Yo-mallivastaukset

Kevät 2021
Lyhyt matematiikka

Tiesitkö tämän?

Mafylaiset veivät vuoden 2020 haussa

81%

kaikista lääkiksen pääsykoekiintiön paikoista.

60%

Pk-seudun lukioista käyttää **Mafynettiä.**

Mallivastausten tekijät:

Malliratkaisujen laatimisesta ovat vastanneet MAFY:n toinen perustaja Antti Suominen sekä MAFY:n oppimateriaalitiimi, jonka päätehtävä on laatia ja kehittää MAFY:n lukioon tarkoitettuja oppimateriaaleja.

Oppimateriaalitiimistä mukana olivat Antti Suomisen lisäksi Jori Suominen, Timo Kalinainen ja Sakke Suomalainen. Lisäksi työn tukena olivat Tuomas Hauvala ja Matti Virolainen.

Mafy oppimateriaalit

Olemme Helsingissä, Tampereella, Turussa ja Jyväskylässä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys.

Palveluitamme ovat:

- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali
- Lääketieteellisen valmennuskurssit
- Kauppatieteellisen valmennusmateriaalit
- DI-valmennuskurssit
- Yo-kokeisiin valmentavat kurssit

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Käyttöehdot

MAFY Oy:n yhteystiedot:

https://mafy.fi/yhteydenotto

Koetehtävät

Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.

Linkit malliratkaisuihin

1. Laskuja (12 p.)

Oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

1.1. Lausekkeen $5(3+2)-5\cdot 4$ arvo on (2 p.)

☐

Vastauslaatikon vaihtoehdot: -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

1.2. Lausekkeen $3x+8$ arvo kun $x=-2$ on (2 p.)

☐

Vastauslaatikon vaihtoehdot: -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

1.3. Yhtälön $4(x+2)=12$ ratkaisu x on (2 p.)

☐

Vastauslaatikon vaihtoehdot: -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

1.4. Kaiuttimen alkuperäinen hinta on 120 euroa. Mikä sen hinta on 30 $\%$ alennuksen jälkeen? (2 p.)

☐

Vastauslaatikon vaihtoehdot: 36 €, 80 €, 82 €, 84 €, 90 €.

1.5. Alla on esitetty tehtävä ja siihen kaksi ratkaisua. (2 p.)

Tehtävä: Kuinka monta prosenttia enemmän 210 on kuin 200?
Ratkaisu 1: $210/200=1{,}05$; $1{,}05-1=0{,}05$. Vastaus: $5\,\%$.
Ratkaisu 2: $200/210=0{,}95$; $1-0{,}95=0{,}05$. Vastaus: $5\,\%$.

Mikä seuraavista vaihtoehdoista on totta?

☐

Vastauslaatikon vaihtoehdot: ”Kumpikin ratkaisu on väärin.”, ”Vain ratkaisu 1 on oikein.”, ”Vain ratkaisu 2 on oikein”, ”Molemmat ratkaisut ovat oikein.”.

1.6. Tuotteen verottomaan hintaan lisätään arvonlisävero, jonka suuruus on $24\,\%$. Mikä on arvonlisäveron osuus tuotteen myyntihinnasta kokonaisina prosentteina? (2 p.)

☐

Vastauslaatikon vaihtoehdot: $19\,\%$, $21\,\%$, $24\,\%$, $76\,\%$, $124\,\%$.

Ratkaisu.

1.1. **Vastaus:** 5 2p (yht. 2p)

Miten vastaukseen päädyttiin:

$$\begin{aligned}5(3+2)-5\cdot 4 &= 5\cdot 5-5\cdot 4\\ &= 25-20\\ &= 5\end{aligned}$$

1.2. **Vastaus:** 2 2p (yht. 2p)

Miten vastaukseen päädyttiin:

$$\begin{aligned}3\cdot(-2)+8 &= -6+8\\ &= 2\end{aligned}$$

1.3. **Vastaus:** $x=1$ 2p (yht. 2p)

Miten vastaukseen päädyttiin:

$$\begin{aligned}4(x+2) &= 12\\ 4\cdot x+4\cdot 2 &= 12\\ 4x+8 &= 12 && \Vert -8\\ 4x &= 12-8\\ 4x &= 4 && \Vert :4\\ x &= 1\end{aligned}$$

1.4. **Vastaus:** $84\,€$ 2p (yht. 2p)

Miten vastaukseen päädyttiin:

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Hinnasta on alennuksen jälkeen jäljellä $100\ \% - 30\ \% = 70\ \%$, joten alennettu hinta on $0{,}70$-kertainen alkuperäiseen hintaan verrattuna. Hinta on alennuksen jälkeen

$$0{,}70 \cdot 120\,€ = 84\,€.$$

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Alennus on $0{,}30$-kertainen alkuperäiseen hintaan verrattuna. Alennus on siis

$$0{,}30 \cdot 120\,€ = 36\,€.$$

Alennettu hinta on

$$120\,€ - 36\,€ = 84\,€.$$

RATKAISUVAIHTOEHTO 3

Alennus on

$$\frac{120\,€}{100} \cdot 30 = 36\,€.$$

Alennettu hinta on

$$120\,€ - 36\,€ = 84\,€.$$

1.5. **Vastaus:** Vain ratkaisu 1 on oikein. 2p (yht. 2p)

Miten vastaukseen päädyttiin:

Lasku “Kuinka monta prosenttia enemmän 210 on kuin 200?” on laskuna

$$\begin{aligned}\frac{210-200}{200} &= \frac{210}{200}-\frac{200}{200}\\ &= \frac{210}{200}-1\\ &= 1{,}05-1\\ &= 0{,}05\\ &= 5\ \%\end{aligned}$$

Tämä on sama kuin ensimmäisen ratkaisuvaihtoehdon lasku, joten ratkaisu 1 on oikein.

Ratkaisussa 2 lasketaan

$$\frac{200}{210}=0{,}95,$$

mikä ei kuitenkaan ole täsmälleen oikein, sillä

$$\frac{200}{210}=0{,}95238\ldots.$$

Välivaiheessa saatu tulos on ratkaisussa 1 pyöristetty, joten olisi pitänyt käyttää likimäärin yhtäsuuri kuin -merkkiä $\approx$ yhtäsuuruusmerkin sijaan. Lopputulokseksi ei oikeasti tule täsmälleen $5\ \%$, vaan

$$1-0{,}95238\ldots=0{,}04761\ldots\approx 0{,}048=4{,}8\ \%.$$

Ratkaisussa 2 on siis vain sattumalta saatu likimäärin oikea tulos, joten ratkaisu 2 on väärin.

Jos kokeillaan ratkaisun 2 tapaan laskemista toisilla luvuilla, huomataan että virhe voi olla suurempikin kuin edellä. Ajatellaan tehtävää “Kuinka monta prosenttia enemmän 80 on kuin 60?” Lasku olisi ratkaisun 2 tapaan tehtynä

$$\frac{60}{80}=0{,}75;\quad 1-0{,}75=0{,}25\qquad \text{Vastaus: } 25\ \%$$

Oikea vastaus on kuitenkin noin $33{,}3\ \%$, mikä nähdään seuraavasti:

$$\frac{80}{60}=1{,}333\ldots;\quad 1{,}333\ldots-1=0{,}3333\ldots\approx 0{,}333\qquad \text{Vastaus: } 33{,}3\ \%$$

1.6. **Vastaus:** $19\ \%$ 2p (yht. 2p)

Miten vastaukseen päädyttiin:

Merkitään tuotteen verotonta myyntihintaa kirjaimella a. Asiakas joutuu maksamaan veron, joten hän ei saa tuotetta tähän hintaan. Veron määrä on $24\ \%$ verottomasta myyntihinnasta eli $0{,}24a$. Verollinen myyntihinta on $a + 0{,}24a = 1{,}24a$. Asiakas ostaa tuotteen tähän hintaan. Lasketaan veron osuus verollisesta myyntihinnasta.

$$\begin{aligned}\frac{0{,}24a}{1{,}24a} &= \frac{0{,}24}{1{,}24}\\ &= 0{,}19354\ldots\\ &= 19{,}354\ldots\ \%\\ &\approx 19\ \%\end{aligned}$$

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

2. Jalkapallomatematiikkaa (12 p.)

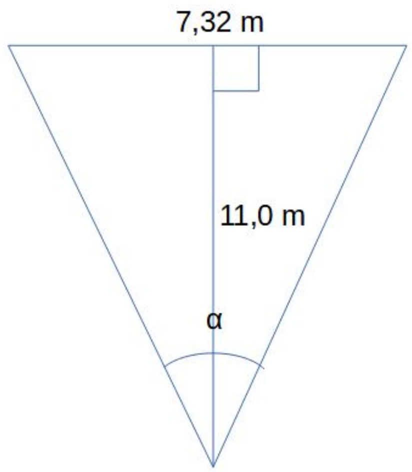
Aineisto:

2. A Kuva: Jalkapallokenttä ylhäältä päin

Jalkapallokentän maalin leveys on $7{,}32$ metriä. Kohtisuoraan $11{,}0$ metrin päässä maaliviivan keskipisteestä sijaitsee rangaistuspotkupiste (aineisto 2.A). Kuinka suuressa kulmassa maali näkyy rangaistuspotkupisteeltä katsottuna? Kulma mitataan kentän pintaa pitkin. Anna vastaus asteen tarkkuudella.

Ratkaisu.

Piirretään mallikuva. Alla oleva kuva on tehty LibreOffice Draw -ohjelmalla.

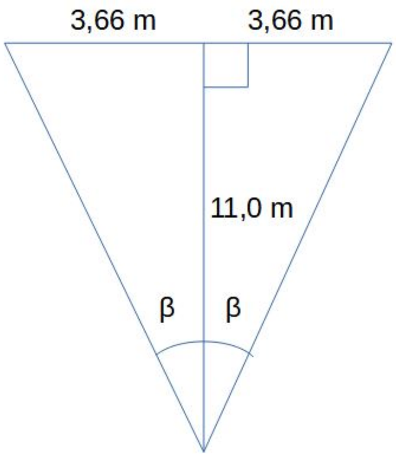


Rangaistuspotkupiste sijaitsee kohtisuorasti maaliviivan keskipisteen edessä, joten kolmio on tasakylkinen. 1p (yht. 1p) Tällöin korkeusjana jakaa kysytyn kulman α kahteen yhtä suureen osaan. 1p (yht. 2p)

Merkitään kysytyn kulman puolikasta kirjaimella β.

