Yo-mallivastaukset
Syksy 2020

Pitkä matematiikka

Tiesitkö tämän?

Mafylaiset veivät vuoden 2020 haussa

81%

kaikista lääkiksen pääsykoekiintiön paikoista.

60%

Pk-seudun lukioista käyttää **Mafynettiä.**

Mafynetin oppimateriaalit tulossa kaikkiin LOPS 2021 moduuleihin matematiikkaan, fysiikkaan, kemiaan ja biologiaan!

Mafynetti

Mallivastausten tekijät:

Malliratkaisujen laatimisesta ovat vastanneet MAFY:n toinen perustaja Antti Suominen sekä MAFY:n oppimateriaalitiimi, jonka päätehtävä on laatia ja kehittää MAFY:n lukioon tarkoitettuja oppimateriaaleja.

Oppimateriaalitiimistä mukana olivat Antti Suomisen lisäksi Sampsa Kurvinen, Jori Suominen ja Sakke Suomalainen. Lisäksi työn tukena olivat Tuomas Hauvala ja Matti Virolainen.

Mafy oppimateriaalit

Olemme Helsingissä, Tampereella, Turussa ja Jyväskylässä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys.

Palveluitamme ovat:

- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali
- Lääketieteellisen valmennuskurssit
- Kauppatieteellisen valmennusmateriaalit
- DI-valmennuskurssit
- Yo-kokeisiin valmentavat kurssit

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Käyttöehdot

https://mafy.fi/yhteydenotto

Koetehtävät

Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.

Linkit malliratkaisuihin

1. Yhtälöitä (12 p.)

Oikea vastaus 3 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

1.1. Millä luvun x arvolla yhtälö $\frac{x+1}{2} + \frac{2x-1}{4} = \frac{x}{2}$ on tosi? (3 p.)

$$x = \boxed{}$$

Valintalaatikon vaihtoehdot: -1, $-3/4$, $-1/2$, $-1/4$, 0, $1/4$, $1/2$, $3/4$, 1

1.2. Millä vakion a arvolla yhtälö $(x+a)(x-a) = x^2-81$ on tosi kaikilla reaaliluvuilla x? (3 p.)

$$a = \boxed{}$$

Valintalaatikon vaihtoehdot: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

1.3. Mikä seuraavista vaihtoehdoista pätee yhtälöön $2(x-1) = 3x-(x+1)$? (3 p.)

$$\boxed{}$$

Valintalaatikon vaihtoehdot: ”Yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu.”, ”Yhtälöllä ei ole ratkaisuja.”, ”Jokainen reaaliluku toteuttaa yhtälön.”, ”Ei mikään edellisistä.”

1.4. Määritä sellainen luku b, että piste $(-7, b)$ on suoralla $6x + 4y = 2$. (3 p.)

$$b = \boxed{}$$

Valintalaatikon vaihtoehdot: -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Ratkaisu.

1.1. Vastaus: $x = -\frac{1}{2}$. 3p (yht. 3p)

Miten vastaukseen päädyttiin:

$$
\begin{aligned}
{}^{2)}\frac{x+1}{2} + \frac{2x-1}{4} &= {}^{2)}\frac{x}{2} \\
\frac{2(x+1)}{2\cdot 2} + \frac{2x-1}{4} &= \frac{2x}{2\cdot 2} \\
\frac{2x+2}{4} + \frac{2x-1}{4} &= \frac{2x}{4} \quad \| \cdot 4 \\
2x+2+2x-1 &= 2x \\
2x+2+2x-1-2x &= 0 \\
2x+1 &= 0 \\
2x &= -1 \quad \| : 2 \\
x &= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Vaihtoehtoisesti oli myös mahdollista sijoittaa jokainen annettu vaihtoehto yhtälöön ja tutkia, millä vaihtoehdoista yhtälön eri puolista tuli sama luku.

1.2. Vastaus: $a = 9$. 3p (yht. 6p)

Miten vastaukseen päädyttiin:

$$
\begin{aligned}
(x+a)(x-a) &= x^2 - 81 \\
x^2 - xa + ax - a^2 &= x^2 - 81 \\
x^2 - a^2 &= x^2 - 81 \\
-a^2 &= -81 \\
a^2 &= 81 \\
a = 9 \quad &\text{tai} \quad a = -9.
\end{aligned}
$$

Näistä vastausvaihtoehdoissa oli vain vaihtoehto $a = 9$.

1.3. Vastaus: ”Yhtälöllä ei ole ratkaisuja” 3p (yht. 9p)

Miten vastaukseen päädyttiin:

$$
\begin{aligned}
2(x-1) &= 3x-(x+1)\\
2x-2 &= 3x-x-1\\
2x-2 &= 2x-1\\
-2 &= -1
\end{aligned}
$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

1.4. Vastaus: $b = 11$. 3p (yht. 12p)

Miten vastaukseen päädyttiin:
Piste $(-7, b)$ on suoralla, jos se toteuttaa suoran yhtälön. Sijoitetaan suoran yhtälöön $x = -7$ ja $y = b$.

$$
\begin{aligned}
6\cdot(-7)+4b &= 2\\
-42+4b &= 2\\
4b &= 2+42\\
4b &= 44 \quad \| :4\\
b &= 11.
\end{aligned}
$$

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

2. Kuusi pientä tehtävää (12 p.)

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria, joten toinen potenssi x^2 kirjoitetaan vastauslaatikkoon muodossa `x^2`. Kunkin vastauksen maksimipituus on 15 merkkiä. Vastaukset arvostellaan tietokoneavusteisesti ja ohjeiden noudattamatta jättäminen voi johtaa pistevähennyksiin.

