Yo-mallivastaukset

Kevät 2021
Pitkä matematiikka

Tiesitkö tämän?

Mafylaiset veivät vuoden 2020 haussa

81%

kaikista lääkiksen pääsykoekiintiön paikoista.

60%

Pk-seudun lukioista käyttää **Mafynettiä.**

Mallivastausten tekijät:

Malliratkaisujen laatimisesta ovat vastanneet MAFY:n toinen perustaja Antti Suominen sekä MAFY:n oppimateriaalitiimi, jonka päätehtävä on laatia ja kehittää MAFY:n lukioon tarkoitettuja oppimateriaaleja.

Oppimateriaalitiimistä mukana olivat Antti Suomisen lisäksi Jori Suominen, Sampsa Kurvinen, Timo Kalinainen ja Sakke Suomalainen. Lisäksi työn tukena olivat Tuomas Hauvala ja Matti Virolainen.

Mafy oppimateriaalit

Olemme Helsingissä, Tampereella, Turussa ja Jyväskylässä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys.

Palveluitamme ovat:

- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali
- Lääketieteellisen valmennuskurssit
- Kauppatieteellisen valmennusmateriaalit
- DI-valmennuskurssit
- Yo-kokeisiin valmentavat kurssit

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Käyttöehdot

MAFY Oy:n yhteystiedot:

https://mafy.fi/yhteydenotto

Koetehtävät

Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.

Linkit malliratkaisuihin

Malliratkaisut päivitetty 7. huhtikuuta 2021 klo. 16:28.

1. Lukujonoja ja funktioita (12 p.)

Oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

1.1. Lukujono $(1, 2, 4, 7, \ldots)$ (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: ”voi olla aritmeettinen”, ”voi olla geometrinen”, ”voi olla sekä aritmeettinen että geometrinen”, ”ei voi olla aritmeettinen eikä geometrinen”.

1.2. Lukujono $(32, 16, 8, 4, \ldots)$ (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: ”voi olla aritmeettinen”, ”voi olla geometrinen”, ”voi olla sekä aritmeettinen että geometrinen”, ”ei voi olla aritmeettinen eikä geometrinen”.

1.3. Lukujono $(7, 9, 11, 13, \ldots)$ (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: ”voi olla aritmeettinen”, ”voi olla geometrinen”, ”voi olla sekä aritmeettinen että geometrinen”, ”ei voi olla aritmeettinen eikä geometrinen”.

1.4. Olkoon $f(x) = (2 - x)^2$. Silloin funktion arvo $f(-1)$ on (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

1.5. Olkoon $f(x) = 2x^2 - x$. Silloin funktion derivaatan arvo $f'(1)$ on (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

1.6. Funktion derivaatan arvo kertoo (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: ”funktion arvon”, ”funktion suurimman arvon”, ”funktion maksimikohdan”, ”funktion kuvaajan tangentin kulmakertoimen”, ”funktion kuvaajan ja x-akselin välisen alueen pinta-alan”.

Ratkaisu.

1.1. **Vastaus:** Lukujono $(1,\ 2,\ 4,\ 7, \ldots)$ ei voi olla aritmeettinen eikä geometrinen.
2p (yht. 2p)

Miten vastaukseen päädyttiin:

Aritmeettisessa lukujonossa peräkkäisten jäsenten erotus on vakio. Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotuksia.

$$a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$

$$a_3 - a_2 = 4 - 2 = 2 \neq 1$$

Peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio, joten lukujono ei voi olla aritmeettinen.

Geometrisessa lukujonossa peräkkäisten jäsenten suhde on vakio. Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteita.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{7}{4} = 1{,}75 \neq 2$$

Peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio, joten lukujono ei voi olla geometrinen.

1.2. **Vastaus:** Lukujono $(32,\ 16,\ 8,\ 4, \ldots)$ voi olla geometrinen. 2p (yht. 2p)

Miten vastaukseen päädyttiin:

Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotuksia.

$$a_2 - a_1 = 16 - 32 = -16$$

$$a_3 - a_2 = 8 - 16 = -8 \neq -16$$

Peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio, joten lukujono ei voi olla aritmeettinen.

Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteita.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Peräkkäisten jäsenten suhde on ainakin neljän ensimmäisen jäsenen tapauksessa vakio, joten lukujono voi olla geometrinen.

1.3. **Vastaus:** Lukujono $(7,\ 9,\ 11,\ 13, \ldots)$ voi olla aritmeettinen. 2p (yht. 2p)

Miten vastaukseen päädyttiin:

Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotuksia.

$$a_2 - a_1 = 9 - 7 = 2$$

$$a_3 - a_2 = 11 - 9 = 2$$

$$a_4 - a_3 = 13 - 11 = 2$$

Peräkkäisten jäsenten erotus on ainakin neljän ensimmäisen jäsenen tapauksessa vakio, joten lukujono voi olla aritmeettinen.

Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteita.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{9}{7} = 1{,}285\ldots$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{11}{9} = 1{,}222\ldots \neq 1{,}285\ldots$$

Peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio, joten lukujono ei voi olla geometrinen.

1.4. **Vastaus:** 9 2p (yht. 2p)

Miten vastaukseen päädyttiin:

Lasketaan $f(-1)$.

$$f(-1) = (2 - (-1))^2 = (2+1)^2 = 3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

1.5. **Vastaus:** 3 2p (yht. 2p)

Miten vastaukseen päädyttiin:

Derivoidaan funktion f lauseke.

$$f'(x) = 2 \cdot 2x^{2-1} - 1 = 4x - 1$$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = 1$.

$$f'(1) = 4 \cdot 1 - 1 = 3$$

1.6. **Vastaus:** Funktion derivaatan arvo kertoo funktion kuvaajan tangentin kulmakertoimen. 2p (yht. 2p)

Miten vastaukseen päädyttiin:

Funktion f derivaatta kohdassa x on funktion arvon hetkellinen muutosnopeus kohdassa x. Hetkellinen muutosnopeus on samalla funktion f kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin.

Väite "Funktion derivaatan arvosta voidaan päätellä funktion maksimikohta"on monitulkintainen. Väitteen voidaan ajatella tarkoittavan esimerkiksi seuraavia asioita:

1) Jos tiedetään funktion derivaatan arvo yhdessä kohdassa, voidaan päätellä, onko tämä kohta funktion maksimikohta.
2) Jos tiedetään funktion derivaatan arvo kaikissa kohdissa, joissa funktio on derivoituva, tiedetään funktion kaikki maksimikohdat.
3) Jos tiedetään että funktio on derivoituva koko määrittelyjoukossaan ja tiedetään funktion derivaatan arvo jokaisessa määrittelyjoukon kohdassa, tiedetään funktion kaikki maksimikohdat.

Kun käytetään tulkintaa 1), väite on epätosi. Derivaatan nollakohta voi olla maksimikohta, mutta ei kuitenkaan aina ole sitä. Esimerkiksi jos funktion derivaatta ei vaihda merkkiään derivaatan nollakohdassa, derivaatan nollakohta ei ole maksimikohta.

Kun käytetään tulkintaa 2), väite on epätosi. Funktion maksimikohta voi nimittäin olla kohta, jossa funktio ei ole derivoituva. Esimerkki funktiosta, joka ei ole maksimikohdassaan (eikä missään muussakaan kohdassa) derivoituva:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ kun } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Kun käytetään tulkintaa 3), väite on tosi, kunhan toispuoleista derivoi-tuvuutta ei pidetä derivoituvuutena. Ilmeisesti väitettä ei kuitenkaan ole tarkoitettu tulkittavaksi näin, koska vain vastausvaihtoehdosta "Funktion derivaatan arvo kertoo funktion kuvaajan tangentin kulma-kertoimen"saa täydet pisteet.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

2. Vektoreita ja analyyttistä geometriaa (12 p.)

Olkoon $\bar{u} = 5\bar{i} + 12\bar{j}$.

1. Määritä vektorin $\bar{u}$ pituus. (3 p.)
2. Määritä vektorin $\bar{u}$ kanssa vastakkaissuuntainen vektori, jonka pituus on 5. (3 p.)
3. Suora L kulkee pisteiden $A = (4, 4)$ ja $B = (-1, -8)$ kautta. Ovatko suora L ja vektori $\bar{u}$ yhdensuuntaisia (3 p.)
4. Määritä suoran L yhtälö muodossa $y = kx + b$. (3 p.)

Ratkaisu.

2.1. Vektorin $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j}$ pituus on $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.
Vektorin $\bar{u}$ pituus on

$$|\bar{u}| = \sqrt{5^2 + 12^2} \quad \text{2p (yht. 2p)}$$

$$|\bar{u}| = \sqrt{25 + 144}$$

$$|\bar{u}| = \sqrt{169}$$

$$|\bar{u}| = \sqrt{13^2}$$

$$|\bar{u}| = 13. \quad \text{1p (yht. 3p)}$$

Vastaus: 13

2.2. Olkoon kysytty vektori $\bar{v}$.
Määritetään ensin vektorin $\bar{u}$ kanssa samansuuntainen yksikkövektori $\bar{u}^0$.
Vektorin $\bar{u}$ kanssa samansuuntainen yksikkövektori saadaan yhtälöstä $\bar{u}^0 = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$.
Tehtävän kohdasta 1 saadaan vektorin $\bar{u}$ pituus $|\bar{u}| = 13$.
Vektorin $\bar{u}$ kanssa samansuuntainen yksikkövektori on

$$\bar{u}^0 = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$$

$$\bar{u}^0 = \frac{5\bar{i} + 12\bar{j}}{13}$$

$$\bar{u}^0 = \frac{5}{13}\bar{i} + \frac{12}{13}\bar{j}. \quad \text{1p (yht. 1p)}$$

Vektorin $\bar{u}$ kanssa samansuuntainen vektori, jonka pituus on 5, on siis $5\bar{u}^0$. Vektorin $5\bar{u}^0$ vastavektori on tällöin $-5\bar{u}^0$.