Kolmion kannan puolikkaan pituus on

$$\frac{7{,}32\,\mathrm{m}}{2} = 3{,}66\,\mathrm{m}.$$ 1p (yht. 3p)



Ratkaistaan kulma β suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\tan\beta = \frac{3{,}66}{11{,}0}$$ 3p (yht. 6p)

Tangentti = 1p, kateettien pituudet oikein = 1p + 1p.

$$\tan\beta = 0{,}322\ldots$$

$$\beta = 18{,}403\ldots^\circ$$ 3p (yht. 9p)

Oikea kulma (ei alfa) = 1p, laskettu oikein = 1p, aste merkkinä tai kirjoitettu sanallisesti = 1p.

Lasketaan kysytty kulma α.

$$\alpha = 2\beta = 2 \cdot 18{,}403\ldots^\circ = 36{,}807\ldots^\circ \approx 37^\circ.$$ 3p (yht. 12p)

Oikea kulma (alfa) = 1p, laskettu oikein ja aste merkkinä tai kirjoitettu sanallisesti = 1p, oikein pyöristetty = 1p.

Vastaus: 37°.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

3. Kaavoja (12 p.)

Matematiikan sovelluksissa käytetään erilaisia kaavoja. Tässä tehtävänä on joko ratkaista kysytty suure kaavasta (kohdat 1–4) tai laskea sen lukuarvo (kohdat 5 ja 6). Jokaisesta osatehtävästä voi saada 2 pistettä.

1. Ratkaise aika t: $v = v_0 + at$.
2. Ratkaise moolimassa M: $n = \frac{m}{M}$.
3. Ratkaise nopeus v: $E = \frac{1}{2}mv^2$.
4. Ratkaise kateetin pituus a: $a^2 + b^2 = c^2$.
5. Laske säde r: $V = \frac{4\pi r^3}{3}$, kun $V = 2$.
6. Laske aika t: $K = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$, kun $K = 1\,000$, $k = 500$ ja $p = 2$.

Ratkaisu.

3.1. Ratkaistaan yhtälöstä aika t.

$$v = v_0 + at \qquad \| - v_0$$

$$v - v_0 = v_0 - v_0 + at$$

$$v - v_0 = at \quad \text{1p (yht. 1p)} \qquad \| : a \quad (a \neq 0)$$

$$\frac{v - v_0}{a} = \frac{\cancel{a}t}{\cancel{a}}$$

$$\frac{v - v_0}{a} = t$$

$$t = \frac{v - v_0}{a} \quad \text{1p (yht. 2p)}$$

3.2. Ratkaistaan yhtälöstä moolimassa M.

$$n = \frac{m}{M} \qquad \| \cdot M \quad (M \neq 0)$$

$$M \cdot n = \frac{\cancel{M} \cdot m}{\cancel{M}}$$

$$M \cdot n = m \quad \boxed{\text{1p (yht. 1p)}} \qquad \| : n \quad (n \neq 0)$$

$$\frac{M \cdot \cancel{n}}{\cancel{n}} = \frac{m}{n}$$

$$M = \frac{m}{n} \quad \boxed{\text{1p (yht. 2p)}}$$

3.3. Ratkaistaan yhtälöstä nopeus v.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \| \cdot 2$$

$$2 \cdot E = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}mv^2$$

$$2E = mv^2 \qquad \| : m \quad (m \neq 0)$$

$$\frac{2E}{m} = \frac{\cancel{m}v^2}{\cancel{m}}$$

$$\frac{2E}{m} = v^2$$

$$v^2 = \frac{2E}{m} \quad \boxed{\text{1p (yht. 1p)}}$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad \text{tai} \quad v = -\sqrt{\frac{2E}{m}} \quad \boxed{\text{1p (yht. 2p)}}$$

Vastaus hyväksytään myös, jos negatiivinen nopeus on hylätty.

3.4. Ratkaistaan kateetin pituus a.

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \| - b^2$$

$$a^2 + b^2 - b^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$ 1p (yht. 1p)

$$a = \pm\sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad \text{tai} \quad a = -\sqrt{c^2 - b^2}$$

Kateetin pituus ei voi olla negatiivinen, joten $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. 1p (yht. 2p)

3.5.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Ratkaistaan ensin yhtälöstä säde r.

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \qquad \| \cdot 3$$

$$3 \cdot V = \frac{\cancel{3} \cdot 4\pi r^3}{\cancel{3}}$$

$$3V = 4\pi r^3 \qquad \| : 4$$

$$\frac{3V}{4} = \frac{\cancel{4}\pi r^3}{\cancel{4}}$$

$$\frac{3V}{4} = \pi r^3 \qquad \| : \pi$$

$$\frac{3V}{4\pi} = \frac{\cancel{\pi} r^3}{\cancel{\pi}}$$

$$\frac{3V}{4\pi} = r^3$$

$$r^3 = \frac{3V}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$ 1p (yht. 1p)

Sijoitetaan yhtälöön nyt $V = 2$ ja lasketaan säde r.

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2}{4\pi}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{6}{4\pi}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}$$

$$r = 0{,}781\ldots$$

$$r \approx 0{,}78$$ 1p (yht. 2p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Sijoitetaan yhtälöön $V = 2$ ja lasketaan säde r.

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \qquad \| \; V = 2$$

$$2 = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Ratkaistaan yhtälöstä säde r.

$$2 = \frac{4\pi r^3}{3} \qquad \| \cdot 3$$

$$2 \cdot 3 = \frac{\cancel{3} \cdot 4\pi r^3}{\cancel{3}}$$

$$6 = 4\pi r^3 \qquad \| : 4$$

$$\frac{6}{4} = \frac{\cancel{4}\pi r^3}{\cancel{4}}$$

$$\frac{6}{4} = \pi r^3 \qquad \| : \pi$$

$$\frac{6}{4\pi} = \frac{\cancel{\pi} r^3}{\cancel{\pi}}$$

$$\frac{6}{4\pi} = r^3$$

$$r^3 = \frac{3}{2\pi}$$ 1p (yht. 1p)

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}$$

$$r = 0{,}781\ldots$$

$$r \approx 0{,}78$$ 1p (yht. 2p)

3.6.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Sijoitetaan yhtälöön $K = 1000$, $k = 500$ ja $p = 2$ sekä lasketaan aika t.

$$K = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t \qquad \| \; K = 1000,\; k = 500,\; p = 2$$

$$1000 = 500 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^t \qquad \| : 500$$

$$\frac{1000}{500} = \frac{\cancel{500} \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^t}{\cancel{500}}$$

$$\frac{1000}{500} = \left(1 + \frac{2}{100}\right)^t$$

$$2 = 1{,}02^t$$ 1p (yht. 1p)

$$t = \log_{1{,}02}(2)$$

$$t = 35{,}002\ldots$$

$$t \approx 35$$ 1p (yht. 2p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Sijoitetaan yhtälöön $K = 1000$, $k = 500$ ja $p = 2$ sekä lasketaan aika t.

$$K = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t \qquad \| \; K = 1000,\; k = 500,\; p = 2$$

$$1000 = 500 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^t \qquad \| : 500$$

$$\frac{1000}{500} = \frac{\cancel{500} \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^t}{\cancel{500}}$$

$$\frac{1000}{500} = \left(1 + \frac{2}{100}\right)^t$$

$$2 = 1{,}02^t$$ 1p (yht. 1p)

$$\lg(2) = \lg\left(1{,}02^t\right)$$

Käytetään logaritmikaavaa $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$

$$\lg(2) = t \cdot \lg(1{,}02) \qquad \| : \lg(1{,}02)$$

$$\frac{\lg(2)}{\lg(1{,}02)} = t$$

$$t = \frac{\lg(2)}{\lg(1{,}02)}$$

$$t = 35{,}002\ldots$$

$$t \approx 35$$ 1p (yht. 2p)

Ratkaisussa voidaan käyttää muitakin kantalukuja kuin 10.

RATKAISUVAIHTOEHTO 3

Ratkaistaan ensin yhtälöstä t.

$$K = k\left(1+\frac{p}{100}\right)^t \qquad \| : k \quad (k \neq 0)$$

$$\frac{K}{k} = \frac{\cancel{k}\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^t}{\cancel{k}}$$

$$\frac{K}{k} = \left(1+\frac{p}{100}\right)^t$$ 1p (yht. 1p)

$$\lg\left(\frac{K}{k}\right) = \lg\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^t\right)$$

Käytetään logaritmikaavaa $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$

$$\lg\left(\frac{K}{k}\right) = t\cdot\lg\left(1+\frac{p}{100}\right) \qquad \| : \lg\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

$$\frac{\lg\left(\frac{K}{k}\right)}{\lg\left(1+\frac{p}{100}\right)} = \frac{t\cdot\cancel{\lg\left(1+\frac{p}{100}\right)}}{\cancel{\lg\left(1+\frac{p}{100}\right)}}$$

$$\frac{\lg\left(\frac{K}{k}\right)}{\lg\left(1+\frac{p}{100}\right)} = t$$

$$t = \frac{\lg\left(\frac{K}{k}\right)}{\lg\left(1+\frac{p}{100}\right)}$$

Sijoitetaan yhtälöön $K = 1000$, $k = 500$ ja $p = 2$ sekä lasketaan aika t.

$$t = \frac{\lg\left(\frac{K}{k}\right)}{\lg\left(1 + \frac{p}{100}\right)} \qquad \| \; K = 1000,\ k = 500,\ p = 2$$

$$t = \frac{\lg\left(\frac{1000}{500}\right)}{\lg\left(1 + \frac{2}{100}\right)}$$

$$t = \frac{\lg(2)}{\lg(1{,}02)}$$

$$t = 35{,}002\ldots$$

$$t \approx 35$$ 1p (yht. 2p)

Ratkaisussa voidaan käyttää muitakin kantalukuja kuin 10.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

4. Suorat (12 p.)

Aineisto:

4. A Kuva: GeoGebra-kuvakaappaus

Kuvaan 4.A on piirretty kuusi suoraa ja kolme pistettä. Alla on kuuden suoran yhtälöt. Valitse kunkin yhtälön kohdalta, esittääkö se kuvassa näkyvää pisteen A, B tai C kautta kulkevaa suoraa vai ei. Oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

4.1. $y = 2x$ (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen A kautta.", "Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen B kautta.", "Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen C kautta.", "Suoraa ei ole piirretty kuvaan.".

4.2. $y = -2x - 5$ (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen A kautta.", "Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen B kautta.", "Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen C kautta.", "Suoraa ei ole piirretty kuvaan.".