2.1. Sievennä lauseke $(2x)^5(-4x)^{-1}$, kun $x \neq 0$. (2 p.)

Vastaus: $\boxed{}$

2.2. Laske pisteiden $A = (1, -1)$ ja $B = (7, 7)$ välinen etäisyys. (2 p.)

Vastaus: $\boxed{}$

2.3. Derivoi lauseke $x^3 - 2x^2$. (2 p.)

Vastaus: $\boxed{}$

2.4. Ratkaise yhtälö $1 - \sqrt{2}\cos x = 2$, kun $0° \leq x \leq 180°$. Anna vastaus asteina. (2 p.)

Vastaus: $x = \boxed{}$ astetta

2.5. Laske integraali $\displaystyle\int_4^{16} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

Vastaus: $\boxed{}$

2.6. Kolmiossa ABC kulman A suuruus on $42°$ ja kulman B suuruus on $55°$. Sivun AB pituus on $122\,\mathrm{mm}$. Laske sivun BC pituus millimetrin tarkkuudella. (2 p.)

Vastaus: $\boxed{}\,\mathrm{mm}$

Ratkaisu.

2.1. Vastaus: $-8x$^4. 2p (yht. 2p)

Miten vastaukseen päädyttiin:

$$
\begin{aligned}
(2x)^5(-4x)^{-1} &= \frac{(2x)^5}{-4x} \\
&= \frac{\cancelto{2^3}{2^5} \cdot \cancelto{x^4}{x^5}}{-\cancelto{1}{2^2} \cdot \cancelto{1}{x}} \\
&= \frac{2^3 \cdot x^4}{-1} \\
&= -8x^4.
\end{aligned}
$$

2.2. Vastaus: 10. 2p (yht. 4p)

Miten vastaukseen päädyttiin: Pisteiden välinen etäisyys on

$$\sqrt{(1-7)^2 + (-1-7)^2} = 10.$$

2.3. Vastaus: $3x$^2 $- 4x$. 2p (yht. 6p)

Miten vastaukseen päädyttiin: Polynomin derivaatan kaavalla

$$\mathrm{D}\, ax^n = an \cdot x^{n-1}$$

saadaan

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}\, x^3 - 2x^2 &= 3x^{3-1} - 2 \cdot 2x^{2-1} \\
&= 3x^2 - 4x.
\end{aligned}
$$

2.4. Vastaus: 135. 2p (yht. 8p)

Miten vastaukseen päädyttiin:

$$
\begin{aligned}
1-\sqrt{2}\cos(x) &= 2 \\
1-2 &= \sqrt{2}\cos(x) \\
-1 &= \sqrt{2}\cos(x) \quad \| : \sqrt{2} \\
-\frac{1}{\sqrt{2}} &= \cos(x) \\
\cos(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Yhtälön ratkaisut ovat

$$x = 135° + 360° \cdot n \qquad \text{tai} \qquad x = 225° + 360° \cdot n,$$

joista välillä $0° \leq x \leq 180°$ on vain $x = 135°$.

2.5. Vastaus: 4. 2p (yht. 10p)

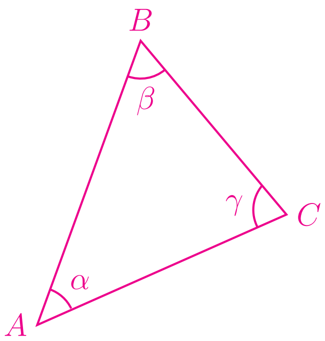
Miten vastaukseen päädyttiin:

$$
\begin{aligned}
\int_4^{16} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int_4^{16} x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{4}^{16}\, 2x^{\frac{1}{2}} \\
&= \Big/_{4}^{16}\, 2\sqrt{x} \\
&= 2\sqrt{16} - 2\sqrt{4} \\
&= 2\cdot 4 - 2\cdot 2 \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

2.6. Vastaus: 82. 2p (yht. 12p)

Miten vastaukseen päädyttiin:

$$|AB| = 122\,\mathrm{mm}$$
$$\alpha = 42°$$
$$\beta = 55°.$$



Kolmion kulmien summa on $180°$, joten

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 42° - 55° = 83°.$$

Sinilauseella:

$$\frac{|AB|}{\sin(\gamma)} = \frac{|BC|}{\sin(\alpha)} \quad \| \cdot \sin(\alpha)$$
$$|BC| = \frac{|AB|}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\alpha)$$
$$|BC| = \frac{122\,\mathrm{mm}}{\sin(83°)} \cdot \sin(42°)$$
$$|BC| = 82{,}246\ldots\ \mathrm{mm}$$
$$|BC| \approx 82\,\mathrm{mm}.$$

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

3. Logistinen regressio (12 p.)
Logistinen regressio on malli, jota käytetään esimerkiksi tutkittaessa riskiä sairastua erilaisiin sairauksiin, kuten esimerkiksi sepelvaltimotautiin.

Logistisessa regressiossa y riippuu muuttujasta x yhtälön

$$\ln \frac{y}{1-y} = a + bx$$

mukaisesti. Vakiot a ja b valitaan mallinnettavan ilmiön mukaan.

1. Ratkaise y logistisen regression yhtälöstä. (6 p.)
2. Olkoon $a = 2$ ja $b = -1$. Millä muuttujan x arvolla y saa arvon $0{,}5$? (6 p.)

Ratkaisu.