Vektorin $\bar{u}$ kanssa vastakkaissuuntainen vektori $\bar{v}$, jonka pituus on 5, on tällöin

$$\bar{v} = -5\bar{u}^0 \quad \text{1p (yht. 2p)}$$

$$\bar{v} = -5\left(\frac{5}{13}\bar{i} + \frac{12}{13}\bar{j}\right)$$

$$\bar{v} = -5 \cdot \frac{5}{13}\bar{i} - 5 \cdot \frac{12}{13}\bar{j}$$

$$\bar{v} = -\frac{25}{13}\bar{i} - \frac{60}{13}\bar{j}. \quad \text{1p (yht. 3p)}$$

Vastaus: $\bar{v} = -\frac{25}{13}\bar{i} - \frac{60}{13}\bar{j}$

2.3. Koska pisteet A ja B ovat suoralla L, niin suoran L suuntavektori on $\overline{AB}$.
Määritetään suoran L suuntavektori $\overline{AB}$.
Nyt $A = (4, 4) = (x_1.y_1)$ ja $B = (-1, -8) = (x_2, y_2)$.
Pisteiden A ja B välinen vektori on

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j}$$

$$\overline{AB} = (-1 - 4)\bar{i} + (-8 - 4)\bar{j}$$

$$\overline{AB} = -5\bar{i} - 12\bar{j}. \quad \text{1p (yht. 1p)}$$

Suora L ja vektori $\bar{u}$ ovat yhdensuuntaisia täsmälleen silloin, kun $\bar{u} = t\overline{AB}$, $t \neq 0$.
Tutkitaan, toteutuuko yhtälö $\bar{u} = t\overline{AB}$ jollakin luvulla $t \neq 0$.

$$\bar{u} = t\overline{AB}$$

$$5\bar{i} + 12\bar{j} = t(-5\bar{i} - 12\bar{j})$$

$$5\bar{i} + 12\bar{j} = -5t\bar{i} - 12t\bar{j} \quad \text{1p (yht. 2p)}$$

Koska vektoreiden komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari:

$$\begin{cases} 5 = -5t & (1) \\ 12 = -12t & (2) \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöparin molemmista yhtälöistä luku t.
Yhtälöstä (1) saadaan

$$\begin{aligned} 5 &= -5t \quad \| : (-5) \\ \frac{\cancel{5}}{-\cancel{5}} &= \frac{\cancel{5}t}{-\cancel{5}} \\ -1 &= t \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Yhtälöstä (2) saadaan

$$\begin{aligned} 12 &= -12t \quad \| : (-12) \\ \frac{\cancel{12}}{-\cancel{12}} &= \frac{\cancel{12}t}{-\cancel{12}} \\ -1 &= t \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Molemmista yhtälöistä saatiin sama ratkaisu $t = -1$. Ratkaisu on tällöin yksikäsitteinen. Koska ratkaisu $t = -1$ on yksikäsitteinen, niin $\bar{u} = -\overline{AB}$ ja vektorit $\bar{u}$ ja $\overline{AB}$ ovat yhdensuuntaiset. Siis suora L ja vektori $\bar{u}$ ovat yhdensuuntaiset.
1p (yht. 3p)

Vastaus: Suora L ja vektori $\bar{u}$ ovat yhdensuuntaiset.

2.4.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Suora L kulkee pisteiden $A = (4, 4)$ ja $B = (-1, -8)$ kautta.
Kahden pisteen kautta kulkevan suoran yhtälö saadaan yhtälöstä

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad \text{jossa } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Nyt $A = (4, 4) = (x_1, y_1)$ ja $B = (-1, -8) = (x_2, y_2)$

Suoran kulmakerroin

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$k = \frac{-8 - 4}{-1 - 4}$$

$$k = \frac{\cancel{-}12}{\cancel{-}5}$$

$$k = \frac{12}{5}.$$ 1p (yht. 1p)

Valitaan suoralta piste $A = (4, 4) = (x_0, y_0)$.
Suoran L yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 4 = \frac{12}{5}(x - 4)$$ 1p (yht. 2p)

$$y - 4 = \frac{12}{5}x - \frac{12 \cdot 4}{5} \quad \| + 4$$

$$y - 4 + 4 = \frac{12}{5}x - \frac{48}{5} + 4$$

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{48}{5} + \frac{20}{5}$$

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{28}{5}$$ 1p (yht. 3p)

Vastaus: $y = \frac{12}{5}x - \frac{28}{5}$

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Ratkaistaan suoran L yhtälö suoran suuntavektorin avulla.
Suoran $ax + by + c = 0$ suuntavektori on $\bar{s} = b\bar{i} - a\bar{j}$.
Tehtävän kohdassa 3 määritettiin suoralle L suuntavektori $\overline{AB} = -5\bar{i} - 12\bar{j}$, joten suora L on muotoa $12x - 5y + c = 0$. Ratkaistaan vakio c sijoittamalla

suoran piste $A = (4, 4)$ yhtälöön $12x - 5y + c = 0$.

$$12x - 5y + c = 0 \quad \| \, x = 4, \; y = 4$$

$$12 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = 0 \quad \text{1p (yht. 1p)}$$

$$48 - 20 + c = 0$$

$$28 + c = 0 \quad \| - 28$$

$$c = -28 \quad \text{1p (yht. 2p)}$$

Suoran L yhtälö on siis

$$12x - 5y - 28 = 0 \quad \| + 5y$$

$$12x - 5y - 28 + 5y = 5y$$

$$12x - 28 = 5y \quad \| : 5$$

$$\frac{12}{5}x - \frac{28}{5} = \frac{\cancel{5}y}{\cancel{5}}$$

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{28}{5}. \quad \text{1p (yht. 3p)}$$

Vastaus: $y = \frac{12}{5}x - \frac{28}{5}$

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

3. Murtolausekkeen integraali (12 p.)

Jokaisesta osatehtävästä voi saada 4 pistettä.

1. Osoita, että yhtälö
$$\frac{4}{4-x^2} = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}$$
on voimassa kaikilla $x \neq \pm 2$.

2. Laske integraali
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2+x}\,dx.$$

3. Laske integraali
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{4-x^2}\,dx.$$

Ratkaisu.

3.1. Yhtälön
$$\frac{4}{4-x^2} = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}$$
vasen puoli on määritelty, kun $4 - x^2 \neq 0$. Ratkaistaan nimittäjän $4 - x^2$ nollakohdat.

$$\begin{aligned} 4 - x^2 &= 0 && \| + x^2 \\ 4 - x^2 + x^2 &= x^2 \\ 4 &= x^2 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm\sqrt{4} \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Yhtälön vasen puoli on siis määritelty, kun $x \neq \pm 2$. 1p (yht. 1p)

Vasemman puolen määrittelyehto = 1p

Yhtälön oikea puoli on määritelty, kun $2+x \neq 0$ ja $2-x \neq 0$. Ratkaistaan nimittäjän $2+x$ nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
2+x &= 0 \qquad \| -2 \\
2+x-2 &= -2 \\
x &= -2
\end{aligned}
$$

Ratkaistaan nimittäjän $2-x$ nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
2-x &= 0 \qquad \| +x \\
2-x+x &= x \\
2 &= x \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Yhtälön oikea puoli on siis määritelty, kun $x \neq \pm 2$. 1p (yht. 2p)

Oikean puolen määrittelyehto = 1p

Sievennetään yhtälön oikea puoli laventamalla murtolausekkeet samannimisiksi ja yhdistämällä osoittajat.

$$
{}^{2-x)}\frac{1}{2+x} + {}^{2+x)}\frac{1}{2-x} = \frac{2-x}{(2-x)(2+x)} + \frac{2+x}{(2+x)(2-x)}
$$ 1p (yht. 3p)

Oikean puolen lausekkeet lavennettu oikein = 1 p

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2-x}{2^2-x^2} + \frac{2+x}{2^2-x^2} \\
&= \frac{2-x}{4-x^2} + \frac{2+x}{4-x^2} \\
&= \frac{(2-x)+(2+x)}{4-x^2} \\
&= \frac{2-x+2+x}{4-x^2} \\
&= \frac{2+2-x+x}{4-x^2} \\
&= \frac{4}{4-x^2}
\end{aligned}
$$ 1p (yht. 4p)

Tulos on sama kuin yhtälön

$$\frac{4}{4-x^2} = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}$$

vasen puoli, joten yhtälö on voimassa kaikilla $x \neq \pm 2$.

3.2. Osoittajassa on nimittäjän derivaatta, joten käytetään integrointikaavaa

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C.$$

Tässä on $f(x) = 2 + x$ ja $f'(x) = 1$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2+x}\,\mathrm{d}x = \Big/_{-1}^{1} \ln|2+x| \quad \boxed{\text{2p (yht. 2p)}}$$

$$= \ln|2+1| - \ln|2+(-1)|$$

$$= \ln|3| - \ln|2-1|$$

$$= \ln|3| - \ln|1|$$

$$= \ln 3 - \ln 1 \quad \boxed{\text{1p (yht. 3p)}}$$

$$= \ln 3 - 0$$

$$= \ln 3 \quad \boxed{\text{1p (yht. 4p)}}$$

Vastaus: $\ln 3$

3.3.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}\right)\mathrm{d}x$$ 1p (yht. 1p)

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2+x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2-x}\,\mathrm{d}x$$

Symmetrian nojalla jälkimmäisen integraalin arvo on sama kuin ensimmäisen integraalin arvo. 1p (yht. 2p) Näin ollen

$$= 2 \cdot \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2+x}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \ln 3$$ 1p (yht. 3p)

$$= \frac{1}{2}\ln 3$$ 1p (yht. 4p)

Vastaus: $\frac{1}{2}\ln 3$

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}\right)\mathrm{d}x$$ 1p (yht. 1p)

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2+x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2-x}\,\mathrm{d}x$$

Edellisen integraalin arvo laskettiin jo kohdassa 3.2. Lasketaan jälkimmäisen integraalin arvo.

Muokataan lauseketta niin, että osoittajaan saadaan nimittäjän derivaatta ja käytetään integrointikaavaa

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C.$$

Tässä on $f(x) = 2 - x$ ja $f'(x) = -1$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2-x}\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{1} \frac{-1}{2-x}\,\mathrm{d}x$$ 1p (yht. 2p)

$$= -\Big/_{-1}^{1} \ln|2-x|$$

$$= -\left(\ln|2-1| - \ln|2-(-1)|\right)$$

$$= -\left(\ln|1| - \ln|2+1|\right)$$

$$= -\left(\ln|1| - \ln|3|\right)$$

$$= -\left(\ln 1 - \ln 3\right)$$

$$= -\left(0 - \ln 3\right)$$

$$= \ln 3$$

Siis

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2+x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{1}{4}\ln 3 \quad \boxed{\text{1p (yht. 3p)}}$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)\ln 3$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3 \quad \boxed{\text{1p (yht. 4p)}}$$

$$= \frac{\ln 3}{2}$$

Vastaus: $\frac{1}{2}\ln 3$

Vastaus voidaan antaa myös muodossa $\ln\left(\sqrt{3}\right)$, sillä

$$\ln\left(\sqrt{3}\right) = \ln\left(3^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(3).$$

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

4. Peräaalto (12 p.)

Aineisto:

4. A Kuva: Funktion kuvaaja

1. Osoita, että funktion
$$f(x) = \frac{\tan x}{2 + \tan^2 x}$$
suurin arvo M välillä $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ on $M = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}3536$. Funktion kuvaaja on esitetty kuvassa 4.A. (9 p.)