4.3. $y - 2 = x - 3$ (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen A kautta.", "Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen B kautta.", "Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen C kautta.", "Suoraa ei ole piirretty kuvaan.".

4.4. $y - 3 = 3(x + 4)$ (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen A kautta.", "Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen B kautta.", "Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen C kautta.", "Suoraa ei ole piirretty kuvaan.".

4.5. $3y + 7x = 1$ (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen A kautta.", "Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen B kautta.", "Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen C kautta.", "Suoraa ei ole piirretty kuvaan.".

4.6. $y - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}x$ (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen A kautta.", "Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen B kautta.", "Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen C kautta.", "Suoraa ei ole piirretty kuvaan.".

Ratkaisu.

Tehtävässä ei vaadittu perusteluja. Tässä on kuitenkin esitetty perustelut jokaiseen kohtaan 4.1 – 4.6.

Muutetaan jokainen suora ratkaistuun muoton $y = kx + b$. Ratkaistusta muodosta voidaan helposti lukea suoran kulmakerroin k ja suoran ja y-akselin leikkauspiste $(0, b)$.

4.1. $y = 2x$

Suoran yhtälö $y = 2x$ on jo ratkaistussa muodossa. Suoran yhtälöstä nähdään, että kulmakerroin $k = 2$ ja suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 0)$. Kuvassa 4.A ei ole yhtäkään suoraa, joka leikkaisi y-akselin pisteessä $(0, 0)$, joten suoraa $y = 2x$ ei ole piirretty kuvaan.

Vastaus: Suoraa ei ole piirretty kuvaan. 2p (yht. 2p)

4.2. $y = -2x - 5$

Suoran yhtälö $y = -2x-5$ on jo ratkaistussa muodossa. Suoran yhtälöstä nähdään, että kulmakerroin $k = -2$ ja suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -5)$. Kuvassa 4.A on suora, jonka kulmakerroin on -2 ja joka leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -5)$. Kuvan 4.A mukaan tämä suora kulkee pisteen $B = (-4, 3)$ kautta.

Vastaus: Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen B kautta. 2p (yht. 2p)

4.3. $y - 2 = x - 3$

Muutetaan suora $y - 2 = x - 3$ ratkaistuun muotoon.

$$y - 2 = x - 3 \quad \| + 2$$
$$y - 2 + 2 = x - 3 + 2$$
$$y = x - 1.$$

Suoran yhtälöstä nähdään, että kulmakerroin $k = 1$ ja suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -1)$. Kuvassa 4.A ei ole yhtäkään suoraa, joka leikkaisi y-akselin pisteessä $(0, -1)$, joten suoraa $y - 2 = x - 3$ ei ole piirretty kuvaan. Vaihtoehtoisesti voidaan huomata, että kuvaan ei ole piirretty yhtäkään suoraa, jonka kulmakerroin on 1.

Vastaus: Suoraa ei ole piirretty kuvaan. 2p (yht. 2p)

4.4. $y - 3 = 3(x + 4)$

Muutetaan suora $y - 3 = 3(x + 4)$ ratkaistuun muotoon.

$$\begin{aligned} y - 3 &= 3(x + 4) \\ y - 3 &= 3x + 12 \quad \| + 3 \\ y - 3 + 3 &= 3x + 12 + 3 \\ y &= 3x + 15. \end{aligned}$$

Suoran yhtälöstä nähdään, että kulmakerroin $k = 3$ ja suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 15)$. Kuva 4.A on rajattu niin, ettei nähdä, leikkaako jokin suora y-akselin pisteessä $(0, 15)$. Kuvassa 4.A on kuitenkin suora, jonka kulmakerroin on 3. Tämä suora kulkee pisteen $B = (-4, 3)$ kautta. Sijoitetaan yhtälöön pisteen B koordinaatit ja katsotaan, toteuttavatko ne yhtälön.

$$\begin{aligned} &y = 3x + 15 \quad \| x = -4, y = 3 \\ &3 = 3 \cdot (-4) + 15 \\ &3 = -12 + 15 \\ &3 = 3. \end{aligned}$$

Pisteen B koordinaatit toteuttavat pistejoukon yhtälön $y = 3x + 15$, joten suora $y - 3 = 3(x + 4)$ näkyy kuvassa ja se kulkee pisteen B kautta.

Vastaus: Suora näkyy kuvassa ja se kulkee pisteen B kautta. 2p (yht. 2p)

4.5. $3y + 7x = 1$

Muutetaan suora $3y + 7x = 1$ ratkaistuun muotoon.

$$\begin{aligned} 3y + 7x &= 1 \quad \| - 7x \\ 3y + 7x - 7x &= -7x + 1 \\ 3y &= -7x + 1 \quad \| : 3 \\ y &= -\frac{7}{3}x + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Suoran yhtälöstä nähdään, että kulmakerroin $k = -\frac{7}{3}$ ja suora leikkaa y-akselin pisteessä $\left(0, \frac{1}{3}\right)$. Kuvassa 4.A ei ole yhtäkään suoraa, joka leikkaisi y-akselin pisteessä $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, joten suoraa $3y + 7x = 1$ ei ole piirretty kuvaan. Vaihtoehtoisesti voidaan huomata, että kuvaan ei ole piirretty yhtäkään suoraa, jonka kulmakerroin on $-\frac{7}{3}$.

Vastaus: Suoraa ei ole piirretty kuvaan. 2p (yht. 2p)

4.6. $y - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}x$

Muutetaan suora $y - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}x$ ratkaistuun muotoon.

$$\begin{aligned} y - \frac{3}{2} &= \frac{1}{6}x \quad \| + \frac{3}{2} \\ y - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} &= \frac{1}{6}x + \frac{3}{2} \\ y &= \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Suoran yhtälöstä nähdään, että kulmakerroin $k = \frac{1}{6}$ ja suora leikkaa y-akselin pisteessä $\left(0, \frac{3}{2}\right)$. Kuvassa 4.A on suora, jonka kulmakerroin on $\frac{1}{6}$ ja joka leikkaa y-akselin pisteessä $\left(0, \frac{3}{2}\right)$. Tämä suora kulkee pisteen $A = (3, 2)$ kautta.

Vastaus: Suora näkyy kuvassa ja se kulkee pisteen A kautta. 2p (yht. 2p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

5. Lipputulot (12 p.)

Maaotteluun on ostettu $4\,802$ lippua. Pääkatsomon lippu maksaa 35 euroa ja ylä- ja sivukatsomoiden liput 25 euroa. Ottelun lipputuloja kertyi yhteensä $136\,900$ euroa. Kuinka moni katsojista istui pääkatsomossa?

Ratkaisu.

Merkitään pääkatsomoon ostettujen lippujen määrää muuttujalla x. Merkitään muihin katsomoihin ostettujen lippujen määrää muuttujalla y.

Lippuja ostettiin yhteensä 4802, josta saadaan yhtälö

$$x + y = 4802 \quad \text{3p (yht. 3p)} \tag{1}$$

Nimetty kaksi eri muuttujaa = 2p, oikein muodostettu yhtälö = 1p.

Pääkatsomon liput maksoivat 35 €$/\mathrm{kpl}$, ja niitä oli x kappaletta, joten pääkatsomon liput maksoivat yhteensä $35x$. Muiden katsomoiden liput maksoivat 25 €$/\mathrm{kpl}$, joten ne maksoivat yhteensä $25y$.

Kaikki liput maksoivat yhteensä 136900 €, josta saadaan yhtälö

$$35x + 25y = 136900 \quad \text{3p (yht. 6p)} \tag{2}$$

Annetuista tiedoista $35x$ (tai vastaava) = 1p, annetuista tiedoista $25y$ (tai vastaava) = 1p, oikein muodostettu yhtälö = 1p.

Ratkaistaan laskinohjelmalla yhtälöpari (1) ja (2). 2p (yht. 8p)

Muodostettu oikein yhtälöpari = 2p.

$$x = 1685 \quad \text{ja} \quad y = 3117. \quad \text{2p (yht. 10p)}$$

Yhtälöparin ratkaisu oikein = 2p.

Vastaus: Pääkatsomossa istui 1685 katsojaa. 2p (yht. 12p)

Lopullinen vastaus oikein tehtävänannon kysymykseen = 2p.

Yhtälöparin voi ratkaista käsin laskien näin:

Yhtälöstä (1) saadaan

$$x + y = 4802$$

$$y = 4802 - x \tag{3}$$

Sijoitetaan (3) yhtälöön (2).

$$
\begin{aligned}
35x + 25 \cdot (4802 - x) &= 136900 \\
35x + 25 \cdot 4802 - 25 \cdot x &= 136900 \\
10x + 120050 &= 136900 \quad \| - 120050 \\
10x &= 16850 \quad \| : 10 \\
x &= 1685
\end{aligned}
$$

6. Autojen hiilidioksidipäästöt (12 p.)

Autojen hiilidioksidipäästöt ilmoitetaan yksikkönä grammaa/kilometri. EU on päättänyt uusien autojen päästörajoista vuoteen 2030 saakka:

Vuosi	**Päästöraja**
2015	$130\,\mathrm{g/km}$
2020	$95\,\mathrm{g/km}$
2025	$15\,\%$ alempi kuin vuonna 2020
2030	$37{,}5\,\%$ alempi kuin vuonna 2020

1. Kuinka monta prosenttia pienempi on päästöraja vuonna 2020 vuoteen 2015 verrattuna? Anna vastaus $0{,}1$ prosenttiyksikön tarkkuudella. (4 p.)

2. Kuinka monta prosenttia pienempi on tavoiteltu päästöraja vuonna 2030 vuoteen 2025 verrattuna? Anna vastaus $0{,}1$ prosenttiyksikön tarkkuudella. (4 p.)

3. Muodosta laskentaohjelmaa käyttämällä vuosien 2015, 2020, 2025 ja 2030 päästörajoja havainnollistava pylväsdiagrammi. (4 p.)

Ratkaisu.

6.1.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Lasketaan, kuinka paljon vuoden 2020 päästöraja on pienempi kuin vuoden 2015 päästöraja, ja verrataan erotusta vuoden 2015 päästörajaan:

$$\frac{130\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{km}} - 95\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{km}}}{130\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{km}}} \quad \boxed{\text{1p (yht. 1p)}} = \frac{35\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{km}}}{130\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{km}}}$$

$$= 0{,}26923\ldots \quad \boxed{\text{1p (yht. 2p)}}$$

$$= 26{,}923\ldots\,\% \quad \boxed{\text{1p (yht. 3p)}}$$

$$\approx 26{,}9\,\% \quad \boxed{\text{1p (yht. 4p)}}$$

Vastaus: Vuonna 2020 päästöraja on $26{,}9\,\%$ pienempi kuin vuonna 2015 päästöraja.

