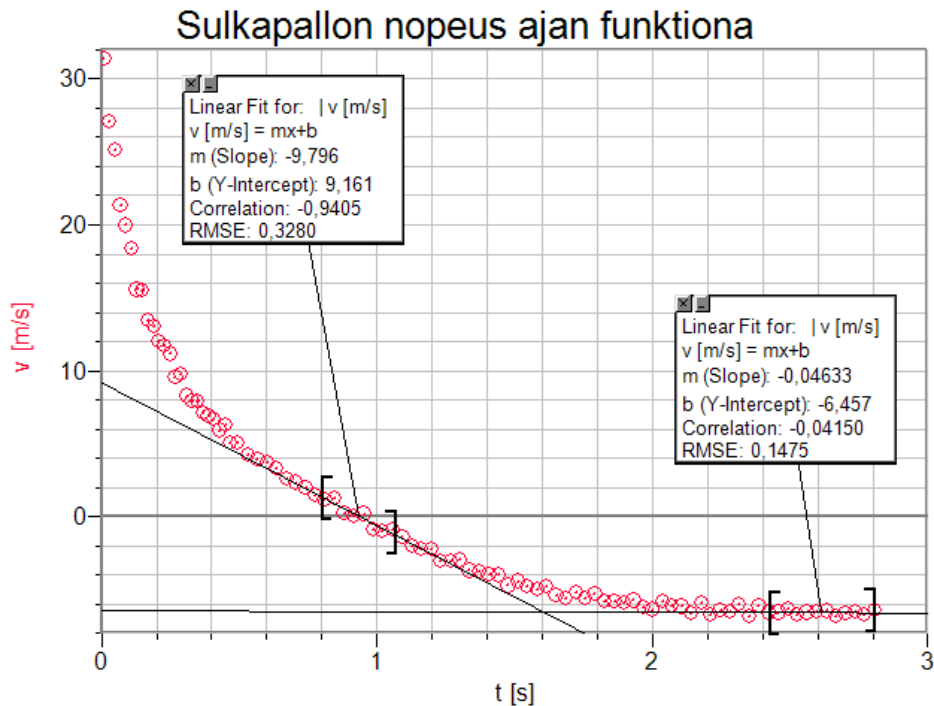


4p (yht. 4p)

Pisteytyksestä:

- Otsikon puuttuminen ei vie pisteitä,
- Suure tai yksikkö puuttuu akselilta = -1 p / virhe.

2.2. Sulkapallo on korkeimmillaan silloin, kun sen nopeus on nolla, sillä lentoradan lakipisteessä nopeus on hetkellisesti nolla juuri ennen suunnan muutosta takaisin kohti maata. 1p (yht. 1p) Piirretään kuvaajalle tangentti kohtaan, jossa kuvaaja leikkaa vaaka-akselin.



Tangenttisuoran yhtälöstä voidaan ratkaista aika, jolloin nopeuden arvo on 0.

$$v = mt + b$$

$$t = \frac{v - b}{m}$$

$$t = \frac{0 \text{ m/s} - 9,161 \text{ m/s}}{-9,796 \text{ m/s}^2}$$

$$t = 0,9351 \dots \text{ s} \approx 0,94 \text{ s} \quad \text{2p (yht. 3p)}$$

Ajanhetken voi selvittää myös piirtämällä piirto-ohjelmalla sopivan sovitteen mitausdataan ja analysoimalla sovitteesta vaaka-akselin leikkauspisteen. Kuitenkaan pelkästään yksittäisestä kohdasta arvioimalla ei saada riittävän tarkkaa tulosta, sillä mittausdatasta nähdään, että tuloksissa esiintyy merkittävästä satunnaista virhettä.

Pallon nopeus on tasainen, kun kuvaajan kulmakerroin lähestyy nollaa. Kuvaajasta arvioidaan, että pallon nopeus on likimain vakio aikavälillä $2,4 \text{ s} - 2,8 \text{ s}$. Sopiva kohta löydetään kokeilemalla piirtää kuvaajalle eri kohtiin tangenttia. Valitaan tangentti, jonka kulmakerroin on lähimpänä nollaa. 1p (yht. 4p)

Vastaus: Pallon nopeus on nolla hetkellä $t = 0,94$ s. Pallon nopeus on tasainen aikavälillä $2,4$ s – $2,8$ s.

2.3.

$$m = 4,8 \text{ g} = 0,0048 \text{ kg} \quad \leftarrow \text{aineistosta}$$

$$A = 0,0030 \text{ m}^2 \quad \leftarrow \text{aineistosta}$$

$$\rho = 1,22 \text{ kg/m}^3$$

Kun pallon nopeus on vakio, ilmanvastusvoima on yhtä suuri palloon kohdistuvan painovoiman kanssa. Newtonin II lain perusteella saadaan

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_D + \vec{G} = 0$$

$$F_D - G = 0$$

$$F_D = G \quad \text{2p (yht. 2p)}$$

$$\frac{1}{2} C \rho A v^2 = mg$$

$$C = \frac{2mg}{\rho A v^2} \quad \text{1p (yht. 3p)}$$

Lasketaan nopeus mittausdatasta nopeuksien itseisarvojen keskiarvona aikaväliltä $2,4$ s – $2,8$ s. Taulukkolaskentaohjelmalla nopeudeksi saadaan $v = 6,57825$ m/s.

1p (yht. 4p)

Esimerkiksi LibreOffice Calcissa keskiarvon voi laskea komennolla =AVERAGE(B1:B12), kun nopeudet olivat B-sarakkeessa, ja tarkasteltava väli $2,4$ s – $2,8$ s oli riveillä $1 - 12$.

Muotokertoimeksi saadaan

$$C = \frac{2 \cdot 0,0048 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{1,22 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,0030 \text{ m}^2 \cdot (6,57825 \text{ m/s})^2}$$

$$C = 0,5946 \dots \approx 0,59$$

Vastaus: Muotokerroin on 0,59. 3p (yht. 7p)

Pisteytyksestä:

- Kohdassa 2.3 ensimmäisten kahden pisteen saamiseksi riittää Newtonin 2. lain perusteella selittää, että ilmanvastusvoima ja painovoima ovat yhtä suuret, ei tarvitse välttämättä olla kirjoittanut yhtälöä.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

3. Lämmitysvastuksen teho (15 p.)

Aineisto:

3. A [Taulukko: Pesuohjelmien kestot eri lämpötiloilla](#)

Eräässä pyykinpesukoneessa voidaan käyttää samaa puuvillanpesuohjelmaa viidellä eri pesuveden lämpötilalla. Pesuohjelmien kestot eri pesulämpötiloille on annettu aineistossa [3.A](#). Voit olettaa, että pesuohjelman vaiheet ovat pesuveden lämmitystä lukuun ottamatta kaikilla pesulämpötiloilla samanlaiset. Pesuohjelmaan kuuluu pesun lisäksi huuhtelu kylmällä vedellä, johon kuluu yhtä paljon vettä kuin pesuun. Veden kulutus pesuohjelmassa on yhteensä 37 litraa. Määritä annettujen tietojen perusteella, graafista esitystä käyttäen, kuinka suuri on pesukoneen lämmitysvastuksen teho.

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

$$c = 4190 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$$

Tehtävänannon perusteella vettä kuluu yhtä paljon pesussa ja huuhtelussa, joten pesussa kuluvan veden määrä on puolet koko veden määrästä eli

$$V = 18,5 \ell = 0,0185 \text{ m}^3$$

Veden tiheys on $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Lämmitettävän veden massa on siis

$$m = \rho V = 18,5 \text{ kg.}$$

1p (yht. 1p)

Oletetaan, että kaikki vastuksesta saatava teho kuluu veden lämmittämiseen, eikä esimerkiksi pesukoneen rakenteiden lämpenemistä huomioida. Veden lämmittämiseen tarvitaan lämpömäärä on

$$Q = cm\Delta T. \quad (1)$$

Lämpömäärä (Q) saadaan lämmitysvastuksesta, joten vastuksen teholle voidaan muodostaa lauseke

$$P = \frac{Q}{t}$$

$$Q = Pt.$$

Sijoitetaan tämä kaavaan (1), jolloin saadaan

$$Pt = cm\Delta T. \quad \text{1 p (yht. 2p)}$$

Ratkaistaan edellisestä lausekkeesta veden lämmittämiseen kuluva aika.

$$t = \frac{cm}{P} \cdot \Delta T$$

Oletetaan, että pesuohjelman kesto on veden lämmittämiseen kuluvan ajan t ja pesuohjelman muihin toimintoihin kuluvan ajan t_o summa. Tehtävänannon mukaan pesuohjelman toimintoihin, poislukien veden lämmittäminen, kuluva aika t_o on sama kaikissa ohjelmissa. Pesuohjelman kokonaiskestolle saadaan siis lauseke

$$t_{\text{kok}} = t + t_o.$$

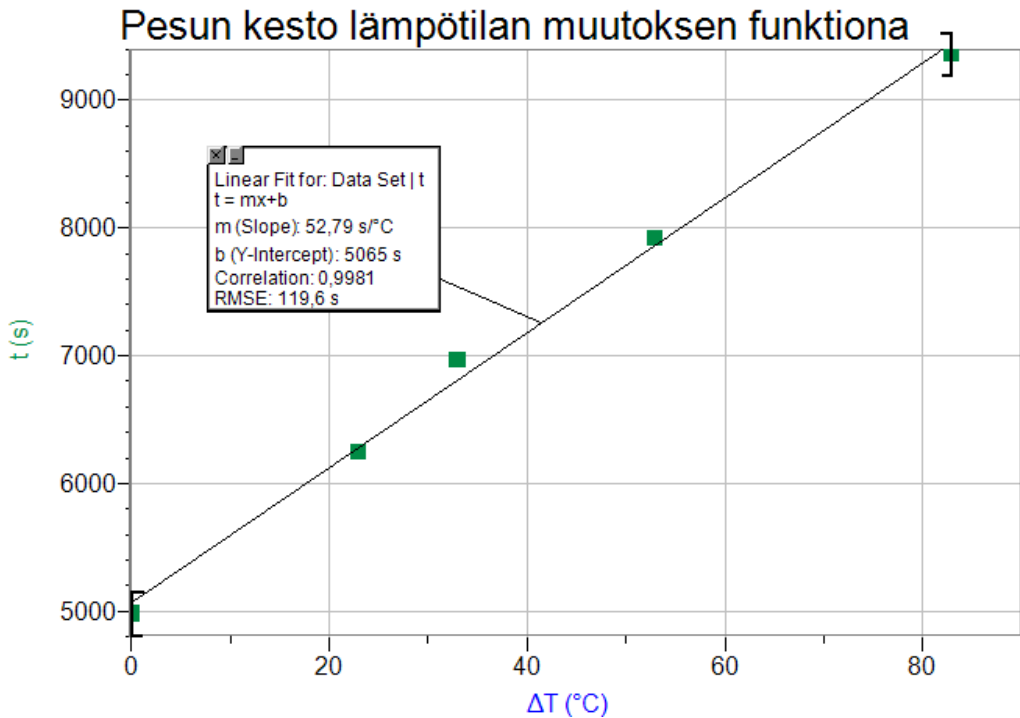
Saadaan lauseke, joka vastaa suoran yhtälöä

$$\underbrace{t_{\text{kok}}}_y = \underbrace{\frac{cm}{P}}_k \cdot \underbrace{\Delta T}_x + \underbrace{t_o}_b \quad \text{2p (yht. 4p)}$$

Huomaa! Yllä olevan yhtälön merkinnät y , k , x ja b ovat lisäselityksiä eikä niitä vaadita ratkaisussa.