2. Veden pinnalla vakionopeudella liikkuvan kappaleen (kuten veneen tai sorsan) taakse muodostuu V-kirjaimen muotoinen peräaalto, jonka avautumiskulma ei tietyillä oletuksilla riipu kappaleen nopeudesta. Kelvinin aaltoteorian mukaan tälle kulmalle α on voimassa yhtälö
$$\tan \frac{\alpha}{2} = M,$$
jossa M on kohdassa 1 laskettu arvo. Määritä kulman $\alpha \in [0°, 180°]$ likiarvo asteen tarkkuudella. (3 p.)

Ratkaisu.

4.1.

$$f(x) = \frac{\tan(x)}{2 + \tan^2(x)}.$$

Funktion suurin arvo löytyy aineiston kuvaajan perusteella tarkasteluvälillä derivaatan nollakohdasta. 1p (yht. 1p) Derivoidaan funktio f. Merkitään $g(x) = \tan(x)$ ja $h(x) = 2 + \tan^2(x)$.

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Käytetään derivoinnissa osamäärän derivaatan kaavaa

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}.$$

Tangentin derivaatan kaavalla saadaan

$$g'(x) = 1 + \tan^2(x).$$

Merkitään $a(x) = x^2$. Funktio $h(x) = 2 + g(x)^2 = 2 + a(g(x))$. Yhdistetyn funktion derivaatan kaavalla saadaan siis

$$h'(x) = a'(g(x))g'(x) = 2g(x)g'(x) = 2\tan(x)(1 + \tan^2(x)).$$

Derivaatan lauseke on siis

$$f'(x) = \frac{(1 + \tan^2(x))(2 + \tan^2(x)) - \tan(x) \cdot 2\tan(x)(1 + \tan^2(x))}{(2 + \tan^2(x))^2}$$ 3p (yht. 4p)

$$f'(x) = \frac{(1 + \tan^2(x))(2 + \tan^2(x)) - (1 + \tan^2(x))2\tan^2(x)}{(2 + \tan^2(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1 + \tan^2(x))(2 + \tan^2(x) - 2\tan^2(x))}{(2 + \tan^2(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1 + \tan^2(x))(2 - \tan^2(x))}{(2 + \tan^2(x))^2}$$ 1p (yht. 5p)

Nimittäjä $(2 + \tan^2(x))^2$ sekä osoittajan tekijä $1 + \tan^2(x)$ ovat positiivisia kaikilla x, joten derivaatta on nolla täsmälleen silloin, kun

$$2 - \tan^2(x) = 0$$ 1p (yht. 6p)

$$\tan^2(x) = 2$$

$$\tan(x) = \pm\sqrt{2}$$ 1p (yht. 7p)

Tehtävässä tarkastellaan vain väliä $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, jolla $\tan(x) > 0$, joten ainoastaan se nollakohta, missä $\tan(x) = \sqrt{2}$, on tarkasteluvälillä. 1p (yht. 8p) Lasketaan funktion arvo derivaatan nollakohdassa, eli funktion suurin arvo.

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}3536.$$ 1p (yht. 9p)

4.2.

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = M$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \boxed{\text{1p (yht. 1p)}}$$

Kulman $\alpha/2$ voi laskea esimerkiksi Speedcrunch-ohjelmalla komennolla degrees(arctan(sqrt(2)/4)).

$$\frac{\alpha}{2} = 19{,}471\ldots^\circ \quad \boxed{\text{1p (yht. 2p)}} \quad \| \cdot 2$$

$$\alpha = 2 \cdot 19{,}471\ldots^\circ$$

$$\alpha = 38{,}942\ldots^\circ$$

$$\alpha \approx 39^\circ \quad \boxed{\text{1p (yht. 3p)}}$$

Vastaus: Kulma $\alpha = 39°$.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

5. Rantatontti (12 p.)

Matti omistaa järven rannalla suorakulmaisen kolmion muotoisen metsäpalstan, jonka kateettien pituudet ovat $150\,\mathrm{m}$ ja $120\,\mathrm{m}$. Pidempi kateetti on suoralla rantaviivalla. Matti myy palstastaan Marjalle pinta-alaltaan mahdollisimman suuren suorakulmion muotoisen rantatontin, jonka kaksi sivua ovat metsäpalstan kateeteilla. Mitkä ovat Marjan ostaman rantatontin sivujen pituudet?

Ratkaisu.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Piirretään tilanteesta mallikuva. Asetetaan suorakulmainen kolmio koordinaatistoon niin, että kolmion kärkipisteet ovat pisteissä $(150, 0)$, $(0, 0)$ ja $(0, 120)$. Merkitään suorakulmion rannan suuntaisen sivun pituutta kirjaimella x ja rantaa vastaan kohtisuorassa olevan sivun pituutta kirjaimella y. 1p (yht. 1p) Myytävän suorakulmion muotoisen rantatontin kärkipisteet ovat tällöin $(0, y)$, $(0, 0)$, $(x, 0)$ ja (x, y).

Myytävän suorakulmion muotoisen rantatontin sivujen pituudet ovat tällöin x ja y. Tontin pinta-ala on tällöin $A = xy$.

Muodostetaan seuraavaksi suoran yhtälö, jolla myytävän suorakulmion muotoisen rantatontin kärkipiste (x, y) sijaitsee. Kahden pisteen kautta kulkevan suoran yhtälö on $y - y_0 = k(x - x_0)$, jossa $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Suora kulkee pisteiden $(0, 120)$ ja $(150, 0)$ kautta, joten suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{0 - 120}{150 - 0}$$

$$k = -\frac{120}{150}$$

$$k = -\frac{4}{5}$$

Valitaan suoran piste $(0, 120) = (x_0, y_0)$. Suoran yhtälö on siis

$$y - 120 = -\frac{4}{5}(x - 0)$$

$$y - 120 = -\frac{4}{5}x \qquad \| + 120$$

$$y - 120 + 120 = -\frac{4}{5}x + 120$$

$$y = -\frac{4}{5}x + 120.$$ 1p (yht. 2p)

Muodostetaan seuraavaksi myytävän tontin pinta-alan lauseke.

$$A = xy$$ 1p (yht. 3p)

$$A = x \cdot \left(-\frac{4}{5}x + 120\right)$$

$$A = -\frac{4}{5}x^2 + 120x$$ 1p (yht. 4p)

Tontin sivujen pituuksien on oltava ei-negatiivisia, joten $x \geq 0$ ja $y \geq 0$. 1p (yht. 5p) Selvitetään tämän avulla määrittelyjoukko funktiolle A.

$$y \geq 0$$

$$-\frac{4}{5}x + 120 \geq 0$$ 1p (yht. 6p)

Laskinohjelman avulla saadaan epäyhtälölle ratkaisuksi $x \leq 150$. Kun huomioidaan $x \geq 0$ saadaan määrittelyjoukoksi $0 \leq x \leq 150$. 1p (yht. 7p)

Myytävän tontin pinta-alaa kuvaa funktio $A(x) = -\frac{4}{5}x^2 + 120x$, jossa $x \in [0, 150]$. Funktio A saa suurimman arvonsa joko välin päätepisteissä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

Laskinohjelman avulla saadaan funktiolle A derivaattafunktio

$$A'(x) = -\frac{8}{5}x + 120.$$ 1p (yht. 8p)

Laskinohjelman avulla saadaan derivaattafunktion A' nollakohta $x = 75$. Derivaatan nollakohta $x = 75$ kuuluu määrittelyvälille. Lasketaan seuraavaksi funktion A arvo välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

Laskinohjelmalla saadaan $A(0) = 0,\ A(75) = 4500$ ja $A(150) = 0$, 1p (yht. 9p) joista $A(75)$ on suurin. 1p (yht. 10p)

Myytävälle tontille saadaan suurin mahdollinen pinta-ala, kun $x = 75$ ja

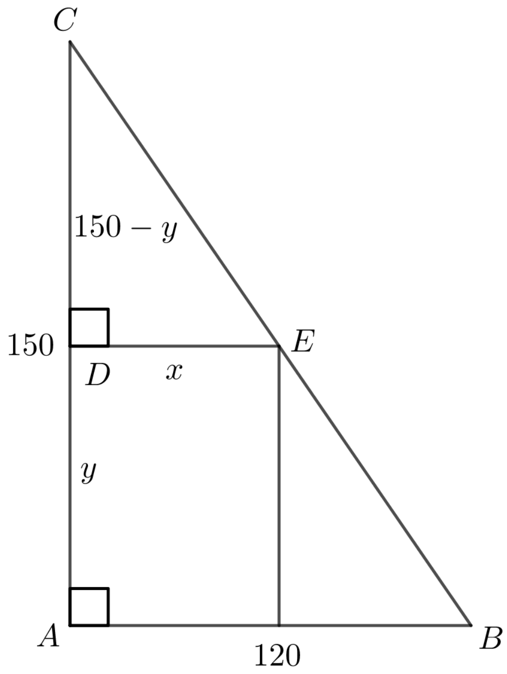
$$y = -\frac{4}{5}x + 120 = -\frac{4}{5} \cdot 75 + 120 = 60.$$

Marjan ostaman rantatontin sivujen pituudet ovat $60\,\mathrm{m}$ ja $75\,\mathrm{m}$.

Vastaus: Rannan suuntainen sivu on $75\,\mathrm{m}$ ja rantaa vastaan kohtisuorassa oleva sivu on $60\,\mathrm{m}$. 1p+1p (yht. 12p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Merkitään suorakulmion muotoisen tontin sivujen pituuksia kirjaimilla x ja y niin, että y on rantaviivan suuntainen sivu ja x on rantaviivaa vastaan kohtisuorassa oleva sivu. 1p (yht. 1p)



Koska suorakulmion sivut ovat kolmion kateeteilla, on $0 \leq x \leq 120$ ja $0 \leq y \leq 150$.