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Vuoden 2020 päästöraja on vuoden 2015 päästörajasta

$$\frac{95}{130} = 0{,}7307\ldots \quad \text{1p (yht. 1p)} \quad = 73{,}07\ldots\ \%, \quad \text{1p (yht. 2p)}$$

joten vuoden 2020 päästöraja on $100\,\% - 73{,}07\ldots\ \%$ 1p (yht. 3p) $= 26{,}92\ldots\ \%$ $\approx 26{,}9\,\%$ pienempi kuin vuoden 2015 päästöraja.

Vastaus: Vuonna 2020 päästöraja on $26{,}9\,\%$ pienempi kuin vuonna 2015 päästöraja. 1p (yht. 4p)

6.2. Vuoden 2030 päästöraja on $37{,}5\,\%$ alempi kuin vuoden 2020 päästöraja, eli $100\,\% - 37{,}5\,\% = 62{,}5\,\%$ 1p (yht. 1p) vuoden 2020 päästörajasta, siis

$$0{,}625 \cdot 95\,\frac{\text{g}}{\text{km}} = 59{,}375\,\frac{\text{g}}{\text{km}}. \quad \text{1p (yht. 2p)}$$

Vuoden 2025 päästöraja on $15\,\%$ alempi kuin vuoden 2020 päästöraja, eli $100\,\%$ $-15\,\% = 85\,\%$ vuoden 2020 päästörajasta, siis

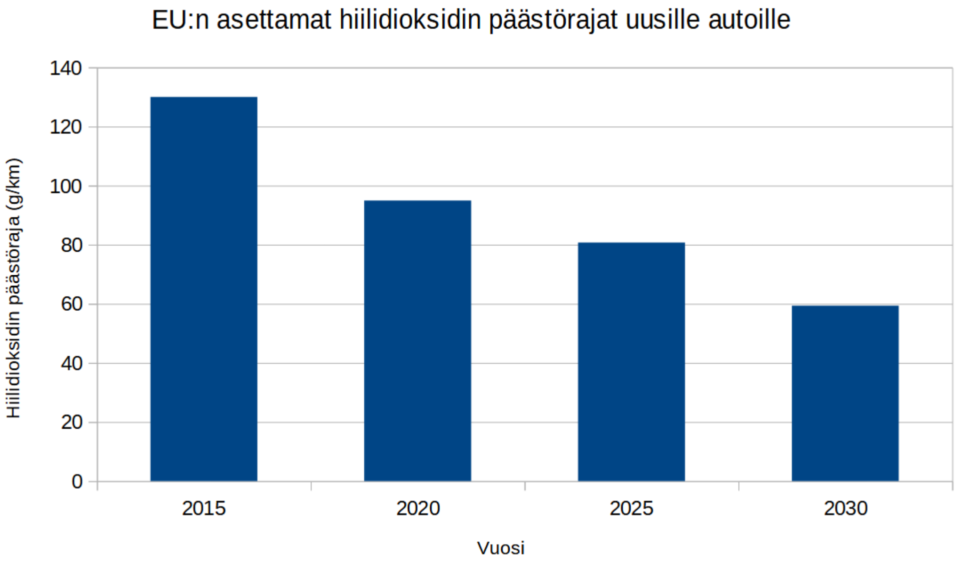
$$0{,}85 \cdot 95\,\frac{\text{g}}{\text{km}} = 80{,}75\,\frac{\text{g}}{\text{km}}. \quad \text{1p (yht. 3p)}$$

Lasketaan, kuinka paljon vuoden 2030 tavoiteltu päästöraja on pienempi kuin vuoden 2025 tavoiteltu päästöraja ja verrataan erotusta vuoden 2025 tavoiteltuun päästörajaan:

$$\begin{aligned}
\frac{80{,}75\,\frac{\text{g}}{\text{km}} - 59{,}375\,\frac{\text{g}}{\text{km}}}{80{,}75\,\frac{\text{g}}{\text{km}}} &= \frac{21{,}375\,\frac{\text{g}}{\text{km}}}{80{,}75\,\frac{\text{g}}{\text{km}}} \\
&= 0{,}26470\ldots \\
&= 26{,}470\ldots\ \% \\
&\approx 26{,}5\,\%
\end{aligned}$$

Vastaus: Vuonna 2030 tavoiteltu päästöraja on $26{,}5\,\%$ pienempi kuin vuonna 2025 tavoiteltu päästöraja. 1p (yht. 4p)

6.3. Piirretään pylväsdiagrammi.



Pisteytys: Pylväskaavio kokonaan oikein 4 p.

- jommaltakummalta tai molemmilta akseleilta puuttuu nimi -1 p.
- päästörajalla ei ole yksikköä -1 p.
- kaavion otsikko puuttuu -1 p.
- pylväät kiinni toisissaan -1 p.
- pylväiden korkeudet väärin max 2 p.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

7. Keno-peli (12 p.)

Aineisto:

7. A Taulukko: Kenotason 4 tulokset, kertoimet ja rivien lukumäärät

Kenossa arvotaan kaksikymmentä (20) numeroa seitsemästäkymmenestä (70) numerosta. Pelin tasolla 4 valitaan neljä numeroa näistä seitsemästäkymmenestä. Näin muodostuu $916\,895$ eri riviä. Tulos ”3 oikein” tarkoittaa, että valituista numeroista täsmälleen 3 kuuluu arvottujen kahdenkymmenen numeron joukkoon jne. Voittosumma saadaan kertomalla valittu panos tuloksen kertoimella (aineisto 7.A).

1. Mikä on pelirivin todennäköisin tulos? Entä mikä on epätodennäköisin tulos? (2 p.)
2. Matti pelaa yhden pelirivin ja hänen panoksensa on 3 euroa. Hän saa tuloksen 4 oikein. Kuinka paljon hän voittaa? (2 p.)
3. Matti pelaa kaksi peliriviä. Mikä on todennäköisyys, että toisella pelirivillä on neljä oikein ja toisella ei yhtään oikein? (4 p.)
4. Miten ”4 oikein” -rivien lukumäärä $4\,845$ lasketaan? (4 p.)

Ratkaisu.

7.1. Pelirivin todennäköisin tulos on ”1 oikein”, koska ”1 oikein” -rivejä on eniten, 392000 kappaletta. 1p (yht. 1p)

Pelirivin epätodennäköisin tulos on ”4 oikein”, koska ”4 oikein” -rivejä on vähiten, 4845 kappletta. 1p (yht. 2p)

Vastaus: Todennäköisin tulos on ”1 oikein” ja epätodennäköisin tulos on ”4 oikein”.

7.2. Pelaajan panos on 3 euroa. Koska pelaaja saa 4 oikein, kerroin on 32. Pelaaja voittaa tällöin $32 \cdot 3\,€ = 96\,€$. 1p+1p (yht. 2p)

Lauseke $32 \cdot 3\,€$ = 1p, oikea vastaus = 1p.

Vastaus: $96\,€$.

7.3. Todennäköisyys sille, että yksittäisellä pelirivillä on neljä oikein, on

$$p_4 = \frac{4845}{916895} = 0{,}00528\ldots$$ 1p (yht. 1p)

Todennäköisyys sille, että yksittäisellä pelirivillä ei ole yhtään oikein, on

$$p_0 = \frac{230300}{916895} = 0{,}25117\ldots$$ 1p (yht. 2p)

Pelaaja saa yhden ”4 oikein” -tuloksen ja yhden ”0 oikein” -tuloksen, jos hän saa ensimmäisellä 4 ja toisella 0 oikein tai ensimmäisellä 0 ja toisella 4 oikein.

$$P(\text{Ensimmäisellä } 4 \text{ ja toisella } 0 \text{ TAI ensimmäisellä } 0 \text{ ja toisella } 4 \text{ oikein})$$

$$= 0{,}00528\ldots \cdot 0{,}25117\ldots + 0{,}25117\ldots \cdot 0{,}00528\ldots$$ 1p (yht. 3p)

$$= 0{,}002654\ldots$$

$$\approx 0{,}00265$$

Vastaus: $0{,}00265$ 1p (yht. 4p)

YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 23.3.2021) vastaus on annettu vain yhden merkitsevän numeron tarkkuudella. Niinkin epätarkka vastaus hyväksytään, mutta olisi parempi käyttää suurempaa tarkkuutta, koska tehtävänannon lukuarvot ovat tarkkoja arvoja.

7.4. Rivissä ”4 oikein” kaikki 4 numeroa on valittu 20 oikean numeron joukosta. Tämä voidaan tehdä $\binom{20}{4} = 4845$ eri tavalla, joten ”4 oikein” -rivien määrä on 4845.
4p (yht. 4p)

Vastaus: $\binom{20}{4} = 4845$.

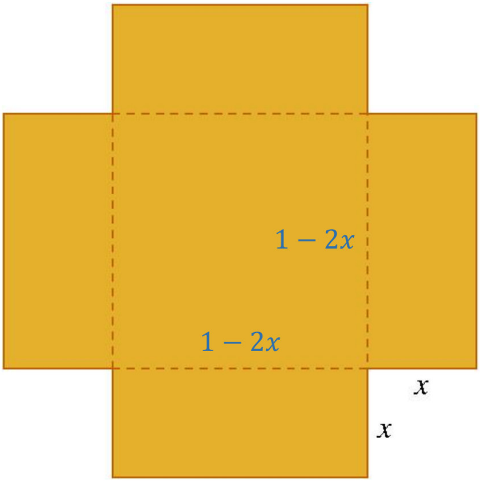
Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

8. Taitellaan pahvista laatikko (12 p.)
Aineisto:

8. A Kuva: Leikattu pahvilevy

Neliön muotoisen pahvilevyn sivun pituus on $1{,}0\,\mathrm{m}$. Sen jokaisesta kulmasta leikataan pois pienempi neliö, jonka sivun pituus on x (aineisto 8.A). Tämän jälkeen kaikki neljä reunoille jäänyttä suorakulmion muotoista osaa taitetaan 90 astetta ylöspäin ja teipataan kiinni vierekkäisiin osiin niin, että syntyy suorakulmainen laatikko ilman kantta. Millä muuttujan x arvolla tämän laatikon tilavuus on mahdollisimman suuri?

Ratkaisu.