Muutetaan pesujen kestot sekunneiksi ja muodostetaan uusi laskettu sarake lämpötilan muutoksille, kun kylmä vesi on 7°C .

ΔT ($^\circ\text{C}$)	t (s)
0	4980
23	6240
33	6960
53	7920
83	9360



5p (yht. 9p)

Pisteytyksestä:

- Otsikon puuttuminen ei vie pisteitä,
- Suure tai yksikkö puuttuu akselilta = -1 p/virhe,
- Sovite puuttuu = -2 p.

Fysikaaliseksi kulmakertoimeksi saadaan siis

$$k = 52,79 \frac{\text{s}}{^{\circ}\text{C}} \cdot 3\text{p (yht. 12p)}$$

Nyt kuvaajan kulmakerroin vastaa lauseketta

$$k = \frac{cm}{P}$$

$$P = \frac{cm}{k}$$

$$= 1468,365 \dots \text{ W}$$

$$\approx 1,5 \text{ kW}$$

Vastaus: Lämmitysvastuksen teho on 1,5 kW. 3p (yht. 15p)

Ratkaisuvaihtoehto 2

$$c = 4190 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$$

Tehtävänannon perusteella vettä kuluu yhtä paljon pesussa ja huuhtelussa, joten pesussa kuluvan veden määrä on puolet koko veden määrästä eli

$$V = 18,5 \ell = 0,0185 \text{ m}^3$$

Veden tiheys on $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Lämmitettävän veden massa on siis

$$m = \rho V = 18,5 \text{ kg}. \quad \text{1p (yht. 1p)}$$

Oletetaan, että kaikki vastuksesta saatava teho kuluu veden lämmittämiseen, **eikä esimerkiksi pesukoneen rakenteiden lämpenemistä huomioida**. Veden lämmittämiseen tarvitaan lämpömäärä on

$$Q = cm\Delta T. \quad (2)$$

Lämpömäärä (Q) saadaan lämmitysvastuksesta, joten vastuksen teholle voidaan muodostaa lauseke

$$P = \frac{Q}{t}$$

$$Q = Pt.$$

Sijoitetaan tämä kaavaan (1), jolloin saadaan

$$Pt = cm\Delta T. \quad \text{1p (yht. 2p)}$$

Muutetaan saatu yhtälö vastaamaan suoran yhtälön muotoa, kun pystyakselille tulee lämpötilan muutos ja vaakakselille aika.

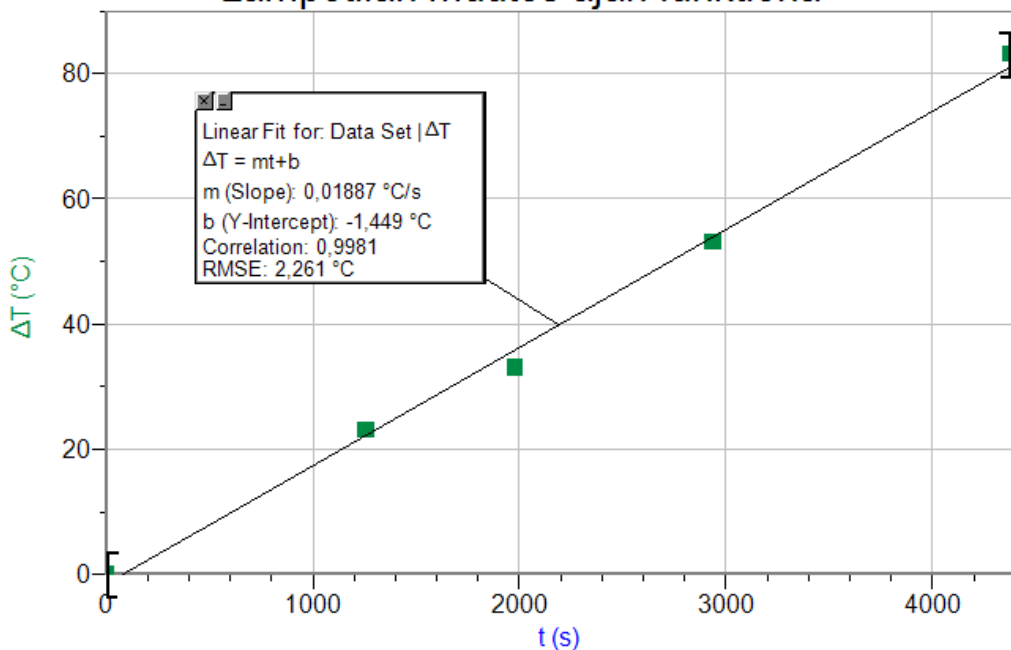
$$\underbrace{\Delta T}_y = \underbrace{\frac{P}{cm}}_k \cdot \underbrace{t}_x \quad \text{2p (yht. 4p)}$$

Huomaa! Yllä olevan yhtälön merkinnät y , k ja x ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

Muodostetaan lämpötilan muutoksista sekä lämmittämiseen kuluvista ajoista uusi laskettu sarake ja piirretään kuvaaja. Taulukon ajat on saatu vähentämällä kylmäpesuun kuluva aika ja muuttamalla ajat sekunneiksi. **Lämpötilan muutokset saadaan vähentämällä kylmän veden lämpötila ilmoitetusta pesuohjelman lämpötilasta.**

t (s)	$\Delta T(^{\circ}\text{C})$
0	0
1260	23
1980	33
2940	53
4380	83

Lämpötilan muutos ajan funktiona



5p (yht. 9p)

Pisteytyksestä:

- Otsikon puuttuminen ei vie pisteitä,
- Suure tai yksikkö puuttuu akselilta = -1 p/virhe,
- Sovite puuttuu = -2 p.

Fysikaaliseksi kulmakertoimeksi saadaan siis

$$k = 0,01887 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{s}}. \quad \text{3p (yht. 12p)}$$

Nyt kuvaajan kulmakerroin vastaa lauseketta

$$k = \frac{P}{cm},$$

josta saadaan teholle lauseke

$$\begin{aligned} P &= kcm \\ &= 1462,708 \dots \text{ W} \\ &\approx 1,5 \text{ kW} \end{aligned}$$

Vastaus: Lämmitysvastuksen teho on 1,5 kW. 3p (yht. 15p)

Ratkaisuvaihtoehto 3

$$c = 4190 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}}$$

Tehtävänannon perusteella vettä kuluu yhtä paljon pesussa ja huuhtelussa, joten pesussa kuluvan veden määrä on puolet koko veden määrästä eli

$$V = 18,5 \ell = 0,0185 \text{ m}^3$$

Veden tiheys on $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Lämmitettävän veden massa on siis

$$m = \rho V = 18,5 \text{ kg}. \quad \text{1p (yht. 1p)}$$

Oletetaan, että kaikki vastuksesta saatava teho kuluu veden lämmittämiseen, **eikä esimerkiksi pesukoneen rakenteiden lämpenemistä huomioida**. Veden lämmittämiseen tarvitaan lämpö määrä on

$$Q = cm\Delta T. \quad (3)$$

Lämpö määrä (Q) saadaan lämmitysvastuksesta, joten vastuksen teholle voidaan muodostaa lauseke

$$P = \frac{Q}{t}$$

$$Q = Pt.$$

Sijoitetaan tämä kaavaan (1), jolloin saadaan

$$Pt = cm\Delta T. \quad \text{1 p (yht. 2p)}$$

Merkitään kylmän veden lämpötilaa T_0 . Nyt lauseke voidaan kirjoittaa muotoon

$$Pt = cm(T - T_0)$$

Muunnetaan vastaamaan suoran yhtälön muotoa, kun veden lämpötila tulee pysty-akselille ja aika vaaka-akselille.

$$Pt = cmT - cmT_0$$

$$Pt + cmT_0 = cmT$$

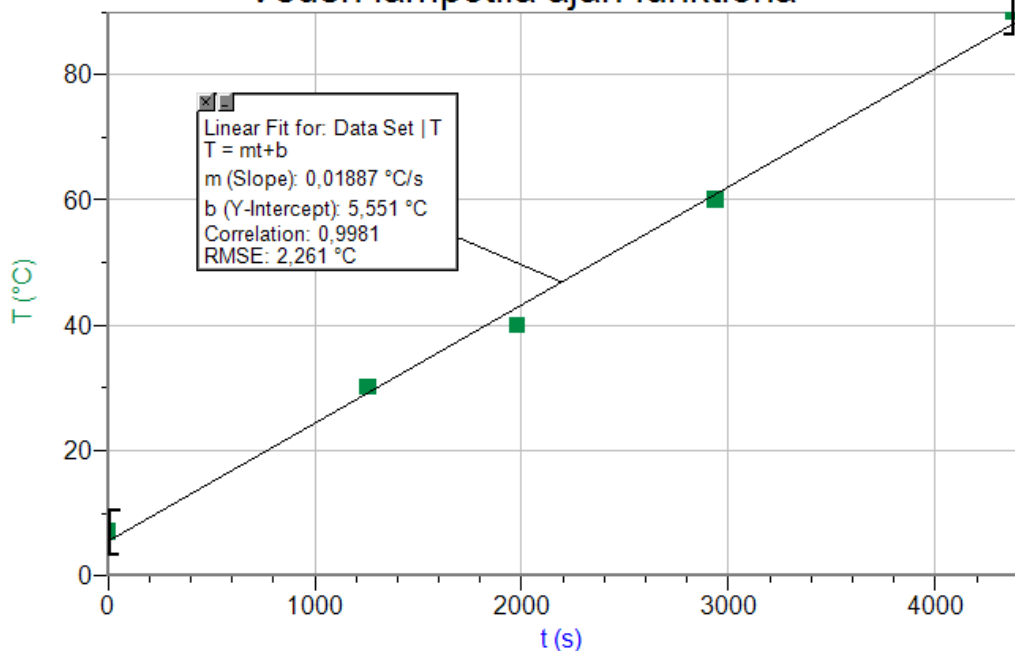
$$\underbrace{T}_y = \frac{\underbrace{P}_k}{\underbrace{cm}_b} \cdot \underbrace{t}_x + \underbrace{T_0}_b \quad \text{2p (yht. 4p)}$$

Huomaa! Yllä olevassa yhtälössä merkinnot y , k , x ja b ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

Muodostetaan ajasta uusi laskettu sarake, kun pesuajan tiedetään pitenevän vain veden lämmityksen takia. Taulukon ajat on saatu vähentämällä kylmäpesuun kuluva aika ja muuttamalla ajat sekunneiksi.

t (s)	T(°C)
0	7
1260	30
1980	40
2940	60
4380	90

Veden lämpötila ajan funktiona



5p (yht. 9p)

Pisteityksestä:

- Otsikon puuttuminen ei vie pisteitä,
- Suure tai yksikkö puuttuu akselilta = -1 p/virhe,
- Sovite puuttuu = -2 p.