Kolmioissa CDE ja CAB on yhteinen kulma C ja suora kulma, joten ne ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoisia. 1p (yht. 2p)

Yhdenmuotoisuuden perusteella saadaan seuraava yhtälö:

$$\frac{150 - y}{150} = \frac{x}{120}$$ 1p (yht. 3p)

Kun yhtälöstä ratkaistaan laskinohjelmalla x, saadaan

$$x = -\frac{4}{5}y + 120$$ 1p (yht. 4p)

Suorakulmion pinta-ala on

$$A = xy.$$

Kun pinta-ala esitetään muuttujan y funktiona, pinta-ala on

$$A(y) = \left(-\frac{4}{5}y + 120\right)y,$$ 1p (yht. 5p)

jossa $0 \leq y \leq 150$. 1p (yht. 6p)

Derivoidaan pinta-alafunktio laskinohjelmalla.

$$A'(y) = \frac{1}{5}(-8y + 600)$$ 2p (yht. 8p)

Ratkaistaan derivaatan nollakohta yhtälöstä $A'(y) = 0$ laskinohjelmalla. Derivaatan nollakohdaksi saadaan $y = 75$. 1p (yht. 9p)

Suljetulla välillä derivoituva funktio saa suurimman arvonsa kyseisellä välillä välin päätepisteissä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Lasketaan pinta-alafunktion arvot näissä kohdissa laskinohjelmalla.

$$\begin{aligned} A(0) &= 0 \\ A(75) &= 4500 \\ A(150) &= 0. \end{aligned}$$

Näistä suurin on $A(75)$, joten pinta-ala on suurin, kun $y = 75$. 1p (yht. 10p)

Tällöin

$$x = -\frac{4}{5} \cdot 75 + 120 = 60.$$

Vastaus: Rannan suuntainen sivu on $75\,\mathrm{m}$ ja rantaa vastaan kohtisuorassa oleva sivu on $60\,\mathrm{m}$. 1p+1p (yht. 12p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

6. Kellarimestarin suunnitelma (12 p.)

Eräitä juomia ja maustekastikkeita kypsytetään puisissa astioissa, jolloin niihin liukenee astian seinämästä makuaineita. Kellarimestarilla on teoria, jonka mukaan säilytysaikana nesteeseen liukenevien makuaineiden määrä on suoraan verrannollinen säilytysastian pinta-alan ja tilavuuden osamäärään. Kellarimestari suunnittelee kypsyttävänsä erän tuotetta astioissa, jotka ovat tavallisten kanssa yhdenmuotoisia, mutta joiden tilavuus on vain neljäsosa tavallisesta. Astian materiaali ja kypsytysaika ovat samat kuin tavallisesti.

Kuinka monta prosenttia enemmän makuaineita tällöin liukenee tuotteeseen kellarimestarin teorian mukaan?

Ratkaisu.

Merkitään tavallisen astian pinta-alaa kirjaimella A_1 ja tilavuutta kirjaimella V_1. 2p (yht. 2p)

Teorian mukaan nesteeseen liukenevien makuaineiden määrä on suoraan verrannollinen säilytysastian pinta-alan ja tilavuuden osamäärään, joten liukenevien makuaineiden määrä on tavallisessa astiassa

$$m_1 = a \cdot \frac{A_1}{V_1},$$ 1p (yht. 3p)

jossa a on vakio.

Uuden astian tilavuus on

$$V_2 = \frac{1}{4}V_1.$$ 1p (yht. 4p)

Tilavuuksien suhde on mittakaavan k kuutio. Ratkaistaan mittakaava k.

$$\frac{V_2}{V_1} = k^3 \quad \| V_2 = \frac{1}{4}V_1$$

$$\frac{\frac{1}{4}V_1}{V_1} = k^3$$

$$\frac{\frac{1}{4}\cancel{V_1}}{\cancel{V_1}} = k^3$$

$$\frac{1}{4} = k^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = k$$

$$k = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{4}}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$ 1p (yht. 5p)

Merkitään uuden astian pinta-alaa kirjaimella A_2.

Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan uuden astian pinta-ala A_2.

$$\frac{A_2}{A_1} = k^2 \quad \| k = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^2 \quad \| \cdot A_1 \quad (\neq 0)$$

$$\frac{A_2}{\cancel{A_1}} \cdot \cancel{A_1} = \frac{1^2}{\sqrt[3]{4}^2} \cdot A_1$$

$$A_2 = \frac{1^2}{\sqrt[3]{4}^2} \cdot A_1$$

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}^2} \cdot A_1$$ 1p (yht. 6p)

Merkitään liukenevien makuaineiden määrää uudessa astiassa kirjaimella m_2. Lasketaan liukenevien makuaineiden määrä uudessa astiassa.

$$m_2 = a \cdot \frac{A_2}{V_2} \quad \text{1p (yht. 7p)} \qquad \| A_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}^2} \cdot A_1, \quad V_2 = \frac{1}{4} V_1$$

$$m_2 = a \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{4}^2} \cdot A_1}{\frac{1}{4} V_1}$$

$$m_2 = a \cdot \frac{4A_1}{\sqrt[3]{4}^2 V_1}$$

$$m_2 = a \cdot \frac{\sqrt[3]{4}^3 \cdot A_1}{\sqrt[3]{4}^2 \cdot V_1}$$

$$m_2 = a\sqrt[3]{4} \cdot \frac{A_1}{V_1} \quad \text{1p (yht. 8p)}$$

Lasketaan, kuinka suuri liukenevien väriaineiden muutos on alkuperäiseen määrään verrattuna.

$$\begin{aligned}
\frac{m_2 - m_1}{m_1} &= \frac{a\sqrt[3]{4} \cdot \frac{A_1}{V_1} - a \cdot \frac{A_1}{V_1}}{a \cdot \frac{A_1}{V_1}} \quad \text{2p (yht. 10p)} \\
&= \frac{\cancel{a \cdot \frac{A_1}{V_1}} \cdot \left(\sqrt[3]{4} - 1\right)}{\cancel{a \cdot \frac{A_1}{V_1}}} \\
&= \sqrt[3]{4} - 1
\end{aligned}$$

Makuaineita liukenee uuteen astiaan

$$(\sqrt[3]{4} - 1) \cdot 100\% \quad \text{1p (yht. 11p)} \quad = 58{,}740\ldots\% \approx 59\% \quad \text{1p (yht. 12p)}$$

enemmän kuin vanhaan astiaan.

Vastaus: $(\sqrt[3]{4} - 1) \cdot 100\% \approx 59\%$ enemmän.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

7. Afrikan tähti (12 p.)

Aineisto:

7. A Kuva: Afrikan tähti

Liisa pelaa Afrikan tähti -peliä. Hän on löytänyt Afrikan tähden ja on palaamassa Kairoon voittaakseen pelin (aineisto 7.A). Hän on neljän askeleen päässä Kairosta. Kairoon saa pysähtyä, vaikka nopan silmäluku oikeuttaisi matkustamaan pidemmälle.

Jos hän heittää vähintään silmäluvun neljä, hän pääsee Kairoon ja voittaa pelin. Jos hän heittää silmäluvun kolme, hän voi olla varma, että seuraavalla heitolla hän pääsee Kairoon ja voittaa pelin. Liisa tarvitsee korkeintaan neljä heittoa päästäkseen Kairoon. Oletetaan, että kukaan muu ei voita peliä tätä ennen.

1. Millä todennäköisyydellä Liisa voittaa ensimmäisellä heitolla? (2 p.)
2. Millä todennäköisyydellä Liisa tarvitsee vähintään kolme heittoa päästäkseen Kairoon? (4 p.)
3. Laske niiden heittojen lukumäärän odotusarvo, jotka Liisa tarvitsee päästäkseen Kairoon. (6 p.)

Ratkaisu.

7.1. Merkitään

$$P(1) = \text{Todennäköisyys, että Liisa voittaa pelin yhdellä heitolla.}$$

Liisa voittaa pelin ensimmäisellä heitolla, jos hän heittää silmäluvun 4, 5 tai 6.
1p (yht. 1p)

Todennäköisyys on suotuisten alkeistapausten määrän ja kaikkien alkeistapausten määrän suhde, eli todennäköisyys voittaa ensimmäisellä heitolla on

$$\begin{aligned} P(1) &= \frac{\text{suotuisten lkm}}{\text{kaikkien lkm}} \\ &= \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vastaus: Liisa voittaa pelin ensimmäisellä heitolla todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$. 1p (yht. 2p)

Vastaus voidaan antaa myös muodossa $0{,}5$ tai $50\,\%$.

7.2.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Liisa tarvitsee vähintään kolme heittoa päästäkseen Kairoon, jos hän etenee kahdella ensimmäisellä heitolla korkeintaan kolme askelta. 1p (yht. 1p) Tämä voi tapahtua silmäluvuilla 1 ja 1; 1 ja 2 tai 2 ja 1. 1p (yht. 2p)

Kahdella nopanheitolla voidaan saada yhteensä $6 \cdot 6 = 36$ erilaista tulosta. 1p (yht. 3p) Todennäköisyys on siis

$$\begin{aligned} P(\text{vähintään } 3) &= \frac{\text{suotuisten lkm}}{\text{kaikkien lkm}} \\ &= \frac{3}{36} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$ 1p (yht. 4p)

Vastaus: Liisa tarvitsee pelin voittamiseen vähintään kolme heittoa todennäköisyydellä $\frac{1}{12}$.

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Merkitään

$P(3) =$ Todennäköisyys, että Liisa voittaa pelin kolmella heitolla.

$P(4) =$ Todennäköisyys, että Liisa voittaa pelin neljällä heitolla.

ja

$p(1) =$ Todennäköisyys, että yksittäisen nopanheiton silmäluku on 1.

$p(2) =$ Todennäköisyys, että yksittäisen nopanheiton silmäluku on 2.

jne.

Lasketaan todennäköisyydet tapahtumille “Liisa voittaa pelin neljällä heitolla.” ja “Liisa voittaa pelin kolmella heitolla.”.

Liisa voittaa pelin neljällä heitolla, jos hän heittää kolmella ensimmäisellä heitolla ykkösen. Neljännen nopanheiton tuloksella ei ole merkitystä. Todennäköisyys, että Liisa saa kolmella ensimmäisellä heitolla pelkästään ykkösiä on kertolaskusäännön nojalla

$$\begin{aligned} P(4) &= p(1) \cdot p(1) \cdot p(1) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{216} \end{aligned}$$ 1p (yht. 1p)

Liisa voi voittaa pelin kolmella heitolla kahdella tavalla. Jos hän heittää kahdella ensimmäisellä nopalla silmäluvut 1 ja 2 kummassa tahansa järjestyksessä, kolmannella heitolla hän voittaa millä tahansa silmäluvulla. Merkitään tätä todennäköisyyttä $P(3a)$:lla.

Toinen mahdollisuus on, että Liisa heittää kahdella ensimmäisellä nopalla ykköset ja kolmannella minkä tahansa muun luvun kuin ykkösen. Merkitään tätä todennäköisyyttä $P(3b)$:llä. Todennäköisyys $P(3)$ on näiden todennäköisyyksien summa.

$$
\begin{aligned}
P(3a) &= 2 \cdot p(1) \cdot p(2) \qquad * \\
&= 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{18} \\
P(3b) &= p(1) \cdot p(1) \cdot \overline{p(1)} \\
&= p(1) \cdot p(1) \cdot (1 - p(1)) \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \\
&= \frac{5}{216} \quad \boxed{\text{1p (yht. 2p)}} \\
P(3) &= P(3a) + P(3b) \\
&= \frac{1}{18} + \frac{5}{216} \\
&= \frac{17}{216} \quad \boxed{\text{1p (yht. 3p)}}
\end{aligned}
$$

$*$: Kerroin 2 on erilaisten mahdollisten järjestysten lukumäärä. Se voidaan laskea myös binomikertoimella $\binom{2}{1} = 2$.