Koska pahvilevyn sivu on $1{,}0\,\mathrm{m}$ ja jokaisesta kulmasta poistetaan neliö, jonka sivu on x, jää kuvassa katkoviivalla merkityn neliön sivun pituudeksi $1 - 2x$. 2p (yht. 2p)

Taittamalla saadun laatikon pohjan ala on siten

$$A = (1 - 2x)^2$$ 1p (yht. 3p)

ja korkeus on x. Yleisesti suorakulmaisen särmiön tilavuus $V = Ah$. Laatikon tilavuus muuttujan x funktiona on siten

$$f(x) = Ax = (1 - 2x)^2 x.$$ 1p (yht. 4p)

Leikattavan osan sivu ei saa olla negatiivinen, joten saadaan ehto

$$x \geq 0.$$

Myöskään pohjaneliön sivu ei saa olla negatiivinen, joten saadaan ehto

$$1 - 2x \geq 0.$$

Ratkaistaan laskinohjelmalla tämä epäyhtälö. Saadaan

$$x \leq \frac{1}{2}.$$

Epäyhtälön voisi ratkaista käsin näin:

$$\begin{aligned} 1 - 2x &\geq 0 \quad \| + 2x \\ 1 &\geq 2x \quad \| : 2 \quad (> 0) \\ \frac{1}{2} &\geq x \\ x &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Muuttujan x täytyy siis olla väliltä

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \boxed{\text{1p (yht. 5p)}} \tag{1}$$

Laskinohjelmalla saadaan funktion f derivaatta:

$$f'(x) = 12x^2 - 8x + 1. \quad \boxed{\text{1p (yht. 6p)}}$$

Huomaa! Laskinohjelma saattaa antaa derivaatan lausekkeen hyvin erinäköisenä kuin tässä, mutta lauseke voi silti olla oikein. Funktion voisi derivoida käsin näin:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - 2x)^2 x \\ f(x) &= (1 - 2x)(1 - 2x)x \\ f(x) &= (1^2 - 1 \cdot 2x - 1 \cdot 2x + 2x \cdot 2x)x \\ f(x) &= (4x^2 - 4x + 1)x \\ f(x) &= 4x^3 - 4x^2 + x \\ f'(x) &= 3 \cdot 4x^{3-1} - 2 \cdot 4x^{2-1} + 1 \\ f'(x) &= 12x^2 - 8x + 1 \end{aligned}$$

Funktion f derivaatan nollakohdat saadaan yhtälöstä

$$12x^2 - 8x + 1 = 0.$$

Laskinohjelmalla saadaan ratkaisut

$$x = \frac{1}{6} \quad \text{tai} \quad x = \frac{1}{2}.$$ 1p+1p (yht. 8p)

Yhtälön voisi ratkaista käsin toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Kertoimet ovat $a = 12$, $b = -8$ ja $c = 1$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1}}{2 \cdot 12}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{24}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{24}$$

$$x = \frac{8 \pm 4}{24}$$

$$x = \frac{8 + 4}{24} \quad \text{tai} \quad x = \frac{8 - 4}{24}$$

$$x = \frac{12}{24} \quad \text{tai} \quad x = \frac{4}{24}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{1}{6}.$$

Funktio saa suurimman arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa. Lasketaan laskinohjelmalla funktion arvot näissä kohdissa.

$$f(0) = (1 - 2 \cdot 0) \cdot 0 = 0$$ 1p (yht. 9p)

$$f\left(\frac{1}{6}\right) = 0{,}0740\ldots$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$ 1p (yht. 10p)

Suurin arvo saadaan muuttujan arvolla

$$x = \frac{1}{6} \boxed{\text{1p (yht. 11p)}} = 0{,}1666\ldots \approx 0{,}17\,(\mathrm{m}). \boxed{\text{1p (yht. 12p)}}$$

Vastaus: $x = 0{,}17\,\mathrm{m}$.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

9. Pii (12 p.)

Aineisto:

9. A Taulukko: Piin desimaalit

Taulukossa 9.A on luvun π ensimmäiset 297 desimaalia, joista on muodostettu 99 lukua jakamalla ne kolmen numeron ryhmiin. Selvitä näin syntyneiden 99 luvun

1. vaihteluväli (2 p.)
2. moodi ja mediaani (3 p.)
3. keskiarvo ja keskihajonta (3 p.)
4. Pohdi, vaikuttaako tämän aineiston perusteella siltä, että nämä 99 lukua ovat jakautuneet normaalijakauman mukaisesti. (4 p.)

Ratkaisu.

9.1. Määritetään taulukkolaskentaohjelmalla pienin ja suurin luku.

LibreOffice Calc -ohjelmalla ratkaisu näyttää tältä:

	A	B	C	D
1	141		Pienin luku	=MIN(A1:A99)
2	592		Suurin luku	=MAKS(A1:A99)

	A	B	C	D
1	141		Pienin luku	34
2	592		Suurin luku	998

Luvuista pienin on 34 ja suurin on 998, 1p (yht. 1p) joten vaihteluväli on $[34, 998]$. 1p (yht. 2p)

Vastaus: Vaihteluväli on $[34, 998]$.

Vastaukseksi hyväksytään myös vaihteluvälin pituus $998 - 34 = 964$.

9.2. Määritetään taulukkolaskentaohjelmalla lukujen moodi ja mediaani.

	A	B	C	D
1	141		Pienin luku	=MIN(A1:A99)
2	592		Suurin luku	=MAKS(A1:A99)
3	653		Moodi	=MOODI(A1:A99)
4	589		Mediaani	=MEDIAANI(A1:A99)

1p (yht. 1p)

	A	B	C	D
1	141		Pienin luku	34
2	592		Suurin luku	998
3	653		Moodi	648
4	589		Mediaani	462

Moodi on 648 ja mediaani on 462. 1p+1p (yht. 2p)

Vastaus: Moodi on 648 ja mediaani on 462.

9.3. Määritetään taulukkolaskentaohjelmalla lukujen keskiarvo ja keskihajonta.

	A	B	C	D
1	141		Pienin luku	=MIN(A1:A99)
2	592		Suurin luku	=MAKS(A1:A99)
3	653		Moodi	=MOODI(A1:A99)
4	589		Mediaani	=MEDIAANI(A1:A99)
5	793		Keskiarvo	=KESKIARVO(A1:A99)
6	238		Keskihajonta	=KESKIHAJONTA.P(A1:A99)

1p (yht. 1p)

	A	B	C	D
1	141		Pienin luku	34
2	592		Suurin luku	998
3	653		Moodi	648
4	589		Mediaani	462
5	793		Keskiarvo	493,020202020202
6	238		Keskihajonta	278,151182632681

Keskiarvo on $439{,}020\ldots \approx 493$. Keskihajonta on $278{,}151\ldots \approx 278$. 1p+1p (yht. 3p)

Vastaus: Keskiarvo on 493 ja keskihajonta on 278.

Tehtävässä käsketään tutkia syntyneitä 99 lukua eikä kaikkia piin desimaaleja, joten 99 lukua on koko tutkittava populaatio. Tällöin kuuluu yllä olevan ratkaisun tapaan käyttää toimintoa `KESKIHAJONTA.P`, joka laskee keskihajonnan koko populaatiosta (jakajana n). Ratkaisu kuitenkin hyväksytään myös, jos on käytetty toimintoa `KESKIHAJONTA`, joka laskee otoskeskihajonnan (jakajana $n-1$). Tällöin vastaukseksi saadaan $279{,}566\ldots \approx 280$.

9.4.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Järjestetään luvut suuruusjärjestykseen.

	A
1	34
2	67
3	86
4	93
5	102
6	105
7	105
8	117
9	117
10	128
11	128
12	141
13	141
14	145

Rivien numeroiden perusteella huomataan, että luvut jakautuvat seuraavasti:

Väli	Lukujen määrä
$[0, 99]$	4
$[100, 199]$	14
$[200, 299]$	13
$[300, 399]$	11
$[400, 499]$	10
$[500, 599]$	10
$[600, 699]$	13
$[700, 799]$	5
$[800, 899]$	6
$[900, 999]$	13

2p (yht. 2p) Havainnollistettu lukujen jakautumista (esimerkiksi taulukon avulla)

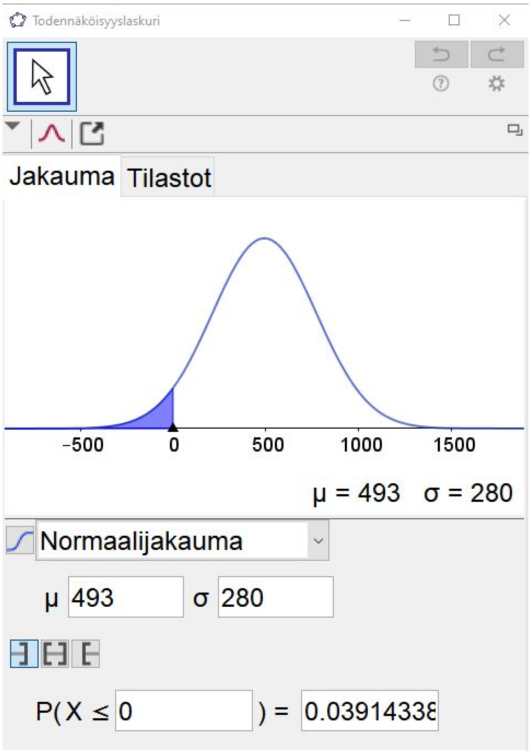
Jos luvut noudattaisivat normaalijakaumaa, lukuja olisi eniten keskiarvon tuntumassa ja vähiten kaukana keskiarvosta. 1p (yht. 3p) Välillä $[400, 499]$ olisi eniten lukuja ja välillä $[500, 599]$ toiseksi eniten. Näin ei kuitenkaan ole, joten luvut eivät näytä noudattavan normaalijakaumaa. 1p (yht. 4p)

Vastaus: Ei vaikuta siltä, että luvut ovat jakautuneet normaalijakauman mukaisesti.

Jakaumaa voidaan käsitellä myös esimerkiksi pylväsdiagrammin avulla ja päätyä samoihin johtopäätöksiin kuin yllä. Pylväskaavion piirtäminen ei kuitenkaan ole välttämätöntä.

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Jos luvut olisivat jakautuneet normaalijakauman mukaisesti, niin osan luvuista pitäisi olla pienempiä kuin nolla.