1. Ratkaistaan y tehtävänannon yhtälöstä.

$$\ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = a + bx$$

Logaritmin määritelmän nojalla yhtälö $\ln(x) = y$ on yhtäpitävä yhtälön $x = e^y$ kanssa.

$$\begin{aligned}
\frac{y}{1-y} &= e^{a+bx} \quad \boxed{\text{2p (yht. 2p)}} \quad \| \cdot (1-y) \\
y &= (1-y)e^{a+bx} \\
y &= e^{a+bx} - ye^{a+bx} \\
y + ye^{a+bx} &= e^{a+bx} \\
y\left(1 + e^{a+bx}\right) &= e^{a+bx} \quad \| : \left(1 + e^{a+bx}\right) \\
y &= \frac{e^{a+bx}}{1 + e^{a+bx}}. \quad \boxed{\text{4p (yht. 6p)}}
\end{aligned}$$

2. Sijoitetaan $y = 0{,}5$, $a = 2$ ja $b = -1$ tehtävänannon yhtälöön.

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{0{,}5}{1-0{,}5}\right) &= 2 - x \quad \boxed{\text{3p (yht. 3p)}} \\ \ln(1) &= 2 - x \\ 0 &= 2 - x \\ x &= 2. \quad \boxed{\text{3p (yht. 6p)}} \end{aligned}$$

Vastaus: Muuttuja y saa arvon $0{,}5$, kun $x = 2$.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

4. Käyrän tangentteja (12 p.)
Käyrällä

$$y = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x-4)(x-2)(x+1)$$

on kaksi tangenttia, jotka kulkevat pisteen $(2, 0)$ kautta. Määritä niiden yhtälöt.

Vihje: Käyrän tangentti pisteessä $(2, 0)$ antaa toisen kysytyistä yhtälöistä.

Ratkaisu.

Käyrän

$$y = f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

tangentin kulmakerroin kohdassa x on derivaatta

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 2.$$ 1p (yht. 1p)

Selvitetään ensin pisteessä $(2, 0)$ olevan tangentin yhtälö. Sen kulmakerroin on siis

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 2 = -6,$$ 1p (yht. 2p)

joten sen yhtälö on

$$y - 0 = -6(x-2)$$

$$y = -6x + 12.$$ 3p (yht. 5p)

Etsitään sitten tangentti, joka kulkee sekä pisteen $(2, 0)$ kautta että pisteen $(x, f(x))$ kautta, missä $x \neq 2$. Kulmakertoimen lausekkeen avulla saadaan yhtälö

$$\frac{f(x) - 0}{x - 2} = f'(x)$$ 2p (yht. 7p)

$$\frac{(x-4)\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{x-2}} = 3x^2 - 10x + 2$$ 1p (yht. 8p)

$$(x-4)(x+1) = 3x^2 - 10x + 2$$

$$x^2 - 4x + x - 4 = 3x^2 - 10x + 2$$

$$2x^2 - 7x + 6 = 0$$ 1p (yht. 9p)

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

$$\begin{aligned} x &= \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{7 \pm 1}{4} \end{aligned}$$

$$x = 2 \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{3}{2}$$ 1p (yht. 10p)

Vain $x = \frac{3}{2}$ käy ratkaisuksi, koska tarkasteltiin tilannetta, jossa $x \neq 2$. Tangentin kulmakerroin on siis

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 10 \cdot \frac{3}{2} + 2 = -\frac{25}{4}.$$ 1p (yht. 11p)

Näin ollen tangentin yhtälö on

$$\begin{aligned} y - 0 &= -\frac{25}{4}(x - 2) \\ y &= -\frac{25}{4}x + \frac{25}{2}. \end{aligned}$$ 1p (yht. 12p)

Vastaus: Kysyttyjen tangenttien yhtälöt ovat $y = -6x + 12$ ja $y = -\frac{25}{4}x + \frac{25}{2}$.

5. Kolmiot (12 p.)

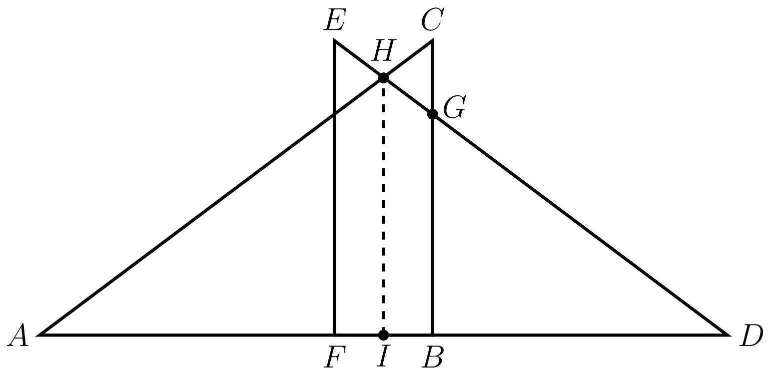
Aineisto:

5. A [Kuva: Kolmiot]

Suorakulmaiset kolmiot ABC ja DEF leikkaavat toisiaan kuvan 5. A mukaisesti. Kolmioiden kateettien pituudet ovat $AB = DF = 4$ ja $BC = EF = 3$. Lisäksi janan BF pituus on 1. Määritä kolmioiden yhteisen osan pinta-ala.

Ratkaisu.

Ratkaisun ymmärtämistä helpottava kuva, jota ei vaadittu ratkaisussa:



RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Merkitään janojen DE ja BC leikkauspistettä G:llä, janojen DE ja AC leikkauspistettä H:lla ja janan FB keskipistettä I:llä. Kolmio DHI on symmetrian nojalla suorakulmainen, joten kolmiot DGB, DHI ja DEF ovat keskenään yhdenmuotoiset, sillä ne ovat suorakulmaisia ja niillä on yhteinen kulma D.