Todennäköisyys tapahtumalle “Liisa tarvitsee vähintään kolme heittoa voittaakseen” on todennäköisyyksien $P(3)$ ja $P(4)$ summa.

$$
\begin{aligned}
P(\text{vähintään } 3) &= P(3) + P(4) \\
&= \frac{1}{216} + \frac{17}{216} \\
&= \frac{1}{12} \quad \boxed{\text{1p (yht. 4p)}}
\end{aligned}
$$

Vastaus: Liisa tarvitsee pelin voittamiseen vähintään kolme heittoa todennäköisyydellä $\frac{1}{12}$.

7.3.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Kohdassa 7.2. laskettiin vain todennäköisyys $P(\text{vähintään } 3)$

Koska Liisa voittaa pelin joka tapauksessa korkeintaan neljällä heitolla, todennäköisyyksien $P(1)$, $P(2)$ ja $P(\text{vähintään } 3)$ summa on yksi:

$$P(1) + P(2) + P(\text{vähintään } 3) = 1$$

$$\begin{aligned} P(2) &= 1 - P(1) - P(\text{vähintään } 3) \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

1p (yht. 1p)

Liisa tarvitsee neljä heittoa vain, jos hän heittää kolmella ensimmäisellä heitolla ykkösen. Neljännen nopanheiton tuloksella ei ole merkitystä. Todennäköisyys, että Liisa saa kolmella ensimmäisellä heitolla pelkästään ykkösiä on kertolaskusäännön nojalla

$$\begin{aligned} P(4) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{216} \end{aligned}$$

1p (yht. 2p)

Todennäköisyys, että Liisa tarvitsee täsmällee kolme heittoa voittaakseen on siis

$$P(\text{vähintään } 3) = P(3) + P(4)$$

1p (yht. 3p)

$$\begin{aligned} P(3) &= P(\text{vähintään } 3) - P(4) \\ &= \frac{1}{12} - \frac{1}{216} \\ &= \frac{17}{216} \end{aligned}$$

1p (yht. 4p)

Voittoon tarvittavien heittojen lukumäärän odotusarvo saadaan laskemalla lukumäärien ja niiden todennäköisyyksien tulojen summa, eli

$$
\begin{aligned}
E &= 1 \cdot P(1) + 2 \cdot P(2) + 3 \cdot P(3) + 4 \cdot P(4) \quad \text{1p (yht. 5p)} \\
&= 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{5}{12} + 3 \cdot \frac{17}{216} + 4 \cdot \frac{1}{216} \\
&= \frac{343}{216} \quad \text{1p (yht. 6p)} \\
&= 1{,}5879\ldots
\end{aligned}
$$

Vastaus: Odotusarvo heittojen lukumäärälle, jotka Liisa tarvitsee päästäkseen Kairoon on $\frac{343}{216}$.

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Todennäköisyydet $P(3)$ ja $P(4)$ on laskettu jo kohdassa 7.2.

Kohdissa 7.1. ja 7.2. on laskettu todennäköisyydet $P(1)$, $P(3)$ ja $P(4)$. 3p (yht. 3p)

Jos laskettu jo aiemmin oikein $P(1)$, $P(3)$ ja $P(4)$, tässä 3p.

Koska Liisa voittaa pelin joka tapauksessa korkeintaan neljällä heitolla, todennäköisyyksien $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ ja $P(4)$ summa on yksi:

$$
\begin{aligned}
P(1) + P(2) + P(3) + P(4) &= 1 \\
P(2) &= 1 - P(1) - P(3) - P(4) \\
&= 1 - \frac{1}{2} - \frac{17}{216} - \frac{1}{216} \\
&= \frac{5}{12} \quad \text{1p (yht. 4p)}
\end{aligned}
$$

Voittoon tarvittavien heittojen lukumäärän odotusarvo saadaan laskemalla lukumäärien ja niiden todennäköisyyksien tulojen summa, eli

$$\begin{aligned} E &= 1 \cdot P(1) + 2 \cdot P(2) + 3 \cdot P(3) + 4 \cdot P(4) \quad \boxed{\text{1p (yht. 5p)}} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{5}{12} + 3 \cdot \frac{17}{216} + 4 \cdot \frac{1}{216} \\ &= \frac{343}{216} \quad \boxed{\text{1p (yht. 6p)}} \\ &= 1{,}5879\ldots \end{aligned}$$

Vastaus: Odotusarvo heittojen lukumäärälle, jotka Liisa tarvitsee päästäkseen Kairoon on $\frac{343}{216}$.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

8. Pinta-alan arviointi simuloinnilla (12 p.)

Tasojoukon A pisteet (x, y) määräytyvät epäyhtälöistä $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 4$ ja $y \geq x^2$. Tässä tehtävässä on tarkoitus arvioida joukon A pinta-alaa simulaation avulla käyttämällä sitä tietoa, että todennäköisyys on suoraan verrannollinen pinta-alaan. Arvotaan pisteitä (x, y) suorakulmiosta B, jonka määräävät epäyhtälöt $0 \leq x \leq 2$ ja $0 \leq y \leq 4$.

1. Tee sopivalla ohjelmistolla koodi, joka arpoo 1 000 pistettä suorakulmiosta B ja tulostaa vastauksena niiden pisteiden lukumäärän, jotka kuuluvat joukkoon A. Kerro sanallisesti ja sopivien kuvakaappausten avulla, miten toteutit koodisi. (Vihje: Voit käyttää esimerkiksi taulukkolaskennan satunnaislukugeneraattoria.) (6 p.)

2. Hille ajoi kohdassa 1 tekemänsä koodin 10 kertaa ja sai alla olevat luvut. Laske tulosten keskiarvo ja arvioi tämän perusteella joukon A pinta-alaa. (6 p.)

   Hillen koodin tulosteet: 673, 664, 672, 679, 667, 650, 640, 678, 660, 667. (6 p.)

Ratkaisu.

8.1.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Laaditaan taulukko LibreOffice Calcilla. Alla on esitetty, millaiset kaavat kirjoitetaan taulukon kuhunkin soluun.

LibreOffice Calc:issa kaavat saa näkyviin valikosta Näytä / Näytä kaava

	A	B	C	D
1	**1000 kpl suorakulmion B sisällä olevia pisteitä**			
2	***x***	***y***	**Onko joukon A piste**	**Yhteensä joukon A pisteitä**
3	=SATUNNAISLUKU()*2	=SATUNNAISLUKU()*4	=JOS(B3>=A3^2;1;0)	**=SUMMA(C3:C1002)**
4	=SATUNNAISLUKU()*2	=SATUNNAISLUKU()*4	=JOS(B4>=A4^2;1;0)	
5	=SATUNNAISLUKU()*2	=SATUNNAISLUKU()*4	=JOS(B5>=A5^2;1;0)	
6	=SATUNNAISLUKU()*2	=SATUNNAISLUKU()*4	=JOS(B6>=A6^2;1;0)	
7	=SATUNNAISLUKU()*2	=SATUNNAISLUKU()*4	=JOS(B7>=A7^2;1;0)	
8	=SATUNNAISLUKU()*2	=SATUNNAISLUKU()*4	=JOS(B8>=A8^2;1;0)	
9	=SATUNNAISLUKU()*2	=SATUNNAISLUKU()*4	=JOS(B9>=A9^2;1;0)	

4p (yht. 4p)

Sarake B = 1 p, Sarake C = 2p, Sarake D = 1p

Seuraavassa kuvassa on kaavojen tulokset. Taulukko jatkuu alas päin siten, että pisteitä lasketaan yhteensä 1000 kpl

	A	B	C	D
1	**1000 kpl suorakulmion B sisällä olevia pisteitä**			
2	***x***	***y***	**Onko joukon A piste**	**Yhteensä joukon A pisteitä**
3	0,831148930182113	0,42890108430439	0	**660**
4	1,65364308949706	0,942192110754995	0	
5	0,3926416840672	3,98797178998551	1	
6	0,871126274281129	2,91010143789164	1	
7	0,946970068411052	2,2874628800116	1	
8	1,56536403563606	1,02281020514969	0	
9	1,67374432570116	3,77390160422171	1	

Funktio `SATUNNAISLUKU()` tuottaa satunnaisluvun nollan ja yhden väliltä. Kun tämä satunnaisluku kerrotaan kahdella tai neljällä, saadaan satunnaisluku nollan ja kahden tai nollan ja neljän väliltä vastaavasti. Tällä tavoin on saatu laskettua sarakkeisiin A ja B satunnaiset koordinaatit sellaisille pisteille, jotka ovat suorakulmion B sisällä. Näitä pisteitä on laskettu 1000 kpl eli tuhat riviä.

Tehtävänannon mukaan suorakulmion B piste kuuluu tasojoukkoon A, jos pisteen koordinaatit toteuttavat ehdon $y \geq x^2$. Sarakkeen C kaava testaa tämän ehdon ja tulostaa soluun luvun 1, jos ehto toteutuu ja luvun 0, jos ehto ei toteudu.

Soluun D3 lasketaan summa sarakkeesta C, eli niiden pisteiden määrä, jotka kuuluvat tasojoukkoon A. 2p (yht. 6p) Selitys = 2p

Huomaa, että et voi käyttää valmista funktiota `SATUNNAISLUKU.VÄLILTÄ(0;4)`, koska se antaa vain kokonaislukuarvoja

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Tehdään ohjelma, joka arpoo 1000 pistettä suorakulmion B sisälle ja laskee tasojoukkoon A kuuluvien pisteiden lukumäärän. Alla on esitetty tällainen ohjelma TI-Nspiren Python-tulkilla, saman ohjelman TI-Basic -ohjelmointikielellä sekä JavaScript-koodi, jonka voi ajaa Abitin verkkoselaimeilla.

1p+2p+1p+2p (yht. 6p)

- Satunnaiset x- ja y-koordinaatit tuotettu oikein = 1p,
- Testattu kuuluuko piste tasoalueeseen A = 2p,
- Laskettu ja tulostettu alueeseen kuuluvien pisteiden määrä = 1p,
- Selitys = 2p, voi olla kommentteina koodissa tai erillinen selitys.