Fysikaaliseksi kulmakertoimeksi saadaan

$$k = 0,01887 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{s}}.$$

3p (yht. 12p)

Nyt kulmakerroin vastaa lauseketta

$$k = \frac{P}{cm}$$

$$P = kcm$$

$$= 1462,708 \dots \text{ W}$$

$$\approx 1,5 \text{ kW}$$

Vastaus: Lämmitysvastuksen teho on 1,5 kW.

3p (yht. 15p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

4. Ilmapallo (15 p.)

Aineisto:

4. A [Kuva: Ilmapallo seinällä](#)

Kun hankaat täyttää ilmapalloa vaatteisiin ja asetat sen sitten seinää vasten, huomaat sen tarttuvan seinään.

4.1. Mitä ilmapallolle tapahtuu, kun sitä hangataan vaatteisiin? (3 p.)

4.2. Selitä, miksi ilmapallo tarttuu seinään ja pysyy siinä paikallaan. Piirrä selitykseksi tueksi kuvaan [4.A](#) ilmapalloon vaikuttavien voimien voimavektorit ja nimeä voimat. (8 p.)

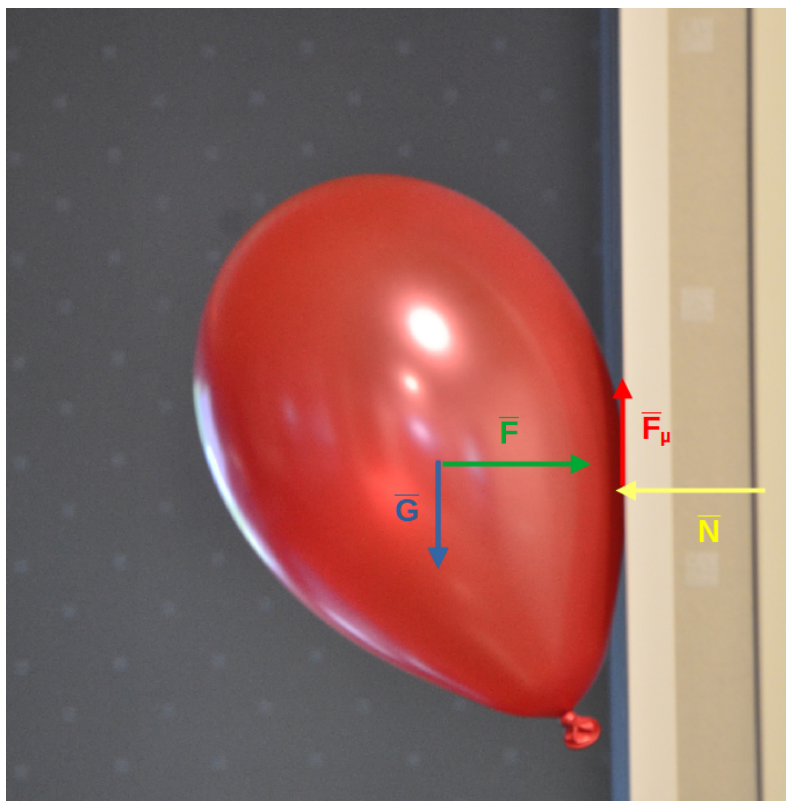
4.3. Miksi ilmapallo alkaa jonkin ajan kuluttua laskeutua seinää pitkin alas? (4 p.)

Ratkaisu.

4.1. Kun ilmapalloa hangataan vaatteisiin, se varautuu sähköisesti hankaussähkön takia. Hankauksen aikana ilmapallon tai vaatteiden pinnalta irtoaa elektroneja, jotka siirtyvät toiseen kappaleeseen. 3p (yht. 3p) Jos elektroni siirtyvät pallosta vaatteeseen, pallo varautuu positiivisesti. Jos elektronit siirtyvät vaatteesta palloon, pallo varautuu negatiivisesti.

Tyypillisesti kumi ja muovi pyrkivät varautumaan hankauksessa negatiivisesti ja iho, hiukset ja kankaat positiivisesti. Tällä ei kuitenkaan ole tehtävän kannalta merkitystä.

4.2. Kun staattisesti varautunut ilmapallo asetetaan seinää vasten, se jää kiinni seinään influenssi-ilmiön vaikutuksesta. Influenssi-ilmiössä pallon kanssa erimerkkiset varaukset siirtyvät lähemmäksi palloa ja pallon kanssa samanmerkkiset varaukset siirtyvät kauemmaksi pallosta sähköisen voiman vaikutuksesta. 2p (yht. 2p) Tämä aiheuttaa pallon ja seinän välille vetovoiman $\vec{F}$. Vetovoima vetää pallon kiinni seinään, jolloin seinä kohdistaa palloon vaakasuoran tukivoiman $\vec{N}$. Koska painovoima $\vec{G}$ yrittää vetää palloa seinää pitkin alaspäin, seinä kohdistaa palloon lepokitkavoiman $\vec{F}_\mu$, joka vastustaa tätä liikettä. Jos seinän ja pallon välinen kitkakerroin sekä tukivoima ovat riittävän suuret, lepokitka riittää pitämään pallon paikoillaan. 2p (yht. 4p)



2p (yht. 6p)

Kuvaan on piirretty ilmapalloon vaikuttava painovoima $\vec{G}$, seinän palloon kohdistama vetävä sähköinen voima $\vec{F}$, seinän palloon kohdistama tukivoima $\vec{N}$ sekä seinän ja pallon välinen lepokitka $\vec{F}_\mu$ 2p (yht. 8p)

- 4.3. Pallo menettää sähkövaraustaan ajan kuluessa. Elektronit pääsevät siirtymään pallon ja seinän välillä sekä pallon ja ympäröivän ilman välillä. 1p (yht. 1p) Koska pallo ja seinä (sekä huoneilma) ovat eristeitä, varausten liike on hidasta ja sähkövirta pallon ja seinän välillä on pieni. Sähkövarausten tasoittuessa pallon ja seinän välinen sähköinen voima $\vec{F}$ pienenee 1p (yht. 2p), joten seinän palloon kohdistama tukivoima $\vec{N}$ pienenee. Lepokitkan maksimiarvo $\mu_0 N$ riippuu tukivoiman suuruudesta. 1p (yht. 3p) Kun tukivoima on pienentynyt niin paljon että lepokitkan suurin mahdollinen arvo on pienempi kuin painovoima eli $\mu_0 N < G$, pallo saa kiihtyvyyden alaspäin ja lähtee putoamaan. 1p (yht. 4p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

5. Keinu (15 p.)

Aineisto:

5. A [Kuva: Keinu](#)

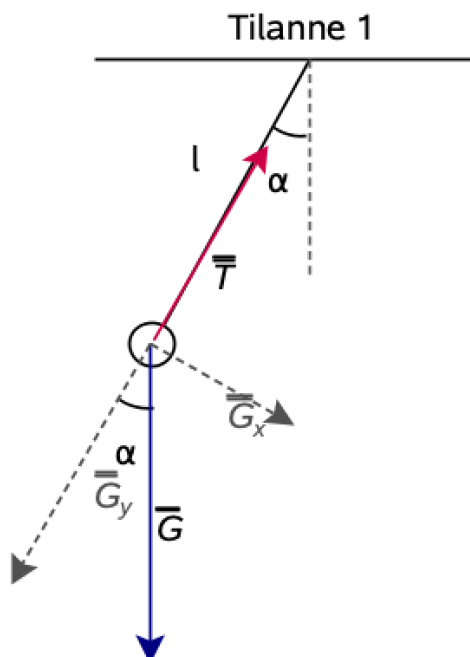
Olet rakentamassa kesämökin pihaan sukulaislapsille keinua (kuva [5.A](#)). Kaikki muut tarvikkeet ovat asianmukaiset, mutta keinun naruiksi on saatavilla vain ohutta pyykkinarua, jonka "murtolujuudeksi" valmistaja ilmoittaa 65 kg.

Missä kohtaa keinun liikerataa keinun naruihin kohdistuu suurin kuormitus? Perustele vastauksesi. Määritä, kuinka suuri keinujan massa voi enintään olla, jotta narut eivät katkeaisi hänen keinuessaan. Oleta, että keinuja heilahtaa suurimmillaan 90° :n kulmaan pystysuunnasta.

Ratkaisu.

$$m_{\text{murto}} = 65 \text{ kg}$$

Tarkastellaan keinuun kohdistuvia voimia, kun keinu on kulmassa α pystytasoon nähden.



$\overline{T}$ on narujen yhteenlaskettu jännitysvoima ja $\overline{G}$ on keinun ja keinujan yhteenlaskettu painovoima. (2p (yht. 2p))

Keinu on ympyräliikkeessä, joten kiihtyvyys on keskeiskiihtyvyyttä. Ympyräliikkeen säde on yhtä suuri kuin langan pituus, eli ℓ . Valitaan positiivinen suunta kohti ympyräliikkeen keskipistettä. Tällöin y -suunnassa Newtonin 2. lain nojalla pätee

$$\sum \overline{F} = m\overline{a}_n$$

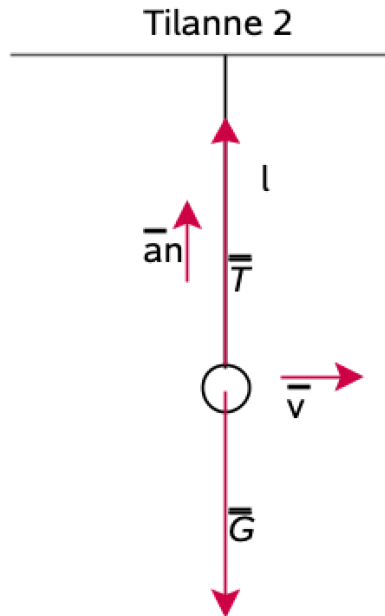
$$\overline{T} + \overline{G}_y = m\overline{a}_n$$

$$T - G_y = ma_n \quad (2p \text{ (yht. 4p)})$$

$$T - G \cos(\alpha) = m \frac{v^2}{\ell}$$

$$T = m \frac{v^2}{\ell} + G \cos(\alpha) \quad (2p \text{ (yht. 6p)})$$

Nopeus v on suurin alimmassa asemassa (tasapainoasema) ja toisaalta myös $G_y = G \cos(\alpha)$ on suurimmillaan alimmassa asemassa, koska siellä $\cos(\alpha) = \cos(0^\circ) = 1$. Näin ollen jännitysvoiman lausekkeen perusteella jännitysvoima on suurimmillaan, kun keinu on alimmassa asemassa. Kun määritetään suurinta keinujan massaa, jonka narut kestävät, riittää siis tarkastella keinua alimmassa asemassa. (2p (yht. 8p))



Tarkastellaan siis tilannetta 2, jossa keinu on tasapainoasemassa. Valitaan positiivinen suunta kohti ympyräliikkeen keskipistettä. Newtonin 2. lain mukaan

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_n$$

$$\vec{T} + \vec{G} = m\vec{a}_n$$

$$T - G = ma_n$$

$$T - G = m \frac{v^2}{\ell}$$

$$T = m \frac{v^2}{\ell} + G$$

$$T = m \frac{v^2}{\ell} + mg$$

1p (yht. 9p)

Huomaa! Yllä olevan yhtälön voi päätellä myös suoraan tilanteessa 1 johdetusta jännitysvoiman lausekkeesta sijoittamalla perustelujen kera $\alpha = 0^\circ$.