Kolmion DEF pinta-ala on

$$A_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot |DF| \cdot |EF| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6.$$

Janan DB pituus on

$$|DB| = |DF| - |BF| = 4 - 1 = 3$$

ja janan DI pituus on

$$|DI| = |DB| + \frac{1}{2}|BF| = 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{7}{2}.$$ 1p (yht. 1p)

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on niiden vastinsivujen suhteen neliö. Ratkaistaan kolmion DGB pinta-ala:

$$\frac{A_{DGB}}{A_{DEF}} = \left(\frac{|DB|}{|DF|}\right)^2$$

$$\frac{A_{DGB}}{6} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad \text{2p (yht. 3p)} \quad \| \cdot 6$$

$$A_{DGB} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 6$$

$$A_{DGB} = \frac{27}{8}. \quad \text{1p (yht. 4p)}$$

Ratkaistaan vastaavasti kolmion DHI pinta-ala:

$$\frac{A_{DHI}}{A_{DEF}} = \left(\frac{|DI|}{|DF|}\right)^2$$

$$\frac{A_{DHI}}{6} = \left(\frac{\frac{7}{2}}{4}\right)^2 \quad \text{2p (yht. 6p)} \quad \| \cdot 6$$

$$A_{DHI} = \left(\frac{\frac{7}{2}}{4}\right)^2 \cdot 6$$

$$A_{DHI} = \frac{147}{32}. \quad \text{1p (yht. 7p)}$$

Symmetrian nojalla 1p (yht. 8p) kolmioiden yhteisen osan pinta-ala on kaksi kertaa kolmioiden DHI ja DGB pinta-alojen erotus, eli

$$A = 2 \cdot (A_{DHI} - A_{DGB}) \quad \text{2p (yht. 10p)}$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{147}{32} - \frac{27}{8}\right)$$

$$= \frac{39}{16} \quad \text{2p (yht. 12p)}$$

Vastaus: Kolmioiden yhteisen osan pinta-ala on $\frac{39}{16}$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Merkitään janojen DE ja BC leikkauspistettä G:llä, janojen DE ja AC leikkauspistettä H:lla ja janan FB keskipistettä I:llä. Kolmio DHI on symmetrian nojalla suorakulmainen, joten kolmiot DGB, DHI ja DEF ovat keskenään yhdenmuotoiset, sillä ne ovat suorakulmaisia ja niillä on yhteinen kulma D.
Janan BD pituus on

$$|BD| = |FD| - |FB| = 4 - 1 = 3.$$

Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinsivut ovat verrannolliset, joten saadaan verranto

$$\frac{|BG|}{|BD|} = \frac{|FE|}{|FD|}$$

$$\frac{|BG|}{3} = \frac{3}{4} \quad \text{2p (yht. 2p)} \quad \| \cdot 3$$

$$|BG| = \frac{9}{4}. \quad \text{1p (yht. 3p)}$$

Näin ollen kolmion DGB pinta-ala on

$$A_{DGB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{8}.$$

Janan DI pituus on

$$|DI| = |DB| + \frac{1}{2}|BF| = 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{7}{2}. \quad \text{1p (yht. 4p)}$$

Yhdenmuotoisten kolmioiden DEF ja DHI välille saadaan verranto:

$$\frac{|HI|}{|DI|} = \frac{|FE|}{|FD|}$$

$$\frac{|HI|}{\frac{7}{2}} = \frac{3}{4} \quad \text{2p (yht. 6p)} \quad \| \cdot \frac{7}{2}$$

$$|HI| = \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

$$|HI| = \frac{21}{8}. \quad \text{1p (yht. 7p)}$$

Näin ollen kolmion DHI pinta-ala on

$$A_{DHI} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{21}{8} = \frac{147}{32}.$$

Symmetrian nojalla 1p (yht. 8p) kolmioiden yhteisen osan pinta-ala on kaksi kertaa kolmioiden DHI ja DGB pinta-alojen erotus, eli

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot (A_{DHI} - A_{DGB}) \quad \text{2p (yht. 10p)} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{147}{32} - \frac{27}{8} \right) \\ &= \frac{39}{16} \quad \text{2p (yht. 12p)} \end{aligned}$$

Vastaus: Kolmioiden yhteisen osan pinta-ala on $\frac{39}{16}$.

RATKAISUVAIHTOEHTO 3

Merkitään janojen DE ja BC leikkauspistettä G:llä, janojen DE ja AC leikkauspistettä H:lla ja janan FB keskipistettä I:llä. Kolmio DHI on symmetrian nojalla suorakulmainen, joten kolmiot DGB, DHI ja DEF ovat keskenään yhdenmuotoiset, sillä ne ovat suorakulmaisia ja niillä on yhteinen kulma D.

Janan BD pituus on

$$|BD| = |FD| - |FB| = 4 - 1 = 3.$$

Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinsivut ovat verrannolliset, joten saadaan verranto

$$\begin{aligned} \frac{|BG|}{|BD|} &= \frac{|FE|}{|FD|} \\ \frac{|BG|}{3} &= \frac{3}{4} \quad \text{2p (yht. 2p)} \qquad \| \cdot 3 \\ |BG| &= \frac{9}{4}. \quad \text{1p (yht. 3p)} \end{aligned}$$

Janan DI pituus on

$$|DI| = |DB| + \frac{1}{2}|BF| = 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{7}{2}. \quad \text{1p (yht. 4p)}$$

Yhdenmuotoisten kolmioiden DEF ja DHI välille saadaan verranto:

$$\frac{|HI|}{|DI|} = \frac{|FE|}{|FD|}$$

$$\frac{|HI|}{\frac{7}{2}} = \frac{3}{4} \quad \text{2p (yht. 6p)} \quad \| \cdot \frac{7}{2}$$

$$|HI| = \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

$$|HI| = \frac{21}{8}. \quad \text{1p (yht. 7p)}$$

Janan BI pituus on

$$|BI| = \frac{1}{2}|BF| = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Symmetrian nojalla 1p (yht. 8p) kolmioiden yhteisen osan pinta-ala on kaksi kertaa puolisuunnikkaan $BGHI$ pinta-ala, eli

$$A = 2 \cdot \frac{|HI| + |BG|}{2} \cdot |BI| \quad \text{2p (yht. 10p)}$$

$$= 2 \cdot \frac{\frac{21}{8} + \frac{9}{4}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{39}{16} \quad \text{2p (yht. 12p)}$$