Python-koodi:

```
pm_k21_teht_8.py                                                    12/12
from random import *            # ladataan satunnaislukugeneraattori

suotuisat = 0                   # alustetaan laskuri

for i in range (0, 1000):       # käydään läpi tuhat pistettä
  x = uniform(0,2)              # pisteen x-koordinaatti
  y = uniform(0,4)              # pisteen y-koordinaatti
  if y >= x**2:                 # jos piste on alueessa A
    suotuisat = suotuisat +1    # kasvatetaan laskuria yhdellä

print("Alueen A sisällä olevien pisteiden lukumäärä on ")
print(suotuisat)
```

```
Python Shell                                                        4/4
>>>#Running pm_k21_teht_8.py
Alueen A sisällä olevien pisteiden lukumäärä on
675
>>>
```

Basic TI -koodi:

```
pm_yo_k21_teht_8                                                    10/10
Define pm_yo_k21_teht_8()=
Prgm
Local suotuisat
0→suotuisat
For i,1,1000
  x:=rand()·2
  y:=rand()·4
  If y≥x^2 Then
    suotuisat+1→suotuisat
  EndIf
EndFor
Disp "Alueen A sisällä olevien pisteiden lukumäärä on ",suotuisat
EndPrgm
```

pm_yo_k21_teht_8()

Alueen A sisällä olevien pisteiden lukumäärä on 661

Valmis

pm_yo_k21_teht_8()

Alueen A sisällä olevien pisteiden lukumäärä on 685

Valmis

pm_yo_k21_teht_8()

Alueen A sisällä olevien pisteiden lukumäärä on 669

Valmis

JavaScript-koodi:

```
<script>

var suotuisat = 0;            // alustetaan muuttuja
var x = 0, y = 0;             // alustetaan muuttujat

for (i = 0; i < 1000; i++){   // for-silmukka, 1000 toistoa
  x = Math.random() * 2;      // pisteen x-koordinaatti
  y = Math.random() * 4;      // pisteen y-koordinaatti
  if ( y >= x**2 ) {          // jos piste on alueessa A
      suotuisat++;            // kasvatetaan laskuria yhdellä
  }
}

document.write(`Alueen A sisällä olevien pisteiden lukumäärä on ${suotuisat}`);
        // tuloksen kirjoittaminen
</script>
```

Tiedosto | file:///home/digabi/pm_yo_k21_teht_8.html

Alueen A sisällä olevien pisteiden lukumäärä on 652

JavaScript-koodin saa suoritettua Abitissa kirjoittamalla sen esim. Mousepad-ohjelmalla, tallentamalla `.html` -tiedostoksi ja avaamalla tämän tiedoston Abitin Firefox-selaimella.

8.2. Taulukkolaskentaohjelmalla saadaan Hillen tulosteiden keskiarvoksi 665. 2p (yht. 2p)

Todennäköisyys, että suorakulmion B piste kuuluu tasojoukkoon A on Hillen simulaation perusteella

$$p = \frac{665}{1000} = 0{,}665.$$ 1p (yht. 3p)

Toisaalta p on geometrinen todennäköisyys

$$p = \frac{A_A}{A_B},$$

jossa A_A ja A_B ovat tasojoukon A ja suorakulmion B alat vastaavasti. Tästä saadaan yhtälö

$$0{,}665 = \frac{A_A}{A_B} \quad \text{1p (yht. 4p)}.$$

Sijoittamalla $A_B = 2 \cdot 4 = 8$ saadaan

$$0{,}665 = \frac{A_A}{8} \qquad \| \cdot 8$$

$$A_A = 5{,}32 \quad \text{2p (yht. 6p)}$$

Vastaus: Tulosten keskiarvo on 665 ja joukon A pinta-ala on arviolta $5{,}32$.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

9. Paloittain määritelty funktio (12 p.)

Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritellään kaavalla

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & \text{kun } x \leq 0 \\ (ax+1)^2 + a(1-a), & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

1. Selvitä, millä parametrin $a \in \mathbb{R}$ arvoilla f on kaikkialla jatkuva. (6 p.)
2. Selvitä, millä parametrin $a \in \mathbb{R}$ arvoilla f on kaikkialla derivoituva. (6 p.)

Ratkaisu.

9.1. Polynomifunktiot ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan. Funktion f lausekkeet ovat polynomeja, joten ne ovat selkeästi jatkuvia väleillä $x < 0$ ja $x > 0$. Funktion f jatkuvuutta tarvitsee tutkia vain kohdassa $x = 0$, koska funktion f lauseke muuttuu tämän kohdan läheisyydessä. 1p (yht. 1p)

Funktio f on jatkuva kohdassa $x = 0$, kun funktion toispuoleiset raja-arvot ovat yhtä suuret kuin funktion arvo kohdassa $x = 0$.

Funktion f arvo kohdassa $x = 0$ on $f(0) = 0^3 + 1 = 1$.

Määritetään funktion f toispuoliset raja-arvot kohdassa $x = 0$. Funktion f vasemmanpuoleinen raja-arvo on

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x^3 + 1\right)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \left(0^3 + 1\right)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$$ 1p (yht. 2p)

Funktion f oikeanpuoleinen raja-arvo on

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left((ax+1)^2 + a(1-a)\right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \left((a \cdot 0 + 1)^2 + a(1-a)\right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 + a - a^2.$$ 1p (yht. 3p)

Funktio f on jatkuva kohdassa $x = 0$, kun

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$$1 = 1 + a - a^2.$$ 1p+1p (yht. 5p)

Selitys = 1p, yhtälö = 1p.

Laskinohjelman avulla yhtälön ratkaisuksi saadaan $a = 0$ tai $a = 1$. 1p (yht. 6p)

Vastaus: Funktio f on kaikkialla jatkuva, kun $a = 0$ tai $a = 1$.

9.2. Polynomifunktiot ovat derivoituvia määrittelyjoukossaan, joten tarvitsee tutkia vain kohtaa $x = 0$. 1p (yht. 1p)

Funktion f lauseke muuttuu kohdassa $x = 0$, joten funktion derivaatta kohdassa 0 määritetään toispuolisten raja-arvojen avulla.

Funktio f on derivoituva kohdassa t, jos toispuoliset derivaatat ovat yhtä suuret. Tällöin $f'(t) = f'_-(t) = f'_+(t)$. 1p (yht. 2p)

Lasketaan funktion f vasemmanpuoleinen derivaatta kohdassa $x = 0$.

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 + 1 - (0^3 + 1)}{x - 0}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^3}{x}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} x^2$$

$$f'_-(0) = 0^2$$

$$f'_-(0) = 0$$ 1p (yht. 3p)

Lasketaan funktion f oikeanpuoleinen derivaatta kohdassa $x = 0$.

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \qquad \| \; f(0) = 1 \text{ kohdan 9.1. perusteella}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{(ax+1)^2 + a(1-a) - 1}{x - 0}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{(a^2x^2 + 2ax + 1) + a(1-a) - 1}{x}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{a^2x^2 + 2ax + 1 + a(1-a) - 1}{x}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{a^2x^2 + 2ax}{x} + \frac{a(1-a)}{x} \right)$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{a^2x^2 + 2ax}{x} + \lim_{x \to 0^+} \frac{a(1-a)}{x}$$

Funktio voi olla derivoituva vain, jos se on jatkuva. Kohdassa 9.1. osoitettiin, että funktio on jatkuva vain, jos $a = 0$ tai jos $a = 1$ eli $1 - a = 0$. Tällä perusteella jälkimmäisen raja-arvon osoittaja on nolla, eli

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{a^2x^2 + 2ax}{x} + \lim_{x \to 0^+} \frac{0}{x}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x\left(a^2x + 2a\right)}{x}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} a^2x + 2a$$

$$f'_+(0) = a^2 \cdot 0 + 2a$$

$$f'_+(0) = 2a$$ 1p (yht. 4p)

Siispä $f'_-(0) = f'_+(0)$, kun $0 = 2a$, 1p (yht. 5p) josta saadaan $a = 0$. 1p (yht. 6p)

Vastaus: Funktio f on kaikkialla derivoituva, kun $a = 0$.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

10. Matemaattista tekstiä (12 p.)

Aineisto:

10. A Teksti: Matematiikan tekstipätkiä

Matemaattinen teksti rakentuu mm. käsitteiden **määritelmistä**, yleisesti pätevistä tuloksista (**lauseet**), tulosten **todistuksista** ja erikoistapauksiin sovelletuista laskuista (**esimerkit**).

1. Valitse aineiston 10.A kunkin tekstin (a)–(c) kohdalla, onko kyseessä **määritelmä**, **lause**, **todistus** vai **esimerkki**. Vastauksia ei tarvitse tässä kohdassa perustella. (3 p.)
2. Minkä lauseen kohdassa 1 valitsemasi **todistus** osoittaa todeksi? Muotoile lauseen sisältö täsmällisesti niin, että sen yhteys **todistukseen** käy ilmi. (4 p.)
3. Kohdassa 1 valitsit yhden tekstin **lauseeksi**. Todista tämä **lause**. (5 p.)

Ratkaisu.

10.1. a) Todistus. 1p (yht. 1p)

Tekstissä a osoitetaan, että kolmion, jonka sivujen pituuksille a, b ja c pätee $a^2 + b^2 = c^2$ ja suorakulmaisen kolmion, jonka kateettien pituudet ovat a ja b, kaikki kulmat ovat yhtä suuret ja erityisesti sivujen a ja b välinen kulma on suora kulma molemmissa kolmioissa. Lyhyesti sanottuna tekstissä osoitetaan, että jos kolmion sivujen pituuksille a, b ja c pätee $a^2 + b^2 = c^2$, kolmio on suorakulmainen. Kyseessä on siis todistus.

b) Määritelmä. 1p (yht. 2p)

Tekstissä b ei esitetä tietyn väitteen seuraavan tietyistä oletuksista eikä siinä osoiteta minkään väitteen todenmukaisuutta. Näin ollen kyseessä ei ole lause eikä todistus. Tekstissä b ei myöskään käsitellä mitään erikoistapausta, joten kyseessä ei ole esimerkki. Sen sijaan tekstissä b esitetään, mitä logaritmi tarkoittaa, eli kyseessä on määritelmä.

c) Lause. 1p (yht. 3p)

Tekstissä c esitetään tietyn väitteen (”luku n on jaollinen kolmella”) seuraavan tietystä oletuksesta (”luvun n numeroiden summa on jaollinen kolmella”), joten kyseessä on siis lause.