Jännitysvoima on sitä suurempi, mitä suurempi on nopeus v . Nopeus on suurimmillaan, kun keinuja ottaa vauhtia mahdollisimman korkealta, eli rajatapauksessa siten, että $\alpha = 90^\circ$.

Ääriasemassa keinulla on vain potentiaalienergiaa ja tasapainoasemassa vain liike-energiaa. Korkeimmassa kohdassa keinujan korkeus tasapainoasemaan verrattuna on yhtä suuri kuin narun pituus ℓ . Mekaanisen energian säilymisen nojalla

$$E_{pA} + E_{kA} = E_{pL} + E_{kL}$$

$$mg\ell + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (1\text{p (yht. 10p)})$$

$$v^2 = 2g\ell \quad (1\text{p (yht. 11p)})$$

Sijoitetaan tämä jännitysvoiman lausekkeeseen.

$$T = m \cdot \frac{2g\ell}{\ell} + mg$$

$$T = 3mg \quad (2\text{p (yht. 13p)})$$

Narujen murtolujuus on 65 kg. Siten kummankin narun jännitysvoima voi vastata massaltaan 65 kg suuruisen kuorman painovoimaa. Selvitetään, mikä keinujan massa voi olla. Oletetaan keinulauta hyvin kevyeksi keinujan massa verrattuna. Koska naruja on kaksi, narujen yhteenlaskettu jännitysvoima voi vastata $m_{\text{raja}} = 2m_{\text{murto}} = 130 \text{ kg}$:n suuruista kuormaa. Siis jännitysvoima rajatapauksessa on

$$T_{\text{raja}} = m_{\text{raja}}g$$

Ratkaistaan keinujan massa.

$$T_{\text{raja}} = 3mg$$

$$m = \frac{T_{\text{raja}}}{3g}$$

$$= \frac{m_{\text{raja}}g}{3g}$$

$$= 43,333 \dots \text{ kg}$$

$$\approx 43 \text{ kg}$$

Vastaus: Jännitysvoima on suurimmillaan tasapainoasemassa eli kun keinun naru on suoraan alaspäin. Keinuu kestää 43 kg:n massaisen keinujan. 2p (yht. 15p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

6. Huilu ja klarinetti (15 p.)

Aineisto:

6. A [Kuva: Soitinten A ja B äänispektrit](#)

Poikkihuilu ja klarinetti ovat puupuhaltimiksi luokiteltuja soittimia. Huilua voidaan mallintaa molemmista päistä avoimena putkena ja klarinettia toisesta päästä suljetuna putkena. Kuvassa [6.A](#) on kaksi äänispektriä (A ja B), joista toinen esittää huilulla ja toinen klarinetilla soitetun saman sävelen (äänen) spektriä.

6.1. Määritä perussävelen taajuus sekä vastaava aallonpituus. (5 p.)

6.2. Selvitä fysikaalisesti perustellen, esittääkö kuvan [6.A](#) spektri A huilulla vai klarinetilla soitetun sävelen spektriä. (10 p.)

Ratkaisu.

6.1. Perussävelen taajuus, eli perustaajuus on soittimen matalin taajuus. Kuvaajista saadaan luettua, että kummankin soittimen perustaajuus on

$$f_1 = 266 \text{ Hz} \quad \text{2p (yht. 2p)}$$

Huomaa! YTL:n hyvän vastauksen piirteissä oli luettu taajuudeksi 264 Hz (luettu 16.9.2021). Luultavasti arvot väliltä 264 Hz – 266 Hz ainakin hyväksytään.

Äänen nopeus ilmassa on $v = 343 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ratkaistaan perussäveltä vastaava äänen aallonpituus ilmassa aaltoliikkeen perusyhtälöstä.

$$v = f\lambda \quad \text{1p (yht. 3p)}$$

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

$$= 1,289473 \dots \text{ m}$$

$$\approx 1,29 \text{ m} \quad \text{2p (yht. 5p)}$$

Vastaus: Kummankin soittimen perustaajuus on 266 Hz ja tätä vastaava äänen aallonpituus ilmassa on 1,29 m.

- 6.2. Ratkaisussa riitti käsitellä toinen soitin ja päätellä sen perusteella, kumpi spektri esittää huilun ja kumpi klarinetin säveltä. Tässä on esitetty molemmat tavat eri ratkaisuvaihtoehdoissa. Myös sellainen ratkaisu, missä käsitellään molemmat soittimet, toki hyväksytään.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Huiluun (molemmista päistä avoin putki) muodostuvat seisovat aallot ovat sellaisia, että huilun molemmissa päissä on kupu (**painevaihtelun minimi**).



Putken pituus = $1/2 \cdot$ aallonpituus,
eli aallonpituus = $2 \cdot$ putken pituus



Putken pituus = $1 \cdot$ aallonpituus,
eli aallonpituus = $1 \cdot$ putken pituus



Putken pituus = $3/2 \cdot$ aallonpituus,
eli aallonpituus = $2/3 \cdot$ putken pituus

3p (yht. 3p)

Vastaavasti seuraavissa ominaisvärähtelyissä putken pituuteen mahtuu aina puolikas aallonpituus lisää. Merkitään putken pituutta L :llä. Huilun ominaisvärähtelyjä vastaavat aallonpituudet ovat siis

$$\lambda_n = \frac{2}{n} \cdot L,$$

missä $n = 1, 2, 3 \dots$ Ratkaistaan ominaistajuuudet aaltoliikkeen perusyhtälöstä.

$$v = f_n \lambda_n$$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n}$$

$$f_n = \frac{v}{\frac{2}{n} \cdot L}$$

$$f_n = n \cdot \frac{v}{2L}$$

Huilun perustaajuus on

$$f_1 = 1 \cdot \frac{v}{2L} = \frac{v}{2L},$$

eli ominaistaajuuudet voidaan kirjoittaa muodossa

$$f_n = n \cdot f_1.$$

3p (yht. 6p)

Huilun ominaistaajuuksia ovat siis kaikki perustaajuuden monikerrat.

Aineiston kuvaajista nähdään, että kuvaajassa B havaitaan perustaajuuden lisäksi taajuuudet (likimain) 530 Hz, 795 Hz, 1063 Hz ja 1320 Hz, eli perustaajuuden kaikki monikerrat. Kuvaajassa A puolestaan havaitaan perustaajuuden lisäksi vain taajuuudet (likimain) 795 Hz ja 1320 Hz, eli kuvaajasta A puuttuvat parilliset monikerrat. Kuvaaja B on siis huilun spektri ja kuvaaja A on klarinetin spektri.

2p (yht. 8p)

Vastaus: Kuvaaja A esittää klarinetilla soitetun sävelen spektriä.

2p (yht. 10p)

Ratkaisuvaihtoehto 2

Klarinettiin (toisesta päästä avoin putki) muodostuvat seisovat aallot ovat sellaisia, että avoimessa päässä on kupu (painevaihtelun minimi) ja suljetussa päässä solmukohta (painevaihtelun maksimi).



Putken pituus = $1/4 \cdot$ aallonpituus,
eli aallonpituus = $4 \cdot$ putken pituus



Putken pituus = $3/4 \cdot$ aallonpituus,
eli aallonpituus = $4/3 \cdot$ putken pituus



Putken pituus = $5/4 \cdot$ aallonpituus,
eli aallonpituus = $4/5 \cdot$ putken pituus

3p (yht. 3p)

Vastaavasti seuraavissa ominaisvärähtelyissä putken pituuteen mahtuu aina puolikas aallonpituus lisää. Merkitään putken pituutta L :llä. Huilun ominaisvärähtelyjä vastaavat aallonpituudet ovat siis

$$\lambda_n = \frac{4}{2n-1} \cdot L,$$

missä $n = 1, 2, 3 \dots$ Ratkaistaan ominaistaaajuudet aaltoliikkeen perusyhtälöstä.

$$v = f_n \lambda_n$$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n}$$

$$f_n = \frac{v}{\frac{4}{2n-1} \cdot L}$$

$$f_n = (2n-1) \cdot \frac{v}{4L}$$

Klarinetin perustaajuus on

$$f_1 = (2 \cdot 1 - 1) \cdot \frac{v}{4L} = \frac{v}{4L},$$

eli ominaistaaajuudet voidaan kirjoittaa muodossa

$$f_n = (2n-1) \cdot f_1.$$

3p (yht. 6p)

Klarinetin ominaistaaajuudet ovat siis perustaajuuden parittomia monikertoja.

Aineiston kuvaajista nähdään, että kuvaajassa B havaitaan perustaajuuden lisäksi taajuudet (likimain) 530 Hz, 795 Hz, 1063 Hz ja 1320 Hz, eli perustaajuuden kaikki monikerrat. Kuvaajassa A puolestaan havaitaan perustaajuuden lisäksi vain taajuudet (likimain) 795 Hz ja 1320 Hz, eli kuvaajasta A puuttuvat parilliset monikerrat. Kuvaaja A on siis klarinetin spektri ja kuvaaja B on huilun spektri.

2p (yht. 8p)

Vastaus: Kuvaaja A esittää klarinetilla soitetun sävelen spektriä.

2p (yht. 10p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

7. Sähkömoottori (15 p.)

Aineisto:

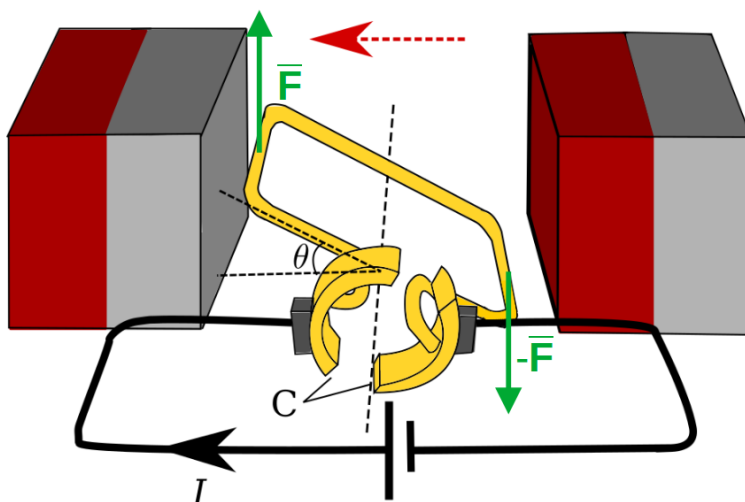
7. A [Kuva: Tasavirtamoottori](#)

Kuva [7.A](#) esittää yksinkertaista kestopagneeteista, jännitelähteestä ja pyörivästä johdinsilmukasta koostuvaa tasavirtamoottoria. Johdinsilmukassa kulkee sähkövirta. Moottorin yläpuolelle punaisella katkoviivalla piirretty nuoli osoittaa magneettikentän suunnan. Voit olettaa magneettikentän homogeeniseksi magneettien välissä. Magneettivuon tiheys on $8,1 \text{ mT}$. Neliömäisen silmukan sivun pituus on $4,0 \text{ cm}$ ja sähkövirran suuruus 510 mA .