2p (yht. 2p) Havainnollistettu lukujen jakautumista

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla nähdään, että noin $3{,}9\ \%$ kaikista luvuista olisi pienempiä kuin nolla, jos luvut noudattaisivat normaalijakaumaa. 1p (yht. 3p) Yhtäkään negatiivista lukua ei kuitenkaan ole, joten luvut eivät näytä noudattavan normaalijakaumaa. 1p (yht. 4p)

Vastaus: Ei vaikuta siltä, että luvut ovat jakautuneet normaalijakauman mukaisesti.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

10. Koiran ikä (12 p.)

Erään vanhan käsityksen mukaan koiran ikä kerrotaan luvulla 7, jotta saadaan kuva siitä, kuinka vanhaa ihmistä koira vastaa. Esimerkiksi vanhimmat ihmiset ovat yli 100-vuotiaita, mutta koirat elävät harvoin yli 20-vuotiaiksi. Viime aikoina on esitetty muitakin tapoja tulkita koiran ikää. Tarkastellaan seuraavaa mallia, joka perustuu logaritmiin.
Jos koiran todellinen ikä on $t\,(\text{vuotta})$, niin 10-kantaisen logaritmin avulla lausekkeella $37 \lg t + 31$ voidaan laskea vastaava ihmisikä.

1. Koiran todellinen ikä on 2 vuotta. Mitä ihmisikää se vastaa tämän mallin mukaan? (3 p.)
2. Koiran ikää vastaava ihmisikä mallin mukaan on 25 vuotta. Mikä on koiran todellinen ikä? (3 p.)
3. Arvioi, kuinka hyvin malli toimii alhaisen ja korkean iän kohdalla. (6 p.)

Ratkaisu.

10.1. Koiran todellinen ikä on $t_1 = 2$. Mallin mukaan se vastaa ihmisikää

$$\begin{aligned} T_1 &= 37 \lg(t_1) + 31 \\ &= 37 \lg(2) + 31 \quad \boxed{\text{1p (yht. 1p)}} \\ &= 42{,}13\ldots \quad \boxed{\text{1p (yht. 2p)}} \\ &\approx 42 \quad \boxed{\text{1p (yht. 3p)}} \end{aligned}$$

Vastaus: Mallin mukaan koiran todellinen ikä 2 vuotta vastaa ihmisikää 42 vuotta.

10.2. Mallin mukainen ihmisikä on $T_2 = 25$. Ratkaistaan tätä vastaava koiran todellinen ikä t_2 CAS-ohjelman solve-toiminnon avulla. Alla olevassa laskelmassa on esimerkin vuoksi näytetty välivaiheet, miten ratkaisun voisi tehdä ilman laskinohjelman apua.

$$
\begin{aligned}
25 &= 37\lg(t_2) + 31 \quad \boxed{\text{2p (yht. 2p)}} \qquad \| - 31\\
25 - 31 &= 37\lg(t_2) + 31 - 31\\
-6 &= 37\lg(t_2) \quad \| : 37\\
\frac{-6}{37} &= \frac{\cancel{37}\lg(t_2)}{\cancel{37}}\\
\frac{-6}{37} &= \lg(t_2)\\
10^{\frac{-6}{37}} &= t_2\\
t_2 &= 10^{\frac{-6}{37}}\\
&= 0{,}68839\ldots \text{ (vuotta)}
\end{aligned}
$$

Muunnetaan vastaus kuukausiksi:

$$
\begin{aligned}
t_2 &= 12 \cdot 0{,}68839\ldots\\
&= 8{,}26074\ldots\\
&\approx 8{,}3 \text{ (kuukautta)} \quad \boxed{\text{1p (yht. 3p)}}
\end{aligned}
$$

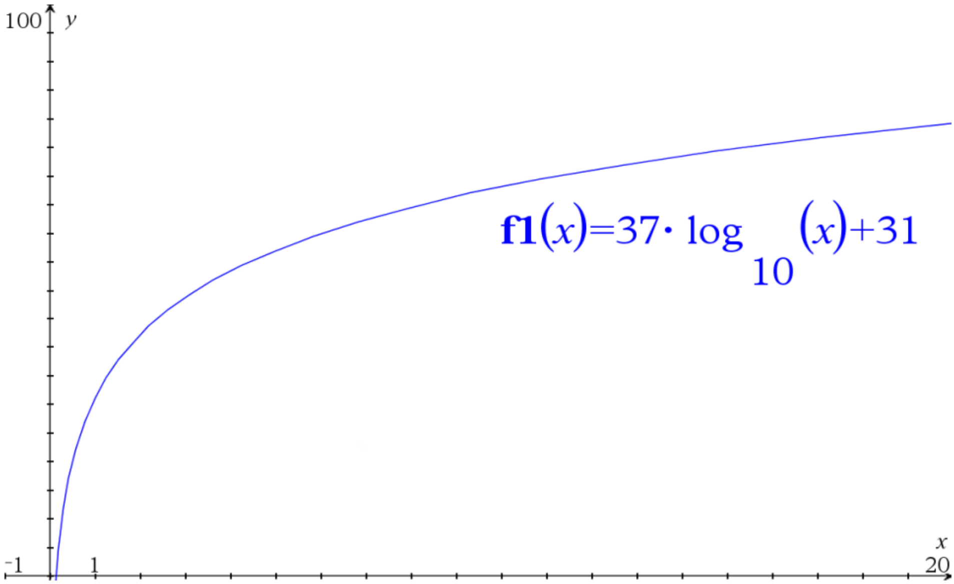
Vastaus: Koiran todellinen ikä on $8{,}3\,\mathrm{kk}$.

Myös vastaus $8\,\mathrm{kk}$ hyväksytään asiayhteyden takia, vaikka siinä on vähemmän merkitseviä numeroita kuin käytetyssä lähtöarvossa.

10.3.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Piirretään kuvaaja mallin antamasta ihmisiästä koiran todellisen iän funktiona.



Kuvasta nähdään, että malli antaa koiran todellista ikää vastaavaksi ihmisiäksi negatiivisen luvun, kun koira on parin kuukauden ikäinen tai nuorempi. Malli ei siis toimi hyvin näin alhaisen iän tapauksessa. 3p (yht. 3p)

Tehtävänannon mukaan koirat elävät harvoin yli 20-vuotiaiksi ja ihmiset elävät joskus yli 100-vuotiaiksi. Kuvaajasta nähdään, että koiran todellinen 20 vuoden ikä vastaa mallin mukaan noin 80 vuoden ihmisen ikää. Malli antaa siis korkean iän kohdalla koiran ikää vastaavaksi ihmisen iäksi jonkin verran liian alhaisen lukeman. 3p (yht. 6p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Lasketaan kohdan 1 tapaan, mitä ihmisen ikää mallin mukaan vastaa koiran todellinen ikä $t = 20$ vuotta.

$$\begin{aligned} T_1 &= 37\lg(t) + 31 \\ &= 37\lg(20) + 31 \\ &= 79{,}13\ldots \\ &\approx 79 \end{aligned}$$

Tehtävänannon mukaan koirat elävät harvoin yli 20-vuotiaiksi ja ihmiset elävät joskus yli 100-vuotiaiksi. Koiran todellinen 20 vuoden ikä vastaa mallin mukaan noin 79 vuoden ihmisen ikää. Malli antaa siis korkean iän kohdalla koiran ikää vastaavaksi ihmisen iäksi liian alhaisen lukeman. 3p (yht. 3p)

Korkean iän kohdalla mallia voisi tarkastella myös laskemalla, mitä koiran todellista ikää ihmisen ikä 100 vuotta vastaisi. Vastaukseksi tulisi 73 vuotta, joka on selkeästi liian korkea, sillä tehtävänannon mukaan koirat elävät harvoin yli 20-vuotiaiksi.

Ratkaistaan, mitä koiran todellista ikää vastaa mallin antama ihmisen ikä 0 vuotta.

$$0 = 37\lg(t) + 31$$

CAS-ohjelman avulla saadaan:

$$t = 0{,}1452\ldots \text{ (vuotta)}$$

Muunnetaan vastaus kuukausiksi:

$$\begin{aligned} t &= 12 \cdot 0{,}1452\ldots \text{ (kk)} \\ &= 1{,}74\ldots \text{ kk} \end{aligned}$$

Jos koiran todellinen ikä on tätä pienempi, malli antaa vastaavaksi ihmisiäksi negatiivisen luvun. Malli ei siis toimi hyvin näin alhaisen iän tapauksessa. 3p (yht. 6p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

11. Kirja-arvioita (12 p.)

Kirjaviisauteen kyllästynyt dosentti aikoo myydä kaikki kirjansa antikvariaattiin. Tarjouspyyntöä varten hän arvioi kirjojen lukumäärää.

1. Kolmella umpimähkäisellä mittauksella hän saa seuraavat tulokset:
   Mittaus 1: 25 kirjaa yhteensä $65{,}0\,\mathrm{cm}$
   Mittaus 2: 28 kirjaa yhteensä $76{,}0\,\mathrm{cm}$
   Mittaus 3: 14 kirjaa yhteensä $30{,}0\,\mathrm{cm}$

   Missä näistä kolmesta mittauksesta on keskimäärin paksuimmat kirjat? (3 p.)

2. Kirjoja on yhteensä $38{,}07$ hyllymetriä. Dosentti arvioi kirjojen kokonaismäärää kohdan 1 kolmen mittauksen perusteella. Hänellä on mielessään kaksi menetelmää:

   Menetelmä 1: Jaan pituuden $38{,}07$ kohdassa 1 laskettujen keskiarvojen keskiarvolla.

   Menetelmä 2: Lasken kolmen mittauksen kirjamäärät ja yhteispaksuuden ja saan näin arvion keskimääräisen kirjan paksuudesta. Jaan pituuden $38{,}07$ tällä luvulla.

   Laske kummankin menetelmän mukainen arvio kirjojen kokonaismäärälle ja arvioi, kumpi menetelmä on parempi. (9 p.)

Ratkaisu.