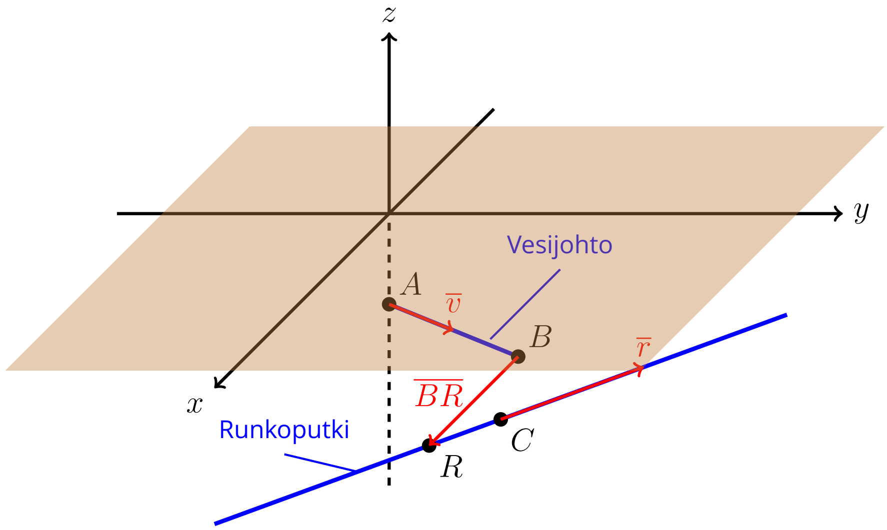
Vastaus: Kolmioiden yhteisen osan pinta-ala on $\frac{39}{16}$.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

6. Vesijohto (12 p.)
Kolmiulotteinen koordinaatisto on valittu niin, että maanpinta on xy-tasossa ja pituusyksikkönä on metri. Maan alla oleva vesijohto kulkee pisteestä $(0, 0, -2)$ vektorin $3\overline{i}+4\overline{j}$ suuntaan yhteensä 3 metriä. Sen jälkeen vesijohto täytyy liittää yhdysputken avulla runkoputkeen, joka kulkee pisteen $(4, 4, -3)$ kautta vektorin $-2\overline{i} + 3\overline{j}$ suuntaan. Kuinka pitkä yhdysputken on vähintään oltava, jotta se riittää yhdistämään tämän vesijohdon runkoputkeen?

Ratkaisu.

Ratkaisun hahmottamista helpottava kuva, jota ei vaadittu ratkaisussa:



RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Merkitään pisteellä A vesijohdon päätä $(0, 0, -2)$. Pisteen A paikkavektori on

$$\overline{OA} = -2\overline{k}.$$

Merkitään vesijohdon suuntavektoria $\overline{v} = 3\overline{i} + 4\overline{j}$ ja vesijohdon ja yhdysputken kiinnityspistettä B:llä. Selvitetään B:n paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{OA} + 3 \cdot \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} \\ &= -2\overline{k} + 3 \cdot \frac{3\overline{i} + 4\overline{j}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= -2\overline{k} + 3 \cdot \frac{3\overline{i} + 4\overline{j}}{5} \\ &= \frac{9}{5}\overline{i} + \frac{12}{5}\overline{j} - 2\overline{k}. \quad \boxed{\text{2p (yht. 2p)}}\end{aligned}$$

Runkoputki kulkee pisteen $C = (4, 4, -3)$ kautta. Pisteen C paikkavektori on

$$\overline{OC} = 4\overline{i} + 4\overline{j} - 3\overline{k}.$$

Merkitään runkoputken suuntavektoria $\overline{r} = -2\overline{i} + 3\overline{j}$ ja runkoputkea kuvaavan suoran mielivaltaista pistettä R:llä. Muodostetaan runkoputkea kuvaavan suoran parametrimuotoinen yhtälö.

$$\begin{aligned}\overline{OR} &= \overline{OC} + t \cdot \overline{r} \\ &= 4\overline{i} + 4\overline{j} - 3\overline{k} + t \cdot (-2\overline{i} + 3\overline{j}) \\ &= (4 - 2t)\overline{i} + (4 + 3t)\overline{j} - 3\overline{k}. \quad \boxed{\text{2p (yht. 4p)}}\end{aligned}$$

Vektori vesijohdon ja yhdysputken kiinnityspisteestä runkoputkeen on siis

$$\begin{aligned}\overline{BR} &= \overline{OR} - \overline{OB} \\ &= (4 - 2t)\overline{i} + (4 + 3t)\overline{j} - 3\overline{k} - \left(\frac{9}{5}\overline{i} + \frac{12}{5}\overline{j} - 2\overline{k}\right) \\ &= (4 - 2t)\overline{i} + (4 + 3t)\overline{j} - 3\overline{k} - \frac{9}{5}\overline{i} - \frac{12}{5}\overline{j} + 2\overline{k} \\ &= \left(4 - 2t - \frac{9}{5}\right)\overline{i} + \left(4 + 3t - \frac{12}{5}\right)\overline{j} - \overline{k} \\ &= \left(\frac{11}{5} - 2t\right)\overline{i} + \left(\frac{8}{5} + 3t\right)\overline{j} - \overline{k}.\end{aligned}$$

Vektori $\overline{BR}$ on lyhimmillään, kun se on kohtisuorassa vektoria $\overline{r}$ vastaan. Vektorit ovat kohtisuorassa, kun niiden pistetulo on nolla. Saadaan siis

$$\overline{BR}\cdot\overline{r}=0 \quad \text{2p (yht. 6p)}$$

$$\left(\left(\frac{11}{5}-2t\right)\overline{i}+\left(\frac{8}{5}+3t\right)\overline{j}-\overline{k}\right)\cdot(-2\overline{i}+3\overline{j})=0$$

$$\left(\frac{11}{5}-2t\right)\cdot(-2)+\left(\frac{8}{5}+3t\right)\cdot 3=0$$

$$t=-\frac{2}{65} \quad \text{2p (yht. 8p)}$$

Tällöin siis lyhin $\overline{BR}$ on

$$\begin{aligned}\overline{BR}_{\text{min}}&=\left(\frac{11}{5}-2\cdot\left(-\frac{2}{65}\right)\right)\overline{i}+\left(\frac{8}{5}+3\cdot\left(-\frac{2}{65}\right)\right)\overline{j}-\overline{k}\\&=\frac{147}{65}\overline{i}+\frac{98}{65}\overline{j}-\overline{k}, \quad \text{2p (yht. 10p)}\end{aligned}$$

ja sen pituus on

$$\begin{aligned}|\overline{BR}|_{\text{min}}&=\sqrt{\left(\frac{147}{65}\right)^2+\left(\frac{98}{65}\right)^2+(-1)^2}\\&=2{,}8961\ldots\\&\approx 2{,}9\ (\text{metriä})\end{aligned}$$