- 7.1. Piirrä kuvaan [7.A](#) niiden voimien voimavektorit, jotka pyörittävät silmukkaa. (4 p.)
- 7.2. Johda lauseke silmukkaan kohdistuvan momentin M suuruudelle kiertokulman θ funktiona. Mikä on momentin suurin arvo? (8 p.)
- 7.3. Moottorin silmukassa on kommutaattori (merkintä C kuvassa [7.A](#)), joka kääntää silmukassa olevan virran suunnan. Miksi tämä on moottorin toiminnan kannalta tärkeää? (3 p.)

Ratkaisu.

7.1.



2p (yht. 2p)

Voimien suunnat voidaan päätellä oikean käden säännön avulla. Etusormi osoittaa virran suuntaan, keskisormi magneettivuon tiheyden suuntaan ja peukalo voiman suuntaan. Voimat ovat yhtä suuret, sillä molempien johtimien pituudet ovat yhtä suuret, niissä kulkee sama virta ja ne ovat yhtä voimakkaassa magneettikentässä. 2p (yht. 4p)

7.2.

$$B = 8,1 \text{ mT} = 0,0081 \text{ T}$$

$$\ell = 4,0 \text{ cm} = 0,040 \text{ m}$$

$$I = 510 \text{ mA} = 0,510 \text{ A}$$

Voiman aiheuttaman momentin suuruus on voiman ja voiman varren tulo. Eli

$$M = F \cdot r$$

Suoraan virtajohtimeen kohdistuvan magneettisen voiman suuruus on $F = I\ell B \sin(\alpha)$, missä I on johtimessa kulkeva virta, ℓ on johtimen pituus, B on magneettivuon tiheys johtimen kohdalla ja α on johtimen ja magneettikentän välinen kulma (tehtävän tilanteessa $\alpha = 90^\circ$ joten $\sin(\alpha) = 1$). Johtimiin kohdistuvat voimat eivät siis riipu kiertokulmasta θ . 2p (yht. 2p)

Johtimiin kohdistuvan voiman varsi silmukan kiertoakselin suhteen on $r = \frac{\ell}{2} \cos(\theta)$. Yhden voiman momentti on siis

$$\begin{aligned} M &= Fr \\ &= I\ell B \frac{\ell}{2} \cos(\theta) \\ &= \frac{1}{2} I\ell^2 B \cos(\theta) \end{aligned} \quad 2p \text{ (yht. 4p)}$$

Silmukkaan vaikuttavia voimia on kaksi. Kummankin voiman suuruus ja voiman varsi ovat yhtä suuret. Voimien momenttien summa eli silmukkaan kohdistuva kokonaismomentti on siis

$$\begin{aligned} \Sigma M &= 2M \quad 2p \text{ (yht. 6p)} \\ &= I\ell^2 B \cos(\theta) \end{aligned}$$

Momentin suurin arvo saavutetaan, kun $\cos(\theta) = 1$, eli $\theta = 0^\circ$. Momentin suurin arvo on

$$\begin{aligned}M_{\max} &= I\ell^2 B \\&= 6,6096 \cdot 10^{-6} \text{ Nm} \\&\approx 6,6 \mu\text{Nm}\end{aligned}$$

Vastaus: Momentin suurin arvo on $6,6 \mu\text{Nm}$. 2p (yht. 8p)

- 7.3. Kuvitellaan moottori ilman kommutaattoria. Kun tällaisen moottorin käämin kiertokulma ylittää arvon $\theta = 90^\circ$, ylempänä olevaan silmukan sivuun kohdistuva voima osoittaa edelleen ylöspäin, sillä virran suunta on sama kuin alkutilanteessa. **Vastaavasti alhaalla olevaan silmukan sivuun kohdistuva voima osoittaa alaspäin.** Moottori pyrkii siis palaamaan tilanteeseen, missä silmukka on pystysuorassa.

Kun moottorissa on kommutaattori, silmukassa kiertävän virran suunta muuttuu juuri kun silmukka on pystysuorassa. **Kun silmukka ylittää tämän kohdan, virran suunta kääntyy ja ylhäällä olevaan silmukan sivuun kohdistuu alaspäin osoittava voima ja alhaalla olevaan silmukan sivuun kohdistuu ylöspäin osoittava voima.** Virran kääntyessä myös voimien suunnat vaihtuvat ja silmukka jatkaa pyörimistään. 3p (yht. 3p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

8. Fuusio (15 p.)

Fuusiota pidetään yhtenä mahdollisena tapana tuottaa energiaa tulevaisuudessa.

8.1. Selitä fuusioreaktorin toimintaperiaate. (9 p.)

8.2. Oletetaan, että tulevaisuudessa fuusioenergialla voidaan korvata laajamittaisesti fissioenergia. Pohdi perustellen, koskevatko seuraavat fissiovoimaloista esitetyt väittämät myös fuusiovoimaloita.

- Voimalalle sopivan sijoituspaikan löytäminen on vaikeaa.
- Voimalan synnyttämän jätteen sijoittaminen on ongelmallista.
- Joillekin valtioille reaktorin hankkiminen on poliittisesti vaikeaa niiden kansainvälisten suhteiden takia.

(6 p.)

Ratkaisu.

8.1. Fuusioreaktiossa kaksi kevyttä atomiydintä yhdistyy yhdeksi raskaammaksi ytimeksi. Samalla vapautuu energiaa, sillä syntyvien ytimien sidossuus eli sidosenergia nukleonia kohti on suurempi kuin lähtöytimillä. 2p (yht. 2p) Reaktion lopputuotteiden massa on siis pienempi kuin alkuperäisten ytimien massa. Massae-roa vastaava energia ilmenee reaktiotuotteiden liike-energiana, mikä sitoutues-saan reaktorin rakenteisiin muuttuu lämmöksi. Tämä lämpö muutetaan sähkök-si tuottamalla vesihöyryä, joka pyörittää sähkögeneraattoria. 1p (yht. 3p) Tyypilli-sin fuusioreaktio on vedyn isotooppien deuteriumin ja tritiumin fuusio 1p (yht. 4p), missä syntyy helium-4 ydin ja yksi vapaa neutroni, mutta myös muut reaktiot ovat mahdollisia.

Koska atomiytimet ovat positiivisesti varautuneita, ne hylkivät toisiaan. 2p (yht. 6p) Reaktorissa fuusioitavat vedyn isotoopit kuumennetaan plasmaksi, jolloin ato-miytimet erottuvat elektroneista. Varattuina hiukkasina näitä vapaita atomiyti-miä voidaan ohjata magneettikentillä. Voimakkailla magneeteilla luodaan toruk-sen muotoinen magneettinen säiliö, missä atomiytimet voivat lentää vapaas-ti osumatta astian seiniin. 1p (yht. 7p) Ytimien sähkömagneettisen poistovoiman voittaminen perustuu ytimien suureen liike-energiaan, mikä saavutetaan läm-mittämällä plasma hyvin kuumaksi. 2p (yht. 9p) **Plasman lämpötila ylittää 100 mil-joonaa astetta. Tässä kuvattua reaktorityyppiä kutsutaan Tokamakiksi.**

Magneettisesti koossa pidetyn plasman lisäksi toinen mahdollinen fuusiotekniikka on laserfuusio. Siinä vedyn isotooppeja sisältävästä aineesta rakennetaan kapseli, joka asetetaan reaktioastian keskelle. Tähän kapseliin kohdistetaan monesta suunnasta hetkellisesti erittäin voimakkaita lasersäteitä. Nämä lasersäteet kuumentavat kapselin ulkokuoren hyvin nopeasti niin kuumaksi, että se kaasuuntuu. Tästä aiheutuva paineaalto yhdessä laserien säteilypaineen kanssa puristaa kapselin keskustan hyvin tiiviiksi. Tämä puristus riittää voittamaan atomiytimien sähkömagneettisen poistovoiman ja mahdollistaa fuusion. Tällaisella reaktorilla saavutetaan hetkellinen reaktio, Tokamak-tyyppisillä reaktoreilla on periaatteessa mahdollista aikaansaada jatkuva fuusioreaktio.

8.2. Tutkitaan väitteitä yksi kerrallaan.

- *Voimalalle sopivan sijoituspaikan löytäminen on vaikeaa.*

Fissiovoimalassa on katastrofaalisen ydinonnettomuuden riski. Fuusiovoimalassa tällaista riskiä ei ole, sillä fuusioreaktio pysähtyy erittäin helposti eikä siinä ole mahdollisuutta hallitsemattomaan ketjureaktioon. Fuusiovoimalan sijoittaminen on siis helpompaa kuin fissiovoimalan. 2p (yht. 2p)

Muita mahdollisia perusteluita: Fuusiovoimala ei tuota yhtä vaarallista ydinjätettä kuin fissiovoimala. Molemmat voimalatyypit voivat periaatteessa tuottaa kaukolämpöä, mutta fissiovoimalan tuottamaa kaukolämpöä ei voi täysin hyödyntää, jos voimalaa ei uskalleta rakentaa lähelle suurta asutuskeskusta. Myös fuusiovoimala vaatii suuren tontin alueella, jolla on mahdollisimman hyvä suoja luonnonkatastrofeilta sekä runsaasti jäähdytysvettä. Fuusiovoimalan sijoituksessa on siis omat vaikeutensa, mutta vähemmän kuin fissiovoimalan tapauksessa.

- *Voimalan synnyttämän jätteen sijoittaminen on ongelmallista.*

Fissiovoimalan tuottama ydinjäte on erittäin vaarallista ja vaatii kalliin lopusijoituksen kymmeniksi tuhansiksi vuosiksi. Fuusiovoimala ei tuota varsinaista ydinjätettä, deuterium-tritium-reaktiossa syntyvä helium ei eroa tavallisesta vappupalloissa käytetystä heliumista. 2p (yht. 4p) Reaktiossa syntyvät neutronit aktivoivat reaktoriastian rakenteita, jotka muuttuvat radioaktiivisiksi. Tällaista jätettä syntyy myös fissiovoimaloissa ja se on merkittävästä vähemmän vaarallista kuin käytetty fissiopolttoaine.