11.1. Mittauksessa kirjojen keskimääräinen paksuus on kirjojen yhteispaksuus jaettuna kirjojen lukumäärällä. Lasketaan kirjojen keskimääräinen paksuus kussakin mittauksessa:

Mittaus 1:

$$x_1 = \frac{65{,}0\,\mathrm{cm}}{25} = 2{,}6\,\mathrm{cm}.$$ 1p (yht. 1p)

Mittaus 2:

$$x_2 = \frac{76{,}0\,\mathrm{cm}}{28} = 2{,}7142\ldots\,\mathrm{cm} \approx 2{,}7\,\mathrm{cm}$$

Mittaus 3:

$$x_3 = \frac{30{,}0\,\mathrm{cm}}{14} = 2{,}1428\ldots\,\mathrm{cm} \approx 2{,}1\,\mathrm{cm}$$ 1p (yht. 2p)

Vastaus: Mittauksessa 2 on keskimäärin paksuimmat kirjat. 1p (yht. 3p)

11.2. Kirjojen kokonaispaksuus on $38{,}07\,\mathrm{m} = 3807\,\mathrm{cm}$.

Menetelmä 1:

Lasketaan kohdassa 1 laskettujen keskiarvojen keskiarvo:

$$
\begin{aligned}
x_a &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\
&= \frac{2{,}6\,\mathrm{cm} + 2{,}7142\ldots\,\mathrm{cm} + 2{,}1428\ldots\,\mathrm{cm}}{3} \\
&= \frac{\frac{65{,}0\,\mathrm{cm}}{25} + \frac{76{,}0\,\mathrm{cm}}{28} + \frac{30{,}0\,\mathrm{cm}}{14}}{3} \quad \leftarrow \text{vaihtoehtoinen laskutapa} \\
&= 2{,}4857\ldots\,\mathrm{cm} \quad \boxed{\text{1p (yht. 1p)}}
\end{aligned}
$$

Lasketaan menetelmän 1 mukainen arvio kirjojen kokonaismäärälle:

$$
N_a = \frac{3807\,\mathrm{cm}}{2{,}4857\ldots\,\mathrm{cm}} = 1531{,}5\ldots \approx 1530. \quad \boxed{\text{1p (yht. 2p)}}
$$

Menetelmä 2:

Mittausten kirjamäärät ovat yhteensä $25 + 28 + 14 = 67$ $\boxed{\text{1p (yht. 3p)}}$ ja yhteispaksuus on $65{,}0\,\mathrm{cm} + 76{,}0\,\mathrm{cm} + 30{,}0\,\mathrm{cm} = 171{,}0\,\mathrm{cm}$. $\boxed{\text{1p (yht. 4p)}}$ Näiden avulla saadaan arvio keskimääräisen kirjan paksuudesta:

$$
x_b = \frac{171{,}0\,\mathrm{cm}}{67} = 2{,}5522\ldots\,\mathrm{cm} \quad \boxed{\text{1p (yht. 5p)}}
$$

Vaihtoehtoisesti olisi voitu suoraan muodostaa lauseke:

$$
x_b = \frac{65{,}0\,\mathrm{cm} + 76{,}0\,\mathrm{cm} + 30{,}0\,\mathrm{cm}}{25 + 28 + 14} = 2{,}5522\ldots\,\mathrm{cm}
$$

Lasketaan menetelmän 2 mukainen arvio kirjojen kokonaismäärälle:

$$
N_b = \frac{3807\,\mathrm{cm}}{2{,}5522\ldots\,\mathrm{cm}} = 1491{,}6\ldots \approx 1490. \quad \boxed{\text{2p (yht. 7p)}}
$$

Menetelmässä 1 lasketaan kolmesta luvusta keskiarvo, minkä avulla lasketaan arvio kirjojen kokonaismäärästä. Näin ollen kullakin näistä kolmesta luvusta on yhtä suuri painoarvo lopullisessa tuloksessa. Nämä kolme lukua saatiin kuitenkin keskiarvoina eri määristä kirjoja, sillä mittauksissa kirjojen lukumäärät olivat 25, 28 ja 14. Näin ollen eri mittauksissa olevat kirjat saivat eri painoarvon lopullisessa arviossa. Menetelmässä 2 laskettiin keskimääräinen paksuus kaikkien mittausten kirjojen avulla siten, että kukin kirja sai saman painoarvon laskelmassa. Mittausten kirjat valittiin umpimähkään, joten ei ole syytä antaa kirjoille keskenään eri suuruisia painoarvoja arviossa, eli menetelmä 2 on parempi. 2p (yht. 9p)

Huom! YTL:n hyvän vastauksen piirteiden (luettu 23.3.2021) mukaan selityksestä sai 2p, jos kertoi ensimmäisen menetelmän ongelmasta. Ei siis luultavasti vaadittu sen selittämistä, miksi toisessa menetelmässä ei ole samoja ongelmia.

Tässä ei tarvinnut ottaa kantaa siihen, että mittauksissa saattoi vahingossa olla samoja kirjoja. Sen käsittely tekee tilanteesta hieman monimutkaisemman.

Vastaus: Menetelmällä 1 saadaan kirjojen kokonaismääräksi 1532 ja menetelmällä 2 1492. Menetelmä 2 on parempi.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

12. Asunnon ostaminen (12 p.)

Jessi on ostamassa asuntoa ja on löytänyt kaksi vaihtoehtoa, jotka ovat hänen mielestään yhtä mukavia. Hän valitsee asunnon taloudellisin perustein. Asuntojen tiedot ovat seuraavat:

Asunto 1: 2 h + k, 47 m^2, myyntihinta 89 000 €, yhtiövastike 220 $€/\mathrm{kk}$

Asunto 2: 1 h + avok. + s, 42 m^2, myyntihinta 96 000 €, yhtiövastike 147 $€/\mathrm{kk}$

1. Laske asuntojen neliöhinnat. (2 p.)
2. Jessillä on 19 000 euroa säästöjä. Hän aikoo maksaa loppuosan asunnon hinnasta ottamalla kymmenen vuoden tasaerälainan, jonka vuosikorko on 2,4 $\%$. Kuinka paljon rahaa Jessiltä kuluu kymmenen vuoden aikana korkoihin ja vastikkeisiin näissä kahdessa eri asuntovaihtoehdossa? Lainaa lyhennetään kuukausittain. (7 p.)
3. Kuvaile sanallisesti, mitä muita seikkoja kannattaa ottaa huomioon, jos halutaan tarkemmin arvioida näiden kahden asuntovaihtoehdon kokonaisedullisuutta. (3 p.)

Ratkaisu.

Myyntihinnat:

$$H_1 = 89000\,€$$
$$H_2 = 96000\,€$$

Yhtiövastikkeet:

$$y_1 = 220\ €/\mathrm{kk}$$
$$y_2 = 147\ €/\mathrm{kk}$$

Neliömäärät:

$$N_1 = 47\,\mathrm{m}^2$$
$$N_2 = 42\,\mathrm{m}^2$$

12.1. Oletetaan, että yhtiövastike ei sisällä rahoitusvastiketta, jolloin neliöhinta määräytyy myyntihinnan perusteella.

Asunnon 1 neliöhinta:

$$h_1 = \frac{H_1}{N_1} = \frac{89000\,€}{47\,\mathrm{m}^2} = 1893{,}617\ldots\ €/\mathrm{m}^2 \approx 1893{,}62\ €/\mathrm{m}^2.$$ 1p (yht. 1p)

Asunnon 2 neliöhinta:

$$h_2 = \frac{H_2}{N_2} = \frac{96000\,€}{42\,\mathrm{m}^2} = 2285{,}714\ldots\ €/\mathrm{m}^2 \approx 2285{,}71\ €/\mathrm{m}^2.$$ 1p (yht. 2p)

Vastaus: Asunnon 1 neliöhinta on $1893{,}62\ €/\mathrm{m}^2$ ja asunnon 2 neliöhinta on $2285{,}71\ €/\mathrm{m}^2$.

Asunnon neliöhinta tarkoittaa asunnon hintaa jaettuna ilmoitetulla neliömäärällä, joten lähtöarvot ovat tarkkoja arvoja kohdassa 1, eli järkevä pyöristys on senttien tarkkuudelle.

12.2.

$$\text{Säästöt:}\quad S = 19000\,€$$

$$\text{Korkoprosentti kuukaudelta:}\quad p = \frac{2{,}4}{12} = 0{,}2$$

$$\text{Korkotekijä:}\quad q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{0{,}2}{100} = 1{,}002.$$

Lasketaan korot ja vastikkeet kymmenen vuoden ajalta ensin asunnolle 1.

Yhtiövastikkeet 10 vuoden ajalta asunnolle 1:

$$Y_1 = 10 \cdot 12\,\mathrm{kk} \cdot y_1 = 10 \cdot 12\,\mathrm{kk} \cdot 220\ €/\mathrm{kk} = 26400\,€.$$

Lainan suuruus on

$$K_1 = H_1 - S = 89000\,€ - 19000\,€ = 70000\,€.$$ 1p (yht. 1p)

Laina-ajassa kuukausien määrä on $n = 10 \cdot 12 = 120$. Lasketaan yhden kuukauden aikana maksettava tasaerä annuiteetin kaavalla:

$$\begin{aligned} A_1 &= K_1 \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n} \\ &= 70000\,€ \cdot 1{,}002^{120} \cdot \frac{1-1{,}002}{1-1{,}002^{120}} \\ &= 656{,}710\ldots\,€ \quad \text{1p (yht. 2p)} \end{aligned}$$

Näin ollen koko lainan maksuohjelman ajalta korkoja on yhteensä maksettujen erien summan ja lainapääoman erotus, eli

$$\begin{aligned} R_1 &= 120 \cdot A_1 - K_1 \\ &= 120 \cdot 656{,}710\ldots\,€ \quad \text{1p (yht. 3p)} \quad - 70000\,€ \\ &= 8805{,}319\ldots\,€ \quad \text{1p (yht. 4p)} \end{aligned}$$

Asunnon 1 tapauksessa korkoihin ja vastikkeisiin kuluu siis yhteensä 10 vuoden aikana

$$Y_1 + R_1 = 26400\,€ + 8805{,}319\ldots\,€ = 35205{,}319\ldots\,€ \approx 35200\,€. \quad \text{1p (yht. 5p)}$$

Lasketaan sitten vastaavasti korot ja vastikkeet kymmenen vuoden ajalta asunnolle 2.

Yhtiövastikkeet 10 vuoden ajalta asunnolle 2:

$$Y_2 = 10 \cdot 12\,\mathrm{kk} \cdot y_2 = 10 \cdot 12\,\mathrm{kk} \cdot 147\,€/\mathrm{kk} = 17640\,€.$$

Lainan suuruus on

$$K_2 = H_2 - S = 96000\,€ - 19000\,€ = 77000\,€.$$

Lasketaan yhden kuukauden aikana maksettava tasaerä annuiteetin kaavalla samalla tavalla kuin asunnon 1 tapauksessa:

$$\begin{aligned} A_2 &= K_2 \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n} \\ &= 77000\,€ \cdot 1{,}002^{120} \cdot \frac{1-1{,}002}{1-1{,}002^{120}} \\ &= 722{,}382\ldots\,€ \quad \text{1p (yht. 6p)} \end{aligned}$$

Näin ollen koko lainan maksuohjelman ajalta korkoja on yhteensä maksettujen erien summan ja lainapääoman erotus, eli

$$\begin{aligned} R_2 &= 120 \cdot A_2 - K_2 \\ &= 120 \cdot 722{,}382\ldots\,€ - 77000\,€ \\ &= 9685{,}851\ldots\,€ \end{aligned}$$

Asunnon 2 tapauksessa korkoihin ja vastikkeisiin kuluu siis yhteensä 10 vuoden aikana

$Y_2 + R_2 = 17640\,€ + 9685{,}851\ldots\,€ = 27325{,}851\ldots\,€ \approx 27300\,€.$ 1p (yht. 7p)

Vastaus: Jessiltä kuluu 10 vuoden aikana rahaa korkoihin ja vastikkeisiin asunnon 1 tapauksessa $35200\,€$ ja asunnon 2 tapauksessa $27300\,€$.