Vastaus: Yhdysputken täytyy olla vähintään $2{,}9$ metriä pitkä. 2p (yht. 12p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Merkitään pisteellä A vesijohdon päätä $(0,0,-2)$. Pisteen A paikkavektori on

$$\overline{OA}=-2\overline{k}.$$

Merkitään vesijohdon suuntavektoria $\overline{v} = 3\overline{i} + 4\overline{j}$ ja vesijohdon ja yhdysputken kiinnityspistettä B:llä. Selvitetään B:n paikkavektori.

$$\begin{aligned}
\overline{OB} &= \overline{OA} + 3\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} \\
&= -2\overline{k} + 3 \cdot \frac{3\overline{i} + 4\overline{j}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\
&= -2\overline{k} + 3 \cdot \frac{3\overline{i} + 4\overline{j}}{5} \\
&= \frac{9}{5}\overline{i} + \frac{12}{5}\overline{j} - 2\overline{k}. \quad \boxed{\text{2p (yht. 2p)}}
\end{aligned}$$

Runkoputki kulkee pisteen $C = (4, 4, -3)$ kautta. Pisteen C paikkavektori on

$$\overline{OC} = 4\overline{i} + 4\overline{j} - 3\overline{k}.$$

Merkitään runkoputken suuntavektoria $\overline{r} = -2\overline{i} + 3\overline{j}$ ja runkoputkea kuvaavan suoran mielivaltaista pistettä R:llä. Muodostetaan runkoputkea kuvaavan suoran parametrimuotoinen yhtälö.

$$\begin{aligned}
\overline{OR} &= \overline{OC} + t \cdot \overline{r} \\
&= 4\overline{i} + 4\overline{j} - 3\overline{k} + t \cdot (-2\overline{i} + 3\overline{j}) \\
&= (4 - 2t)\overline{i} + (4 + 3t)\overline{j} - 3\overline{k}. \quad \boxed{\text{2p (yht. 4p)}}
\end{aligned}$$

Yhdysputken pienin tarvittava pituus saadaan, kun selvitetään vektorin BR pienin mahdollinen pituus.

$$\begin{aligned}
\overline{BR} &= \overline{OR} - \overline{OB} \\
&= (4 - 2t)\overline{i} + (4 + 3t)\overline{j} - 3\overline{k} - \left(\frac{9}{5}\overline{i} + \frac{12}{5}\overline{j} - 2\overline{k}\right) \\
&= (4 - 2t)\overline{i} + (4 + 3t)\overline{j} - 3\overline{k} - \frac{9}{5}\overline{i} - \frac{12}{5}\overline{j} + 2\overline{k} \\
&= \left(4 - 2t - \frac{9}{5}\right)\overline{i} + \left(4 + 3t - \frac{12}{5}\right)\overline{j} - \overline{k} \\
&= \left(\frac{11}{5} - 2t\right)\overline{i} + \left(\frac{8}{5} + 3t\right)\overline{j} - \overline{k}.
\end{aligned}$$

Vektorin $\overline{BR}$ pituus on pienimmillään, kun pituuden neliö on pienimmillään.

$$|\overline{BR}|^2 = \left(\frac{11}{5} - 2t\right)^2 + \left(\frac{8}{5} + 3t\right)^2 + 1^2$$

$$|\overline{BR}|^2 = 13t^2 + \frac{4}{5}t + \frac{42}{5}. \quad \text{1p (yht. 5p)} \tag{6.1}$$

Kyseessä on ylöspäin aukeavan paraabelin lauseke, joten pienin arvo löytyy sen derivaatan nollakohdasta.

$$\mathrm{D}\left(13t^2 + \frac{4}{5}t + \frac{42}{5}\right) = 26t + \frac{4}{5}. \quad \text{1p (yht. 6p)}$$

Derivaatan nollakohta:

$$26t + \frac{4}{5} = 0$$

$$t = -\frac{2}{65}. \quad \text{2p (yht. 8p)}$$

Yhtälön (6.1) nojalla saadaan siis, että vektorin $\overline{BR}$ pienin pituus on

$$|\overline{BR}|_{\text{min}} = \sqrt{13 \cdot \left(-\frac{2}{65}\right)^2 + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{2}{65}\right) + \frac{42}{5}} \quad \text{2p (yht. 10p)}$$

$$= 2{,}8961\ldots$$

$$\approx 2{,}9\ (\text{metriä})$$

Vastaus: Yhdysputken täytyy olla vähintään $2{,}9$ metriä pitkä. 2p (yht. 12p)

Tämän tehtävän ratkaisussa sai vältettyä runsaasti laskuvälivaiheita, jos hyödynsi CAS-ohjelman vektoritoimintoja.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

7. Koripalloilijan vapaaheitot (12 p.)
Pitkäaikaisten tilastojen perusteella erään koripalloilijan todennäköisyys heittää pallo vapaaheitolla koriin on p $(0 \leq p \leq 1)$. Rautahermoisena pelaajana hänen heittojensa onnistumistodennäköisyydet ovat riippumattomia aikaisempien heittojen tuloksista ja pelitilanteesta.