- *Joillekin valtioille reaktorin hankkiminen on poliittisesti vaikeaa niiden kansainvälisten suhteiden takia.*

Fissiovoimaloiden hankkiminen on kustannusten lisäksi hankalaa siksi, et-

tä niihin liittyy mahdollisuus ydinaseiden tuotantoon. Fuusiovoimalassa tämä mahdollisuus on merkittävästi pienempi, sillä voimalassa ei käsitellä ydinaseissa käytettävää uraania tai plutoniumia. 2p (yht. 6p) Reaktiossa syntyvillä neutroneilla voidaan valmistaa asekelpoista materiaalia esim. luonnonuraanista, mutta tämä mahdollisuus on merkittävästi pienempi kuin fissiovoimalalla.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

9. Keittolevyt (20 p.)

Aineisto:

9. A [Kuva: Keittolevyt](#)
9. B [Kuva: Piirrospohja](#)

Tehtävänäsi on vertailla kuvan [9.A](#) mukaisten kahden keittolevyn energiatehokkuutta keitettäessä vettä. Kuvassa [9.A](#) vasemmalla on induktiokeittolevy ja oikealla perinteinen valurautakeittolevy.

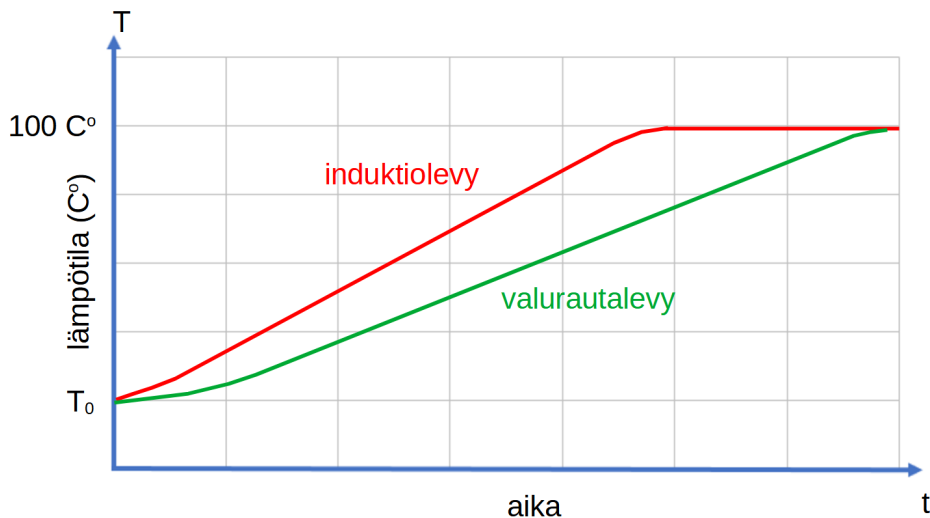
- 9.1. Kuvaile pääpiirteissään, miten vertaillet keittolevyjen energiatehokkuutta. Mitä ja miten mittaat tai määrität? Erittele mitä tekijöitä tulee ottaa huomioon, jotta tulokset olisivat mahdollisimman luotettavia. (10 p.)
- 9.2. Hahmottele graafinen esitys siitä, millaista mittausdataa oletat mittauksista saatavan. Halutessasi voit käyttää tulosten esittämisen apuna aineiston [9.B](#) piirrospohjaa. (6 p.)
- 9.3. Tutkimuksessa osoittautuu, että toinen keittolevyistä on energiatehokkaampi. Mistä fysikaalisista syistä ero energiatehokkuudessa johtuu? (4 p.)

Ratkaisu.

- 9.1. Keittolevyjen energiatehokkuudella tarkoitetaan sitä, kuinka suuren osan sähköverkosta ottamastaan energiasta keittolevy pystyy siirtämään keitettävään veteen. 1p (yht. 1p) On siis mitattava veden lämpenemisnopeus suhteessa keittolevyn sähköverkosta ottamaan sähkötehoon. 1p (yht. 2p) Kokeessa mitataan veden keittämiseen kuluva aika keittolevyn sähköverkosta ottama sähköteho ja veden lämpötila ajan funktiona. 1p (yht. 3p) Sähköteho voidaan määrittää esimerkiksi virtamittarilla, kun tiedetään sähköverkon tehollinen jännite. 1p (yht. 4p) Lisäksi on tiedettävä keitettävän veden massa, mikä voidaan hyvällä tarkkuudella selvittää mittaamalla veden tilavuus. 1p (yht. 5p)

Mittausten luotettavuuden varmistamiseksi kokeissa on käytettävä samaa tai samanlaista kattilaa. 1p (yht. 6p) Mittauksissa pitää vakioda veden määrä ja veden, kattilan ja keittolevyn alkulämpötila. 2p (yht. 8p) Lisäksi mittausolosuhteiden pitää olla kaikissa mittauksissa samat. Esimerkiksi ilmavirta voi jäähdyttää keitettävää vettä ja siten vaikuttaa mittaustulokseen. 1p (yht. 9p) Keitettävän veden määrän pitäisi olla riittävän suuri, jotta sen tilavuus (massa) sekä keittämiseen kuluva aika voidaan mitata riittävän tarkasti. 1p (yht. 10p)

9.2. Keitettävän veden lämpötila nousee tasaisesti, jos levystä siirtyy veteen energiaa vakio teholla. Valurautalevyn tapauksessa kuvaajan alussa on pitkä hkö loiva nousu, koska alussa energiaa kuluu paljon raskaan levyn kuumentamiseen, kun taas induktiolevyn tapauksessa kuumennetaan lähinnä kattilaa. Levyn lämmettyä veden lämpötila nousee tasaisesti, mutta hitaammin kuin induktiolevyn tapauksessa, sillä lämpöä karkaa keittoastian lisäksi kuuman valurautalevyn reunoilta.



6p (yht. 6p)

Kuvassa on esitetty oletetut mittaustulokset. Aika-akselin lukuarvot ja veden alkulämpötila riippuvat koejärjestelystä. Niillä ei ole tehtävän kannalta merkitystä, olennaista on kuvaajien muoto ja valurautalevyllä olevan veden hitaampi lämpäminen. Kuvaajaa hahmoteltaessa on oletettu, että molemmissa kokeissa veden alkulämpötilat ja massat olivat yhtä suuret.

Pisteytyksestä:

- Perusteluja ei välttämättä edellytetä täysien pisteiden saamiseksi.
- Kuvaajien aluissa on loivat kohdat (1 p) ja valurautalevyn tapauksessa loiva kohta on huomattavasti pidempi (1 p).
- Kuvaajassa on pitkä, likimain lineaarinen osa (1 p) ja induktiolevyn lämpötila nousee siinä nopeammin (1 p). Induktiolevy saavuttaa siis nopeammin lämpötilan 100 C° .
- Akseleilla olevat suureet on nimetty. (1 p)

- Lämpötilan nousu päättyy 100 C tasolle. (1 p)
- Loppulämpötilaa lukuun ottamatta lämpötilasteikoille ei tarvita lukuarvoja.
- Aika-akselille ei tarvita mitään lukuarvoja eikä yksikköä, koska niitä ei voida laskea annetuilla tiedoilla.

9.3. Induktiolevy on energiatehokkaampi kuin valurautalevy. Induktiolevy lämmittää suoraan kattilaa, kun taas valurautalevy kuumentaa ensin itsensä ja lämpö siirtyy levystä kattilaan johtumisella. Induktiolevyssä vaihtovirta aiheuttaa muuttuvan magneettikentän, joka sähkömagneettisen induktion välityksellä aiheuttaa metalliseen kattilaan pyörrevirtoja jotka lämmittävät kattilaa. Valurautalevyn on siis kuumennettava induktiolevyyn verrattuna enemmän ainetta. 2p (yht. 2p) Levyn on lisäksi kuumennuttava kattilaa kuumemmaksi, jotta lämpöä johtuu levystä kattilaan. Näistä syistä lämpöä johtuu ja säteilee valurautalevystä ympäristöön enemmän kuin induktiolevystä. 2p (yht. 4p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

10. Radiometrinen mittaus (20 p.)

Aineisto:

- 10. A [Piiroskuva: Radiometrinen mittauslaitteisto](#)
- 10. B [Kuva: Intensiiteettijakauma](#)
- 10. C [Mittausaineisto: Intensiiteettijakautuma taulukkomuodossa](#)

Radiometrisiä eli säteilyn käyttöön perustuvia mittauksia käytetään teollisuudessa silloin, kun olosuhteet eivät salli käyttää muita mittausmenetelmiä tai kun kohteena on ihmisille ja ympäristölle vaarallinen materiaali. Näillä mittausmenetelmillä voidaan myös valvoa ja ohjata tuotannon eri vaiheita, esimerkiksi materiaalivirtoja, prosessin kulkua häiritsemättä.

Radiometrisellä tiheysmittarilla voidaan gammasäteilyn avulla määrittää suljetussa putkessa kulkevan aineen tiheys koskematta aineeseen tai vaikuttamatta aineen virtaukseen. Tiheyden määrittäminen perustuu säteilyn vaimenemiseen mitattavassa aineessa. Vaimenemisen voimakkuuden ilmaisee aineen absorptiokerroin (heikenyskerroin), joka on suoraan verrannollinen aineen tiheyteen.

Radiometrinen mittauslaitteisto koostuu säteilylähteestä, ilmaisimesta ja mittauselektroniikasta (kuva [10.A](#)). Ilmaisimella havaitaan säteilyn intensiteetin vaihteluita, jotka aiheutuvat säteilylähteen ja ilmaisimen välissä virtaavan aineen tiheyden muutoksista eli muutoksista absorption määrässä.

Eräs radiometrinen tiheysmittauslaitteisto mittaa putkessa virtaavan nesteen ja kaasun kokonaistiheyttä. Intensiiteettikuvaajan (kuva [10.B](#)) minimikohdat (intensiteettitaso I_1) vastaavat tilanteita, joissa säteilylähteen ja ilmaisimen välissä olevassa putkenosassa on ainoastaan nestettä. Maksimikohdat (intensiteettitaso I_2) vastaavat puolestaan tilanteita, joissa putkenosassa on ainoastaan kaasua. Mittauspisteet on annettu myös taulukkomuodossa aineistossa [10.C](#). Nesteen absorptiokerroin μ_1 on suurempi kuin kaasun absorptiokerroin μ_2 .

Laitteiston säteilylähteenä toimii radioaktiivinen isotooppi Am-241, jonka puoliintumisaika on $T_{1/2} = 432,2$ vuotta. Am-241-isotoopin alfahajoamisten yhteydessä syntyy 59,5409 keV:n gammakvantteja. Säteilyn läpäisemän materiaalivirran paksuutena käytetään sen keskimääräistä paksuutta x .