Lainan korko voi olla tarkka arvo, jos lainan korkoprosentin on sovittu pysyvän muuttumattomana, mutta on epätodennäköistä, että yhtiövastike säilyisi samana kymmenen vuoden ajan. Tämän takia kohdassa 2 kyseessä on likimääräinen arvio, joten ei ole välttämättä perusteltua pyöristää senttien tarkkuuteen. Näin tarkkaa harkintaa pyöristyksen suhteen tuskin edellytetään, joten luultavasti hyväksytään monia erilaisia pyöristyksiä, aina senttien tarkkuudesta satojen eurojen tarkkuuteen.

12.3. Kokonaisedullisuutta huomioidessa pitää huomioida myös yhtiövastikkeet 10 vuoden jälkeiseltä asumisajalta, 1p (yht. 1p) mahdolliset remonttikustannukset 1p (yht. 2p) sekä asunnon myyntiarvon muutos tulevaisuudessa. 1p (yht. 3p)

Pisteitä voi saada myös seuraavista:

- Asuntojen sijainti voi vaikuttaa kuukausittaisiin liikkumiskustannuksiin,
- Jos asunnot sijaitsevat eri kunnissa, kunnallisveroissa voi olla eroja.

Lisäksi YTL:n hyvän vastauksen piirteiden (luettu 23.3.2021) perusteella pisteitä voi saada seuraavista:

- Inflaation vaikutus,
- Vastikkeen muuttuminen,
- Korkotason muuttuminen.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

13. Funktioiden kuvaajat (12 p.)

Tutkitaan funktioiden

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 7x^4 - 8x^3 - 7x^2 + 8x - 1 \\
g(x) &= -4x^3 + 2x^2 + 6x + 1 \\
h(x) &= \sqrt{4x+2} - 1 \\
p(x) &= |x-3|
\end{aligned}
$$

kuvaajia. Voit vastata kysymyksiin 2–5 kuvaajien perusteella, mutta esitä myös lausekkeeseen perustuva perustelu sille, että ehto todella toteutuu.

Esimerkki: Mikä kuvaajista kulkee pisteen $(0, 1)$ kautta?
Vastaus: Kyseessä on funktion g kuvaaja, sillä muuttujan arvolla $x = 0$ on

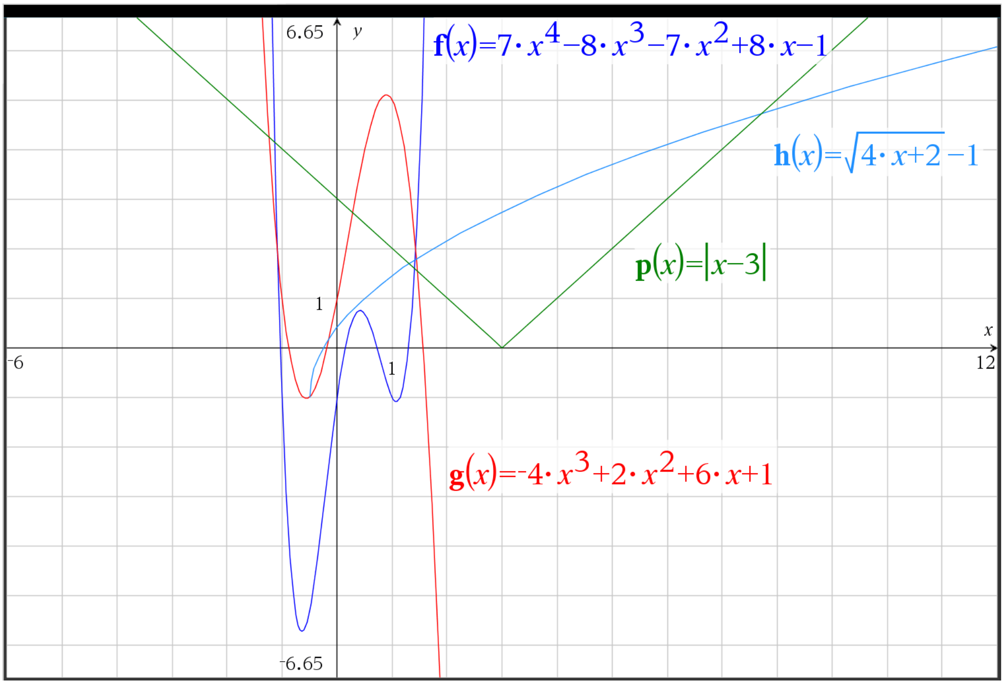
$$g(0) = -4 \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 + 1 = 1.$$

1. Piirrä funktioiden kuvaajat koordinaatistoon. Valitse akselien mittakaavat sopiviksi. (2 p.)
2. Mikä kuvaajista leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 3)$? (2 p.)
3. Minkä funktion derivaatalla on nollakohta muuttujan arvolla $x \approx 0{,}4$? (2 p.)
4. Mikä funktioista saa ainoastaan lukua 1 suurempia arvoja, kun $x > 1$? (3 p).
5. Mikä kuvaajista leikkaa x-akselin neljä kertaa? (3 p.)

Ratkaisu.

13.1. Piirretään laskinohjelmalla funktiot samaan koordinaatistoon.

Akselien mittakaavat tulee valita sopivaksi niin, että piirretyt funktiot näkyvät kuvassa selkeästi.



2p (yht. 2p)

13.2. Funktion p kuvaaja näyttää leikkaavan y-akselin pisteessä $(0,3)$.

Koska $p(0)=|0-3|=|-3|=3$, niin funktion p kuvaaja leikkaa y-akselin pisteessä $(0,3)$. Kuvaajien perusteella muut funktiot eivät leikkaa y-akselia pisteessä $(0,3)$. 1p+1p (yht. 2p)

Pisteytys: oikea funktio 1p, perustelut 1p.

13.3. Derivaatan nollakohdassa funktion kuvaaja kulkee vaakasuoraan. Funktion f kuvaaja näyttäisi kulkevan vaakasuoraan kohdassa $x\approx 0{,}4$, joten funktiolla f näyttäisi olevan derivaatan nollakohta muuttujan arvolla $x\approx 0{,}4$.

Derivoidaan funktio $f(x)=7x^4-8x^3-7x^2+8x-1$.

Laskinohjelmasta saadaan $f'(x)=28x^3-24x^2-14x+8$.

Derivaatan nollakohdat ovat laskinohjelmalla laskettuna $x\approx -0{,}6$, $x\approx 0{,}4$ ja $x\approx 1{,}1$.

Siis funktion f derivaatalla on nollakohta muuttujan arvolla $x\approx 0{,}4$.

Muiden funktioiden kuvaajat eivät kulje vaakasuorasti kohdassa $x \approx 0{,}4$, joten niillä ei ole derivaatan nollakohtaa muuttujan arvolla $x \approx 0{,}4$. 1p+1p (yht. 2p)

Pisteytys: oikea funktio 1p, perustelut 1p.

13.4.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Kuvaajan perusteella vain funktio h saa ainoastaan lukuja 1 suurempia arvoja, kun $x > 1$. 1p (yht. 1p)

Perustellaan tämä epäyhtälöllä

$$h(x) > 1$$

$$\sqrt{4x+2} - 1 > 1$$

Laskinohjelmasta saadaan ratkaisu $x > \frac{1}{2}$. 1p (yht. 2p)

Funktio h saa vain lukua 1 suurempia arvoja, kun $x > \frac{1}{2}$. Siis funktio h saa ainoastaan lukua 1 suurempia arvoja, kun $x > 1$. 1p (yht. 3p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Kun $x > 1$, niin $4x + 2 > 4 \cdot 1 + 2 = 9$, joten kun $x > 1$, niin $h(x) > \sqrt{9} - 1 = 8 > 1$, joten funktio h saa vain lukuja 1 suurempia arvoja, kun $x > 1$. 1p+2p (yht. 3p)

Pisteytys: oikea funktio 1p, perustelut 2p.

13.5. Kuvaajan perusteella vain funktion f kuvaaja leikkaa x-akselin neljä kertaa. 1p (yht. 1p)

$f(-2) = 131 > 0$ ja $f(-1) = -1 < 0$. Koska $f(-2)$ ja $f(-1)$ ovat erimerkkiset, niin funktion f kuvaajan on leikattava x-akseli välillä $]-2, -1[$ päästäkseen pisteestä $(-2, 131)$ pisteeseen $(-1, -1)$.

$f(-1) = -1 < 0$ ja $f(0{,}5) = 0{,}6875 > 0$. Koska $f(-1)$ ja $f(0{,}5)$ ovat erimerkkiset, niin funktion f kuvaajan on leikattava x-akseli välillä $]-1;\ 0{,}5[$ päästäkseen pisteestä $(-1, -1)$ pisteeseen $(0{,}5;\ 0{,}6875)$.

$f(0{,}5) = 0{,}6875 > 0$ ja $f(1) = -1 < 0$. Koska $f(0{,}5)$ ja $f(1)$ ovat erimerkkiset, niin funktion f kuvaajan on leikattava x-akseli välillä $]0{,}5;\ 1[$ päästäkseen pisteestä $(0{,}5;\ 0{,}6875)$ pisteeseen $(1, -1)$.

$f(1) = -1 < 0$ ja $f(2) = 35 > 0$. Koska $f(1)$ ja $f(2)$ ovat erimerkkiset, niin funktion f kuvaajan on leikattava x-akseli välillä $]1, 2[$ päästäkseen pisteestä $(1, -1)$ pisteeseen $(2, 35)$. 1p+1p (yht. 3p)

Pisteytys: Yllä oleva päättely yhdessä x-akselin ylityspisteessä 1p. Yllä oleva päättely muissakin x-akselin ylityspiteissä 1p.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!