10.2. Tekstissä osoitetaan, että jos kolmion 1 sivujen pituuksille a, b ja c pätee $a^2 + b^2 = c^2$ ja suorakulmaisen kolmion 2 kateettien pituudet ovat a ja b 1p (yht. 1p), kolmioiden 1 ja 2 vastinkulmat ovat yhtä suuria 1p (yht. 2p) ja erityisesti sivujen a ja b välinen kulma on suora kulma molemmissa kolmioissa. 1p (yht. 3p) Lyhyesti sanottuna tekstissä siis osoitetaan, että jos kolmion sivujen pituuksille a, b ja c pätee $a^2 + b^2 = c^2$, kolmio on suorakulmainen kolmio. 1p (yht. 4p)

10.3. Lause: ”Jos positiivisen kokonaisluvun n numeroiden summa on jaollinen kolmella, niin myös luku n on jaollinen kolmella.”

Todistus: Olkoon tarkasteltava luku a ja olkoon sen numerot a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1 ja a_0, 1p (yht. 1p) eli toisin sanoen

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$ 1p (yht. 2p)

Huomataan, että $10 = 3 \cdot 3 + 1$, 1p (yht. 3p) joten $10 \equiv 1 \pmod 3$. 1p (yht. 4p) Näin ollen siis

$$\begin{aligned}
a &\equiv a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \pmod 3 \\
a &\equiv a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 1 + a_0 \pmod 3 \\
a &\equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \pmod 3
\end{aligned}$$

Luku a on siis kongruentti sen numeroiden summan kanssa modulo 3, joten jos luvun a numeroiden summa on jaollinen kolmella (jakojäännös nolla), myös luku a on jaollinen kolmella. $\square$

1p (yht. 5p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

11. Kokonaislukuja (12 p.)

1. Kumpi luvuista
$$99^{100^{101}} \quad \text{ja} \quad 101^{100^{99}}$$
on suurempi?. (4 p.)

2. Lukujono (a_n) määritellään rekursiivisesti kaavoilla $a_1 = 1$, $a_{2n} = a_n$ ja $a_{2n+1} = 1 - a_n$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$. Määritä lukujonon seitsemäs jäsen a_7 ja 2021. jäsen a_{2021}. (8 p.)

Ratkaisu.

11.1.

$\boxed{\text{Ratkaisuvaihtoehto 1}}$

$$n = 99^{100^{101}}$$
$$m = 101^{100^{99}}$$

Tarkastellaan lukujen $n^{\frac{1}{100^{99}}}$ ja $m^{\frac{1}{100^{99}}}$ erotusta.

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{100^{99}}} - m^{\frac{1}{100^{99}}} &= \left(99^{100^{101}}\right)^{\frac{1}{100^{99}}} - \left(101^{100^{99}}\right)^{\frac{1}{100^{99}}} \quad \boxed{\text{1p+1p (yht. 2p)}} \\ &= 99^{\frac{100^{101}}{100^{99}}} - 101^{\frac{100^{99}}{100^{99}}} \\ &= 99^{100^2} - 101 \\ &> 0 \quad \boxed{\text{1p (yht. 3p)}} \end{aligned}$$

Näin ollen
$$n^{\frac{1}{100^{99}}} > m^{\frac{1}{100^{99}}},$$
eli myös
$$n > m.$$

Vastaus: Luku $99^{100^{101}}$ on suurempi kuin $101^{100^{99}}$. $\boxed{\text{1p (yht. 4p)}}$

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

$$n = 99^{100^{101}}$$

$$m = 101^{100^{99}}$$

Tarkastellaan lukujen $\lg(\lg(n))$ ja $\lg(\lg(m))$ erotusta.

$$\begin{aligned}
\lg(\lg(n)) - \lg(\lg(m)) &= \lg\left(\lg\left(99^{100^{101}}\right)\right) - \lg\left(\lg\left(101^{100^{99}}\right)\right) \\
&= \lg\left(100^{101}\lg(99)\right) - \lg\left(100^{99}\lg(101)\right) \\
&= \lg\left(\frac{100^{101}\lg(99)}{100^{99}\lg(101)}\right) \\
&= \lg\left(\frac{100^{2}\lg(99)}{\lg(101)}\right) \\
&= \lg\left(\frac{\lg\left(99^{100^2}\right)}{\lg(101)}\right) \\
&> \lg(1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

1p+1p (yht. 2p)

1p (yht. 3p)

Erotus on positiivinen, joten

$$\lg(\lg(n)) > \lg(\lg(m)).$$

Logaritmi on aidosti monotoninen, joten myös

$$n > m.$$

Vastaus: Luku $99^{100^{101}}$ on suurempi kuin $101^{100^{99}}$. 1p (yht. 4p)

11.2. Määritetään jäsen a_7 suoraan laskemalla rekursiokaavan avulla.

$$\begin{aligned} a_7 &= a_{2\cdot 3+1} = 1 - a_3 \quad \text{1p (yht. 1p)} \\ &= 1 - a_{2\cdot 1+1} = 1 - (1 - a_1) \quad \text{1p (yht. 2p)} \\ &= 1 - (1 - 1) = 1. \quad \text{1p (yht. 3p)} \end{aligned}$$

Määritetään jäsen a_{2021} vastaavasti:

$$\begin{aligned} a_{2021} &= a_{2\cdot 1010+1} \\ &= 1 - a_{1010} \quad \text{1p (yht. 4p)} \\ &= 1 - a_{2\cdot 505} \\ &= 1 - a_{505} \\ &= 1 - a_{2\cdot 252+1} \\ &= 1 - (1 - a_{252}) \quad \text{1p (yht. 5p)} \\ &= a_{252} \\ &= a_{2\cdot 126} \\ &= a_{126} \\ &= a_{2\cdot 63} \\ &= a_{63} \quad \text{1p (yht. 6p)} \\ &= a_{2\cdot 31+1} \\ &= 1 - a_{31} \\ &= 1 - a_{2\cdot 15+1} \\ &= 1 - (1 - a_{15}) \\ &= a_{15} \quad \text{1p (yht. 7p)} \\ &= a_{2\cdot 7+1} \\ &= 1 - a_7 = 1 - 1 = 0. \quad \text{1p (yht. 8p)} \end{aligned}$$

Vastaus: Jäsen $a_7 = 1$ ja jäsen $a_{2021} = 0$.

12. Piilotetut pallot (12 p.)

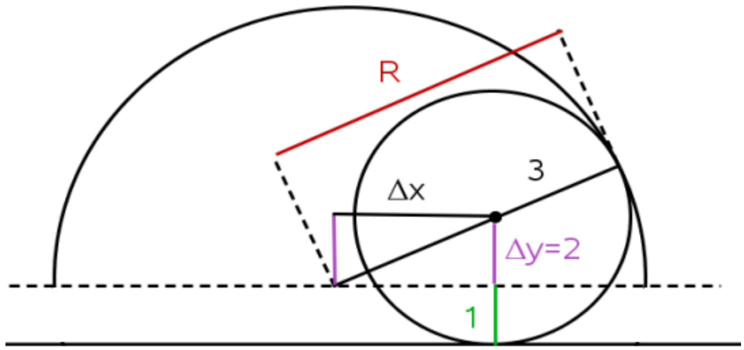
Pöydällä on kolme 3-säteistä palloa, joista kukin pallo koskettaa kahta muuta. Pallot yritetään peittää puolipallon muotoisella kuvulla, jonka säde on R. Kupu on kuitenkin liian pieni, jolloin sen reuna jää joka kohdassa 1 yksikön korkeudelle pöydästä. Määritä säteen R tarkka arvo.

Ratkaisu.

Kukin kolmesta pallosta sivuaa puolipallon muotoisen kuvun sisäpintaa, joten sivuamiskohtaan piirretty kuvun säde kulkee pallon keskipisteen kautta. Kuvun säde saadaan siis summana pallon säteestä ja pallon keskipisteen etäisyydestä kuvun keskipisteeseen.

Pallojen keskipisteet ovat pallojen säteen korkeudella, eli korkeudella 3 ja kuvun keskipiste on kuvun reunan korkeudella, eli korkeudella 1, sillä kupu on puolipallon muotoinen. Pallon keskipisteen ja kuvun keskipisteen pystysuuntainen etäisyys on siis

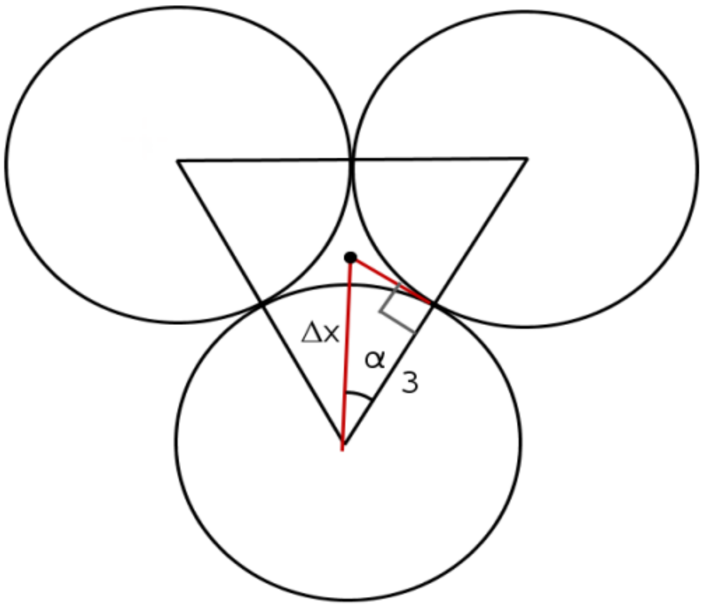
$$\Delta y = 3 - 1 = 2.$$



2p (yht. 2p)

Kuva tai vastaava perustelu = 2p

Symmetrian nojalla kuvun keskipiste on yhtä kaukana kustakin pallon keskipisteestä. Pallojen keskipisteet muodostavat alla olevan kuvan mukaisen tasasivuisen kolmion 1p (yht. 3p) , eli kuvun keskipiste on siis tämän tasasivuisen kolmion keskijanojen leikkauspisteen alapuolella. Tasasivuisen kolmion kulmanpuolittajat ovat samat kuin sen keskijanat, joten kuvun keskipiste on siis alla olevaan kuvaan piirretyn pisteen alapuolella. Tasasivuisen kolmion kulmien suuruus on $60°$, joten kuvaan piirretyn suorakulmaisen kolmion kulma $\alpha = 30°$. Suorakulmaisen kolmion pidempi kateetti on pallon säteen pituinen, eli sen pituus on 3. 1p (yht. 4p)



2p (yht. 6p)

Tästä saadaan pallon keskipisteen ja kuvun keskipisteen vaakasuuntainen etäisyys:

$$\cos(30°) = \frac{3}{\Delta x}$$ 1p (yht. 7p)

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{\Delta x}$$

$$\Delta x = 2\sqrt{3}$$ 1p (yht. 8p)

Pituuden Δx voi laskea myös esimerkiksi laskemalla tasasivuisen kolmion korkeusjanan pituuden ja käyttämällä hyväksi tietoa, että korkeusjanojen leikkauspiste jakaa korkeusjanat suhteessa $2 : 1$.