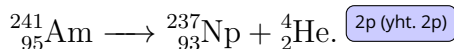
- 10.1. Kirjoita hajoamisyhtälö isotoopin Am-241 alfahajoamiselle ja selitä lyhyesti, mistä gammakvantti syntyy. (4 p.)
- 10.2. Osoita, että nesteen ja kaasun absorptiokertoimien erotukselle $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2$ pätee yhtälö $\Delta\mu = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{I_2}{I_1} \right)$. (4 p.)
- 10.3. Neste-kaasuseokselle voidaan esittää niin sanottu efektiivinen absorptiokerroin $\mu = \mu_1 - \alpha(\mu_1 - \mu_2)$, jossa α on kaasun suhteellinen osuus neste-kaasuseoksen

tilavuudesta. Oleta, että virtausnopeus on vakio ja että mittausarvot on saatu tasan aikaväleihin. Putken geometria ei vaikuta intensiteettimittauksiin. Määritä prosentteina kaasun keskimääräinen osuus putkessa virtaavasta materiaalista koko mittauksen aikana (kuva [10.B](#) ja mittausaineisto [10.C](#)). Anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella. (8 p.)

- 10.4. Kuinka paljon maksimi-intensiteetin ja minimi-intensiteetin välinen erotus $\Delta I_0 = I_1 - I_2$ muuttuu kymmenessä vuodessa? (4 p.)

Ratkaisu.

- 10.1. Isotoopin Am-241 alfahajoamisen hajoamisyyhtälö on



Hajoamisen seurauksena tytärydin ${}^{237}_{93}\text{Np}$ jää virittyneeseen tilaan, ja viritystilan purkautumisen seurauksena emittoituu gammakvantti. (2p (yht. 4p))

- 10.2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Heikennyslain nojalla ilmaisimella havaittu intensiteetti minimikohdassa on

$$I_1 = I_0 e^{-\mu_1 x} \quad (1)$$

ja vastaavasti maksimikohdassa

$$I_2 = I_0 e^{-\mu_2 x}, \quad (2)$$

missä I_0 on säteilylähteen lähettämä intensiteetti ja x on säteilyn läpäisemän materiaalin paksuus. (1p (yht. 1p))

Jaetaan yhtälöt (1) ja (2) puolittain.

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_0 e^{-\mu_2 x}}{I_0 e^{-\mu_1 x}}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = e^{-\mu_2 x + \mu_1 x} \quad \text{1p (yht. 2p)}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = e^{(\mu_1 - \mu_2)x}$$

$$\ln\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = (\mu_1 - \mu_2)x$$

$$\mu_1 - \mu_2 = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$$

$$\Delta\mu = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{I_2}{I_1}\right) \quad \text{2p (yht. 4p)}$$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Heikennyslain nojalla ilmaisimella havaittu intensiteetti minimikohdassa on

$$I_1 = I_0 e^{-\mu_1 x} \quad (1)$$

ja vastaavasti maksimikohdassa

$$I_2 = I_0 e^{-\mu_2 x}, \quad (2)$$

missä I_0 on säteilylähteen lähettämä intensiteetti ja x on säteilyn läpäisemän materiaalin paksuus. 1p (yht. 1p)

Ratkaistaan CAS-ohjelman avulla μ_1 yhtälöstä (1) ja μ_2 yhtälöstä (2).

$$\mu_1 = \frac{-\ln\left(\frac{I_1}{I_0}\right)}{x}$$

$$\mu_2 = \frac{-\ln\left(\frac{I_2}{I_0}\right)}{x}$$

Absorptiokertoimien erotus on siis

$$\begin{aligned}
 \Delta\mu &= \mu_1 - \mu_2 \\
 &= \frac{-\ln\left(\frac{I_1}{I_0}\right)}{x} - \frac{-\ln\left(\frac{I_2}{I_0}\right)}{x} \\
 &= \frac{1}{x} \cdot \left(\ln\left(\frac{I_2}{I_0}\right) - \ln\left(\frac{I_1}{I_0}\right) \right) \\
 &= \frac{1}{x} \cdot \ln\left(\frac{\frac{I_2}{I_0}}{\frac{I_1}{I_0}}\right) \\
 &= \frac{1}{x} \ln\left(\frac{I_2}{I_1}\right) \cdot \text{3p (yht. 4p)}
 \end{aligned}$$

10.3.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Efektiivisen absorptiokertoimen lausekkeesta saadaan

$$\begin{aligned}
 \mu &= \mu_1 - \alpha(\mu_1 - \mu_2) \\
 \mu_1 - \mu &= \alpha(\mu_1 - \mu_2)
 \end{aligned}$$

Sovelletaan kohdassa 10.2 annettua kaavaa yhtälön molemmilla puolilla oleviin absorptiokertoimien erotuksiin.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x} \ln\left(\frac{I}{I_1}\right) &= \alpha \cdot \frac{1}{x} \ln\left(\frac{I_2}{I_1}\right) \\
 \alpha &= \frac{\ln\left(\frac{I}{I_1}\right)}{\ln\left(\frac{I_2}{I_1}\right)} \cdot \text{4p (yht. 4p)}
 \end{aligned}$$

Aineiston kuvaajan perusteella intensiteetti on pienimmillään noin välillä 1900 ms – 2000 ms. Arvioidaan minimi-intensiteetti laskemalla keskiarvo intensiteeteistä tällä välillä. Saadaan $I_1 = 37,9003 \dots \text{cpms} \approx 37,9 \text{cpms}$. 1p (yht. 5p) Vastaavasti kuvaajasta nähdään, että intensiteetti on suurimmillaan noin välillä

1450 ms – 1700 ms. Arvioidaan maksimi-intensiteetti laskemalla keskiarvo intensiteeteistä tällä välillä. Saadaan $I_2 = 50,3405 \dots \text{cpms} \approx 50,3 \text{cpms}$. 1p (yht. 6p)

Lasketaan taulukkolaskentaohjelman avulla kutakin hetkellistä intensiteettiä vastaava α :n arvo. **Hetkellisten intensiteettien arvot ovat taulukon B-sarakkeessa riveillä 2 – 146, joten nämä saadaan laskettua LibreOffice Calc:ssa alla olevan kuvan mukaisilla kaavoilla.** Kaavat saa esiin ruutukaappausta varten napauttamalla valikosta Näytä/Näytä kaava. Kuva on lisäselitys, eikä sitä vaadita ratkaisussa.

	A	B	C
1	t (ms)	I (cpms)	alfa
2	0,0000	44,824955	=LUONNLOG(B2/37,9)/LUONNLOG(50,3/37,9)
3	24,0824	43,940026	=LUONNLOG(B3/37,9)/LUONNLOG(50,3/37,9)
4	48,1648	43,735161	=LUONNLOG(B4/37,9)/LUONNLOG(50,3/37,9)
5	72,2472	45,665476	=LUONNLOG(B5/37,9)/LUONNLOG(50,3/37,9)
6	96,3296	47,474790	=LUONNLOG(B6/37,9)/LUONNLOG(50,3/37,9)
7	120,4120	48,732563	=LUONNLOG(B7/37,9)/LUONNLOG(50,3/37,9)

Oletetaan tehtävänannon mukaisesti, että virtausnopeus on vakio ja mittaukset on saatu tasaisin väliajoin. Tällöin keskimääräinen kaasun osuus saadaan laskettujen hetkellisten kaasun osuuksien α keskiarvona. Lasketaan tämä taulukkolaskentaohjelman keskiarvo-toiminnolla. Saadaan

$$\alpha = 0,38465 \dots$$

$$\alpha \approx 38,5\%$$

Vastaus: Kaasun suhteellinen osuus oli mittauksen aikana keskimäärin 38,5%.

2p (yht. 8p)

Huomaa! Lopullinen vastaus riippuu hieman siitä, mitkä arvot luki aineistosta minimi- ja maksimi-intensiteeteille.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Ilmaisimella havaittu intensiteetti on siis

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

Sijoitetaan tähän annettu efektiivisen absorptiokertoimen lauseke $\mu = \mu_1 - \alpha(\mu_1 - \mu_2) = \mu_1 - \alpha \cdot \Delta\mu$.

$$I = I_0 e^{-(\mu_1 - \alpha \cdot \Delta\mu) \cdot x}$$

$$I = I_0 e^{-\mu_1 x + \alpha \cdot \Delta\mu \cdot x}$$

Sijoitetaan tähän kohdassa 10.2 saatu lauseke $\Delta\mu = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$.

$$I = I_0 e^{-\mu_1 x + \alpha \cdot \frac{1}{x} \ln\left(\frac{I_2}{I_1}\right) \cdot x}$$

$$I = I_0 e^{-\mu_1 x + \alpha \ln\left(\frac{I_2}{I_1}\right)}$$

$$I = I_0 e^{-\mu_1 x} \cdot e^{\alpha \ln\left(\frac{I_2}{I_1}\right)}$$

Kohdan 10.2. yhtälön (1) nojalla $I_1 = I_0 e^{-\mu_1 x}$. Sijoitetaan tämä yllä olevaan yhtälöön.

$$I = I_1 \cdot e^{\alpha \ln\left(\frac{I_2}{I_1}\right)}$$

Ratkaistaan kaasun suhteellinen osuus α :

$$\alpha = \frac{\ln\left(\frac{I}{I_1}\right)}{\ln\left(\frac{I_2}{I_1}\right)} \quad \text{4p (yht. 4p)}$$

Aineiston kuvaajan perusteella intensiteetti on pienimmillään noin välillä 1900 ms – 2000 ms. Arvioidaan minimi-intensiteetti laskemalla keskiarvo intensiteeteistä tällä välillä. Saadaan $I_1 = 37,9003 \dots \text{cpms} \approx 37,9 \text{cpms}$. 1p (yht. 5p) Vastaavasti kuvaajasta nähdään, että intensiteetti on suurimmillaan noin välillä 1450 ms – 1700 ms. Arvioidaan maksimi-intensiteetti laskemalla keskiarvo intensiteeteistä tällä välillä. Saadaan $I_2 = 50,3405 \dots \text{cpms} \approx 50,3 \text{cpms}$. 1p (yht. 6p)

Lasketaan taulukkolaskentaohjelman avulla kutakin hetkellistä intensiteettiä vastaava α :n arvo. **Hetkellisten intensiteettien arvot ovat taulukon B-sarakkeessa riveillä 2 – 146, joten nämä saadaan laskettua LibreOffice Calc:ssa alla olevan kuvan mukaisilla kaavoilla. Kaavat saa esiin ruutukaappausta varten napauttamalla valikosta Näytä/Näytä kaava. Kuva on lisäselitys, eikä sitä vaadita ratkaisussa.**

	A	B	C
1	t (ms)	I (cpms)	alfa
2	0,0000	44,824955	=LUONNLOG(B2/37,9)/LUONNLOG(50,3/37,9)
3	24,0824	43,940026	=LUONNLOG(B3/37,9)/LUONNLOG(50,3/37,9)
4	48,1648	43,735161	=LUONNLOG(B4/37,9)/LUONNLOG(50,3/37,9)
5	72,2472	45,665476	=LUONNLOG(B5/37,9)/LUONNLOG(50,3/37,9)
6	96,3296	47,474790	=LUONNLOG(B6/37,9)/LUONNLOG(50,3/37,9)
7	120,4120	48,732563	=LUONNLOG(B7/37,9)/LUONNLOG(50,3/37,9)

Oletetaan tehtävänannon mukaisesti, että virtausnopeus on vakio ja mittaukset on saatu tasaisin väliajoin. Tällöin keskimääräinen kaasun osuus saadaan laskettujen hetkellisten kaasun osuuksien α keskiarvona. Lasketaan tämä taukkolaskentaohjelman keskiarvo-toiminnolla. Saadaan

$$\alpha = 0,38465 \dots$$

$$\alpha \approx 38,5\%$$

Vastaus: Kaasun suhteellinen osuus oli mittauksen aikana keskimäärin 38,5%.