Eräässä ottelussa kyseinen pelaaja saa kaksi vapaaheittoa, jotka on heitettävä peräkkäin. Merkitään

$P(0)$ = todennäköisyys sille, että pelaaja ei saa yhtään heittoa koriin

$P(1)$ = todennäköisyys sille, että pelaaja saa täsmälleen yhden heiton koriin

$P(2)$ = todennäköisyys sille, että pelaaja saa kaksi heittoa koriin.

1. Laske $P(2)$, kun $p = 0{,}82$. (3 p.)
2. Määritä $P(2)$, $P(1)$ ja $P(0)$ todennäköisyyden p avulla lausuttuina. (6 p.)
3. Millä todennäköisyyden p arvoilla $P(1) = P(2)$? (3 p.)

Ratkaisu.

1. Heitot ovat riippumattomat, joten

$$P(2) = p \cdot p = 0{,}82 \cdot 0{,}82 = 0{,}6724 \approx 0{,}67.$$ 3p (yht. 3p)

2.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Kohdan 1. nojalla

$$P(2) = p \cdot p = p^2.$$ 1p (yht. 1p)

Pelaaja joko saa korin tai ei saa koria, joten todennäköisyys, että pelaaja ei saa yhdellä heitolla koria, on $1-p$. 1p (yht. 2p) Todennäköisyys $P(0)$ on todennäköisyys, että pelaaja ei saa heitolla 1 koria JA pelaaja ei saa heitolla 2 koria. Heitot ovat riippumattomat, joten

$$P(0) = (1-p) \cdot (1-p) = p^2 - 2p + 1.$$ 1p (yht. 3p)

Pelaaja saa varmasti joko nolla, yhden tai kaksi koria, 1p (yht. 4p) joten

$$\begin{aligned} P(1) &= 1 - P(2) - P(0) \quad \text{1p (yht. 5p)} \\ &= 1 - p^2 - (p^2 - 2p + 1) \\ &= 2p - 2p^2. \quad \text{1p (yht. 6p)} \end{aligned}$$

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Kohdan 1. nojalla

$$P(2) = p \cdot p = p^2. \quad \text{1p (yht. 1p)}$$

Pelaaja joko saa korin tai ei saa koria, joten todennäköisyys, että pelaaja ei saa yhdellä heitolla koria, on $1-p$. 1p (yht. 2p) Heitot ovat riippumattomat, joten yhden korin todennäköisyys $P(1)$ saadaan toistokokeen kaavalla:

$$\begin{aligned} P(1) &= \binom{2}{1} p^1 (1-p)^{2-1} \quad \text{2p (yht. 4p)} \\ &= 2p(1-p) \\ &= 2p - 2p^2. \quad \text{1p (yht. 5p)} \end{aligned}$$

Todennäköisyys $P(0)$ on todennäköisyys, että pelaaja ei saa heitolla 1 koria JA pelaaja ei saa heitolla 2 koria. Heitot ovat riippumattomat, joten

$$P(0) = (1-p) \cdot (1-p) = p^2 - 2p + 1. \quad \text{1p (yht. 6p)}$$

3. Kohdan 2 nojalla saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} P(1) &= P(2) \\ 2p - 2p^2 &= p^2 \quad \text{1p (yht. 1p)} \end{aligned}$$

CAS-ohjelmalla:

$$p = 0 \qquad \text{tai} \qquad p = \frac{2}{3} \approx 0{,}67. \quad \text{2p (yht. 3p)}$$

Vastaus: $P(1) = P(2)$ todennäköisyyden p arvolla $p = 0$ tai $p = \dfrac{2}{3} \approx 0{,}67$.

8. Käyrien rajoittamat alueet (12 p.)

Epäyhtälöt

$$x \geq 1 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{x^{n+1}} \leq y \leq \frac{1}{x^n}$$

määrittävät tasoalueen, jonka pinta-alaa merkitään symbolilla A_n. Tässä $n \geq 2$ on kokonaisluku.

1. Kirjoita lauseke pinta-alalle A_2 ja laske sen arvo käyttämättä osatehtävässä 2 annettua kaavaa. (4 p.)

2. Osoita välivaiheineen, että pinta-alan A_n yleinen lauseke on muotoa

$$A_n = \frac{1}{n^2 - n},$$

kun $n \geq 2$. (8 p.)

Ratkaisu.

1. Kysytty pinta-ala on

$$A_2 = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\text{2p (yht. 2p)}}$$

$$= \Big/_1^\infty \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right) - \left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{2\cdot 1^2}\right)$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad \boxed{\text{2p (yht. 2p)}}$$

Integraalin muodostamisen jälkeen sen arvon voi laskea suoraan CAS-ohjelmalla. Yllä olevassa laskelmassa on näytetty värillisellä käsinlaskun välivaiheet, mutta niitä ei vaadita ratkaisussa.

2. Pinta-ala A_n on

$$A_n = \int_1^\infty \frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$ 3p (yht. 3p)

$$= \Big/_1^\infty \left(-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x^n}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x^n}\right) - \left(-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{1^{n-1}} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1^n}\right)$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$ 3p (yht. 6p)

$$= \frac{n}{n(n-1)} - \frac{n-1}{n(n-1)}$$

$$= \frac{n-(n-1)}{n(n-1)}$$

$$= \frac{n-n+1}{n^2-n}$$

$$= \frac{1}{n^2-n}.$$ 2p (yht. 8p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

9. Yhdistettyjä lukuja (12 p.)
Osoita lukua $1\,000\,001! + 2$ käyttämällä, että on olemassa miljoona peräkkäistä kokonaislukua, joista yksikään ei ole alkuluku.

Ratkaisu.