Näin ollen kuvun säde on siis

$$R = 3 + \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$ 1p+1p (yht. 10p)

1p / termi

$$= 3 + \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2}$$

$$= 7.$$ 1p+1p (yht. 12p)

Toisen termin sieventäminen arvoon 4 = 1p, lopullinen oikea vastaus = 1p TAI suoraan oikean arvon laskeminen = 2p.

Vastaus: Kuvun säde on 7.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

13. Polynomien esitysmuodot (12 p.)

Olkoot $n \geq 1$ kokonaisluku ja $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq 0$, kaikille kokonaisluvuille $0 \leq i \leq n$. Tutkitaan polynomeja

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0$$

ja

$$Q(x) = \left(x - \tfrac{1}{\alpha_1}\right)\left(x - \tfrac{1}{\alpha_1}\right) \cdots \left(x - \tfrac{1}{\alpha_n}\right) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0.$$

Tässä siis kertoimet p_i ja q_i määräytyvät yhtälöiden perusteella annettujen lukujen α_j avulla.

1. Laske kaikki luvut p_i ja q_i, kun $n = 2$, $\alpha_1 = 2$ ja $\alpha_2 = 3$ (2 p.)

2. Ratkaise kaikki luvut p_i ja q_i lukujen α_1 ja α_2 avulla tapauksessa $n = 2$. (4 p.)

3. Esitä luvut q_i lukujen p_j ($0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n$) avulla yleisessä tapauksessa (6 p.)

Ratkaisu.

13.1. Sijoitetaan $\alpha_1 = 2$ ja $\alpha_2 = 3$ polynomin $P(x)$ lausekkeeseen ja avataan sulut.

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$$
$$P(x) = (x - 2)(x - 3)$$
$$P(x) = x^2 - 5x + 6$$ 1p (yht. 1p)

Saadaan siis $p_2 = 1$, $p_1 = -5$ ja $p_0 = 6$.

Sijoitetaan $\alpha_1 = 2$ ja $\alpha_2 = 3$ polynomin $Q(x)$ lausekkeeseen ja avataan sulut.

$$Q(x) = \left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(x - \frac{1}{\alpha_2}\right)$$
$$Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$
$$Q(x) = x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}$$

Saadaan siis $q_2 = 1$, $q_1 = -\frac{5}{6}$ ja $q_0 = \frac{1}{6}$. 1p (yht. 2p)

Vastaus: Kertoimet ovat $p_2 = 1$, $p_1 = -5$ ja $p_0 = 6$ sekä $q_2 = 1$, $q_1 = -\frac{5}{6}$ ja $q_0 = \frac{1}{6}$.

13.2. Avataan polynomin $P(x)$ lausekkeesta sulut tapauksessa $n = 2$.

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$$

$$P(x) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2.$$ 1p (yht. 1p)

Saadaan siis $p_2 = 1$, $p_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ ja $p_0 = \alpha_1\alpha_2$. 1p (yht. 2p)

Avataan polynomin $Q(x)$ lausekkeesta sulut tapauksessa $n = 2$.

$$Q(x) = \left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(x - \frac{1}{\alpha_2}\right)$$

$$Q(x) = x^2 - \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right)x + \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}$$ 1p (yht. 3p)

Saadaan siis $q_2 = 1$, $q_1 = -\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right)$ ja $q_0 = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}$. 1p (yht. 4p)

Vastaus: Kertoimet ovat $p_2 = 1$, $p_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ ja $p_0 = \alpha_1\alpha_2$ sekä $q_2 = 1$, $q_1 = -\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right)$ ja $q_0 = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}$.

13.3.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Tarkastelemalla polynomin $Q(x)$ tulomuodossa annettua lauseketta nähdään, että jokaisessa tekijässä $x - \frac{1}{\alpha_i}$ muuttujan x kerroin on 1. Näin ollen, kun kerrotaan sulut auki ja päädytään polynomin normaalimuotoon, tulee korkeimman asteen termiksi x^n. Toisin sanoen

$$q_n = 1.$$

Tulon nollasäännön perusteella polynomi $Q(x)$ saa arvon nolla silloin, kun jokin sen tekijöistä on nolla. Siten nollakohdat ovat

$$x - \frac{1}{\alpha_i} = 0$$
$$x = \frac{1}{\alpha_i}.$$

Tukitaan nyt lauseketta

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x} - \alpha_1\right)\left(\frac{1}{x} - \alpha_2\right)\ldots\left(\frac{1}{x} - \alpha_n\right).$$ 2p (yht. 2p)

Tulon nollasäännöllä tämä lauseke on nolla, kun

$$\frac{1}{x} - \alpha_i = 0$$
$$x = \frac{1}{\alpha_i}$$

Lausekkeen $P\left(\frac{1}{x}\right)$ ja polynomin $Q(x)$ arvo on siis nolla samoilla x:n arvoilla. Tässä keksinnössä on ratkaisun avain! Lähdetään tutkimaan, voisiko lausekkeen $P\left(\frac{1}{x}\right)$ muuttaa polynomiksi käyttäen vain sellaisia laskutoimituksia, että nollakohdat säilyvät entisellään. Silloin saisimme polynomin, jolla on samat nollakohdat kuin polynomilla $Q(x)$.

Kirjoitetaan lauseke $P\left(\frac{1}{x}\right)$ auki käyttäen tehtävässä annettua polynomin $P(x)$ normaalimuotoa.

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = P(x^{-1}) \qquad (x \neq 0)$$
$$P\left(\frac{1}{x}\right) = p_n x^{-n} + p_{n-1}x^{-n+1} + \ldots + p_1 x^{-1} + p_0 \quad \| \cdot x^n$$
$$x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = p_n + p_{n-1}x + \ldots + p_1 x^{n-1} + p_0 x^n \quad \| : p_0$$
$$\frac{x^n}{p_0} P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{p_n}{p_0} + \frac{p_{n-1}}{p_0}x + \ldots + \frac{p_1}{p_0}x^{n-1} + x^n \qquad (1)$$ 2p (yht. 4p)

Saatu lauseke (1) on polynomi. Sillä on samat nollakohdat kuin yhtälön vasemmalla puolella olevalla lausekkeella $P\left(\frac{1}{x}\right)$ ja siten myös samat nollakohdat kuin polynomilla $Q(x)$. Lisäksi polynomin (1) korkeimman asteen termin kerroin on 1, eli sama kuin polynomilla $Q(x)$. Näin ollen polynomien $Q(x)$ ja (1) kaikki tekijät ovat tekijälauseen nojalla samoja ja siten ne ovat sama polynomi. Käännetään polynomin (1) termit vastaavaan järjestykseen kuin polynomin $Q(x)$ lausekkeessa ja vertaillaan polynomeja termeittäin. Muistetaan, että $q_n = 1$.

$$x^n + \frac{p_1}{p_0}x^{n-1} + \ldots + \frac{p_{n-1}}{p_0}x + \frac{p_n}{p_0} = x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \ldots + q_1x + q_0$$ 1p (yht. 5p)

Nähdään, että

$$q_i = \frac{p_{n-i}}{p_0}.$$ 1p (yht. 6p)

Vastaus: Yleisessä tapauksessa $q_i = \dfrac{p_{n-i}}{p_0}$.

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Polynomi $Q(x)$ on

$$Q(x) = \left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(x - \frac{1}{\alpha_2}\right)\ldots\left(x - \frac{1}{\alpha_n}\right)$$

Tarkastellaan lauseketta $P\left(\frac{1}{x}\right)$. 1p (yht. 1p)

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{x}\right) &= \left(\frac{1}{x} - \alpha_1\right)\left(\frac{1}{x} - \alpha_2\right)\ldots\left(\frac{1}{x} - \alpha_n\right) \quad \text{1p (yht. 2p)} \\
&= \frac{1}{x^n}(1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x)\ldots(1 - \alpha_n x) \\
&= \frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}{x^n}\left(\frac{1}{\alpha_1} - x\right)\left(\frac{1}{\alpha_2} - x\right)\ldots\left(\frac{1}{\alpha_n} - x\right) \quad \text{1p (yht. 3p)}
\end{aligned}$$

Lausekkeessa on n kappaletta tekijöitä $\frac{1}{\alpha_i} - x$, joten jos lauseke kerrotaan $(-1)^n$:llä, kukin niistä kääntyy muotoon $x - \frac{1}{\alpha_i}$.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}{x^n} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} - x\right)\left(\frac{1}{\alpha_2} - x\right)\ldots\left(\frac{1}{\alpha_n} - x\right) \\
&= \frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}{x^n} \cdot (-1)^{2n} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} - x\right)\left(\frac{1}{\alpha_2} - x\right)\ldots\left(\frac{1}{\alpha_n} - x\right) \\
&= \frac{(-1)^n \cdot \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}{x^n} \cdot (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} - x\right)\left(\frac{1}{\alpha_2} - x\right)\ldots\left(\frac{1}{\alpha_n} - x\right) \\
&= \frac{(-1)^n \cdot \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}{x^n} \left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(x - \frac{1}{\alpha_2}\right)\ldots\left(x - \frac{1}{\alpha_n}\right)
\end{aligned}
$$

1p (yht. 4p)

Saadaan siis

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)^n \cdot \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}{x^n} \cdot Q(x)$$

1p (yht. 5p)

$$Q(x) = \frac{x^n \cdot P\left(\frac{1}{x}\right)}{(-1)^n \cdot \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

Osoittajassa oleva $x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ on

$$
\begin{aligned}
x^n P\left(\frac{1}{x}\right) &= x^n \cdot \left(p_n \frac{1}{x^n} + p_{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + \ldots + p_0\right) \\
&= p_n + p_{n-1}x + \ldots p_0 x^n
\end{aligned}
$$

Polynomin $x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ vakiotermi on siis p_n, ensimmäisen asteen termin kerroin on p_{n-1}, jne kunnes lopulta n:nnen asteen termin kerroin on p_0.

Näin ollen siis

$$q_i = \frac{p_{n-i}}{(-1)^n \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}.$$

Toisaalta kun kerrotaan sulut auki polynomin $P(x)$ yleisestä muodosta, huomataan, että vakiotermiin tulee kaikkien α_i tulo ja sen etumerkki on negatiivinen, kun n on pariton, ja positiivinen, kun n on parillinen. Saadaan siis $p_0 = (-1)^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$. Sijoitetaan tämä vielä q_i:n lausekkeeseen.

$$q_i = \frac{p_{n-i}}{p_0}.$$

1p (yht. 6p)

Vastaus: Yleisessä tapauksessa $q_i = \dfrac{p_{n-i}}{p_0}$.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!