2p (yht. 8p)

Huomaa! Lopullinen vastaus riippuu merkittävästi siitä, mitkä arvot luki aineistosta minimi- ja maksimi-intensiteeteille. Aineiston kuvan perusteella mielestämme I_1 :lle pitäisi hyväksyä arvot väliltä 37,8 cpms – 38,0 cpms, ja I_2 :lle väliltä 50,2 cpms – 50,6 cpms. Näin ollen lopullisessa vastauksessa pitäisi mielestämme hyväksyä α :n arvot ainakin väliltä 37,1% – 39,3%.

10.4. Mittaushetkellä intensiteettien erotus on

$$\Delta I_0 = I_1 - I_2 = 12,9 \text{ cpms.}$$

1p (yht. 1p)

Merkitään $t = 10$ a kuluttua maksimi-intensiteettiä $I_{1,10}$:llä ja minimi-intensiteettiä $I_{2,10}$:llä. Ilmaisimella havaittu fotonien määrä aikayksikössä on suoraan säteilylähteen aktiivisuuteen, joka noudattaa hajoamislakia, joten myös ilmaisimella havaittu fotonien määrä aikayksikössä noudattaa hajoamislakia.

Puoliintumisaika on

$$T_{1/2} = 432,2 \text{ a}$$

Hajoamislain nojalla siis

$$I_{1,10} = I_1 e^{-\lambda t} = I_1 e^{-\frac{\ln(2)}{T_{1/2}} \cdot t}$$

$$I_{2,10} = I_2 e^{-\lambda t} = I_2 e^{-\frac{\ln(2)}{T_{1/2}} \cdot t}$$

1p (yht. 2p)

eli erotukseksi 10 vuoden jälkeen saadaan

$$\begin{aligned}\Delta I_{10} &= I_{1,10} - I_{2,10} \\ &= I_1 e^{-\frac{\ln(2)}{T_{1/2}} \cdot t} - I_2 e^{-\frac{\ln(2)}{T_{1/2}} \cdot t} \\ &= 12,6947 \text{ cpms}\end{aligned}$$

1p (yht. 3p)

Kysytty maksimi-intensiteetin ja minimi-intensiteetin muutos muuttuu siis kymmenen vuoden aikana

$$\Delta I_0 - \Delta I_{10} = 0,20523 \dots \text{ cpms} \approx 0,21 \text{ cpms}$$

Vastaus: Maksimi-intensiteetin ja minimi-intensiteetin muutos muuttuu kymmenen vuoden aikana 0,21 cpms. 1p (yht. 4p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

11. Gravitaatiokentän voimakkuuden mittaaminen (20 p.)

Aineisto:

11. A [Teksti: GRACE-koe](#)11. B [Kuva: Amazon](#)

Maapallon gravitaatiokentän voimakkuutta mittaamalla voidaan tehdä päätelmiä maapallon massan jakautumisesta ja sen muuttumisesta vuosien ja vuodenaikojen mukaan. Aineistossa [11.A](#) kerrotaan GRACE-kokeesta, jolla mitattiin vuosina 2002–2017 maapallon gravitaatiokentän voimakkuutta avaruudesta. Aineistossa [11.B](#) tarkastellaan GRACE-kokeen tuloksia Amazonjoen alueen vesimäärän muutoksista.

- 11.1. Miksi ja miten maapallon paikalliset massanmuutokset vaikuttavat satelliitin liikkeeseen? Miksi satelliitteja tarvitaan kaksi? (4 p.)
- 11.2. Miksi esimerkiksi vuoristot ja muut maanpinnan muodot eivät näy aineiston [11.B](#) kuvissa? (3 p.)
- 11.3. Kuinka suuren suhteellisen muutoksen satelliitin putoamiskiintyvyydessä GRACE-järjestelmä pystyy aineiston mukaan havaitsemaan? (8 p.)
- 11.4. Mitä sellaista tietoa gravitaatiokentän mittauksella saadaan, jota on vaikea saada muilla mittaustavoilla? (5 p.)

Ratkaisu.

- 11.1. Maapallon paikalliset massanmuutokset aiheuttavat muutoksia satelliitteihin kohdistuvan gravitaatiovoiman suuruudessa, kun ne kulkevat tarkasteltavan paikan yli. Mitä suurempi massa tiettyyn paikkaan on kerääntynyt, sitä suurempi on satelliitteihin kohdistuva gravitaatiovoima kyseisen paikan yläpuolella, ja vastaavasti mitä pienempi massa kyseiseen paikkaan on kerääntynyt, sitä pienempi on satelliitteihin kohdistuva gravitaatiovoima kyseisen paikan alapuolella.

Kun satelliittiin kohdistuva gravitaatiovoima kasvaa hetkellisesti, **satelliitti siirtyy gravitaatiovoiman vaikutuksesta hieman lähemmäksi maapalloa, jolloin satelliitin potentiaalienergia pienenee ja mekaanisen energian säilymisen nojalla sen liike-energia kasvaa, ja sen ratanopeus kasvaa.** Vastaavasti kun satelliittiin kohdistuva gravitaatiovoima pienenee hetkellisesti, **gravitaatiovoima ei saa pidettyä satelliittia radallaan, ja satelliitti siirtyy hieman kauemmaksi maapallosta, jolloin satelliitin potentiaalienergia kasvaa ja vastaavasti liike-energia**

pienenee, ja sen ratanopeus pienenee. Tällä tavalla paikalliset muutokset satelliitteihin kohdistuvassa gravitaatiovoimassa muuttavat siis satelliittien ratanopeutta hieman suuremmaksi tai pienemmäksi. 2p (yht. 2p)

Satelliitteja tarvitaan kaksi, sillä tarkka ratanopeuden muutosten mittaaminen perustuu siihen, että satelliitit mittaavat niiden välistä etäisyyttä. Kun edellä kulkevan satelliitin ratanopeus muuttuu, satelliittien välinen etäisyyskin muuttuu, ja tämä havaitaan etäisyysmittauksen avulla. 2p (yht. 4p)

11.2. Aineiston 11.B kuvissa kunkin maanpinnan kohdan väri kuvastaa eroa kolmen vuoden keskiarvoon. Vuoristot ja maanpinnan muodot eivät muutu merkittävästi kolmen vuoden aikajänteellä, joten ne eivät aiheuta eroja kuukausittaisiin mittauksiin, eivätkä siten näy myöskään kuvissa. 3p (yht. 3p)

11.3. Aineiston mukaan satelliittien etäisyys maanpinnasta on $h = 500$ km. Käytetään liikeradan laskussa ekvaattorisädettä, sillä Amazon on varsin lähellä päiväntasaajaa.

$$\gamma = 6,67430 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

$$M = 5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$r = 500 \text{ km} + 6378,137 \text{ km} = 6878,137 \text{ km} = 6878137 \text{ m}$$

Muodostetaan Newtonin 2. lain ja Newtonin gravitaatiolain mukainen satelliitin liikeyhtälö ja ratkaistaan satelliitin putoamiskiihtyvyys.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{G} = m\vec{a}$$

$$G = ma$$

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = ma$$

$$a = \gamma \frac{M}{r^2} \quad \text{2p (yht. 2p)}$$

$$a = 8,425694 \dots \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Aineiston mukaan GRACE-järjestelmä pystyy havaitsemaan muutoksen, joka vastaa halkaisijaltaan 300 km ja syvyydeltään $x = 1$ cm paksuisen vesikiekon aiheuttamaa painovoimaa.

$$r_v = \frac{300 \text{ km}}{2} = 150 \text{ km} = 150000 \text{ m}$$

$$x = 1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m}$$

$$\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Vesikiekon massa on

$$\begin{aligned} m_v &= \rho V \\ &= \rho Ax \\ &= \rho \pi r_v^2 x \quad \text{2p (yht. 4p)} \\ &= 7,06858 \dots \cdot 10^{11} \text{ kg} \end{aligned}$$

Approksimoidaan, että tämän vesikiekon massa on noin satelliitin radan korkeuden h etäisyydellä satelliitista. Ratkaistaan Newtonin toisen lain ja Newtonin gravitaatiolain avulla vesikiekon aiheuttama putoamiskiihtyvyys.

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ \vec{G}_v &= m\vec{a}_v \\ G_v &= ma_v \\ \gamma \frac{mm_v}{h^2} &= ma_v \\ a_v &= \gamma \frac{m_v}{h^2} \quad \text{2p (yht. 6p)} \\ a_v &= 1,887113 \cdot 10^{-10} \dots \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Lasketaan suhteellinen muutos.

$$\begin{aligned} \frac{a_v}{a} &= 2,239713 \dots \cdot 10^{-11} \\ &= 2,239713 \dots \cdot 10^{-9} \% \\ &\approx 2 \cdot 10^{-9} \% \end{aligned}$$

Vastaus: GRACE-järjestelmä pystyy havaitsemaan $2 \cdot 10^{-9}$ prosentin suhteellisen muutoksen painovoimassa. 2p (yht. 8p)

Huomaa! Myös pyöristys kahden merkitsevän numeron tarkkuuteen hyväksytään. Suhteellisen muutoksen voi ilmoittaa prosentteina tai paljaana lukuna $2 \cdot 10^{-11}$.

Huomaa! Jos laskelmassa vertaa vesimassan aiheuttamaa putoamiskiihtyvyyttä arvoon $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ (putoamiskiihtyvyys maanpinnalla), saatu suhteellinen muutos poikkeaa merkittävästi yllä lasketusta, sillä putoamiskiihtyvyys 500 km korkeudella poikkeaa noin 14% putoamiskiihtyvyydestä maanpinnalla. Näin oli kuitenkin tehty YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 16.9.2021), joten voi olla, että tällainenkin ratkaisu hyväksytään.

- 11.4. Gravitaatiokentän mittauksella saadaan tietoa maapallon massajakaumasta ja sen muutoksista, kuten muutoksista pohjavesivarastoissa, jäätiköissä sekä valtameren vesimäärissä. 3p (yht. 3p) Näitä on vaikea mitata muilla tavoilla, koska esimerkiksi maanalaiset vesivarastot ovat näkymättömissä ja laajalla alueella olevia vesi- ja jäämassoja on vaikea mitata niiden koon vuoksi. 2p (yht. 5p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!