Merkitään

$$a_n = 1\,000\,001! + n, \quad \text{missä } n = 2, 3, \ldots, 1\,000\,001.$$ 1p (yht. 1p)

Luku

$$1\,000\,001! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 999\,999 \cdot 1\,000\,000 \cdot 1\,000\,001$$

on jaollinen kaikilla kokonaisluvuilla $n = 2, 3, \ldots, 1\,000\,001,$ 4p (yht. 5p) joten luku $a_n = 1\,000\,001! + n$ on jaollinen luvulla n, kun $n = 2, 3, \ldots, 1\,000\,001.$ 3p (yht. 8p) Näin ollen luku a_n ei ole alkuluku millään $n = 2, 3, \ldots, 1\,000\,001.$ 1p (yht. 9p)

Luvut $a_2, a_3, \ldots, a_{1\,000\,001}$ ovat siis miljoona 1p (yht. 10p) peräkkäistä lukua, joista yksikään ei ole alkuluku. 2p (yht. 12p)

Pisteytyksestä:
Jos tarkasteli ensin erikseen lukua $1000001! + 2$ ja osoitti sen olevan jaollinen kahdella ja näin osoitti, ettei se ole alkuluku, tästä sai jo 4 p.

10. Väitteitä (12 p.)

Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvosteltavaksi, merkitse jokaiseen osatehtävän 10.2. väittämään vaihtoehto ”En vastaa” ja tyhjennä vastauskentät 10.1. ja 10.3.

10.1. Mikä väite tässä todistetaan?

Oikea vastaus 3 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p. (3 p.)

Koska

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)(x-a)\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)\\ &= f'(a)\cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

niin $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Valikon vaihtoehdot:

(a) Jos funktio f on jatkuva kohdassa a, niin se on derivoituva kohdassa a.
(b) Jos funktio f on derivoituva kohdassa a, niin se on jatkuva kohdassa a.
(c) Funktio f on jatkuva kohdassa a täsmälleen silloin, kun se on derivoituva kohdassa a.
(d) Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a, niin se on jatkuva kohdassa a.
(e) Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a, niin se on derivoituva kohdassa a.
(f) Jos funktio f on jatkuva kohdassa a, niin sillä on raja-arvo kohdassa a.
(g) Jos funktio f on derivoituva kohdassa a, niin sillä on raja-arvo kohdassa a.

10.2. Mitkä väitteistä (a)–(g) pätevät yleisesti kaikille funktioille $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Oikea vastaus 1 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p. (7 p.)

(a) Jos funktio f on jatkuva kohdassa a, niin se on derivoituva kohdassa a.

- ○ Pätee.
- ○ Ei päde.
- ○ En vastaa.

(b) Jos funktio f on derivoituva kohdassa a, niin se on jatkuva kohdassa a.

- ○ Pätee.
- ○ Ei päde.
- ○ En vastaa.

(c) Funktio f on jatkuva kohdassa a täsmälleen silloin, kun se on derivoituva kohdassa a.

- ○ Pätee.
- ○ Ei päde.
- ○ En vastaa.

(d) Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a, niin se on jatkuva kohdassa a.

- ○ Pätee.
- ○ Ei päde.
- ○ En vastaa.

(e) Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a, niin se on derivoituva kohdassa a.

- ○ Pätee.
- ○ Ei päde.
- ○ En vastaa.

(f) Jos funktio f on jatkuva kohdassa a, niin sillä on raja-arvo kohdassa a.

- ○ Pätee.
- ○ Ei päde.
- ○ En vastaa.

(g) Jos funktio f on derivoituva kohdassa a, niin sillä on raja-arvo kohdassa a.

- ○ Pätee.
- ○ Ei päde.
- ○ En vastaa.

10.3. Valitse väitteistä (a)–(g) kaksi väärää, ja osoita ne epätosiksi antamalla kummastakin esimerkkifunktio, joka todistaa väitteen vääräksi. Esimerkiksi riittää kummassakin kohdassa pelkkä funktion lauseke.

Ratkaisu.

10.1. Vastaus: (b) Jos funktio f on derivoituva kohdassa a, niin se on jatkuva kohdassa a. 3p (yht. 3p)

Pisteytyksestä: Oikea vastaus 3 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

Perustelua ei edellytetty ratkaisussa, mutta tässä on perustelu, jos se kiinnostaa sinua:
Todistuksessa päädytään lopputulokseen $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, joka tarkoittaa, että funktion raja-arvo kohdassa a on sama kuin funktion arvo kohdassa a, eli toisin sanoen f on jatkuva kohdassa a.
Perusteluissa oletetaan vain, että erotusosamäärällä $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ on raja-arvo, eli toisin sanoen oletetaan, että f on derivoituva kohdassa a.
Näin ollen oikea vastaus on ”Jos funktio f on derivoituva kohdassa a, niin se on jatkuva kohdassa a.”

10.2. Perusteluja ei edellytetty ratkaisussa, vaan ne ovat tässä malliratkaisussa lisäselityksenä.

(a) Ei päde. 1p (yht. 1p)

Esimerkiksi funktio, jonka lauseke on $|x|$, on jatkuva kohdassa 0, mutta se ei ole derivoituva kohdassa 0.

(b) Pätee.

Tämä osoitettiin tehtävässä 10.1.

(c) Ei päde. 1p (yht. 2p)

Tehtävän väite on ”Funktio f on jatkuva kohdassa a täsmälleen silloin, kun se on derivoituva kohdassa a.”
Ilmaus ”täsmälleen silloin, kun” tarkoittaa, että lauseet ovat ekvivalentit. Toisin sanoen, että funktio f on jatkuva kohdassa a, jos se on derivoituva kohdassa a. mutta myös toisin päin, eli f on derivoituva kohdassa a, jos se on jatkuva kohdassa a. Jälkimmäinen väite ei kuitenkaan pidä paikkaansa, kuten kohdassa (a) todettiin.

(d) Ei päde. 1p (yht. 3p)

Yleisesti funktio on jatkuva kohdassa a, jos sillä on raja-arvo kohdassa a ja tämä raja-arvo on yhtä suuri kuin funktion arvo kohdassa a. Voidaan esimerkiksi määritellä funktio paloittain siten, että se saa kaikkialla muualla arvon 1, mutta kohdassa 0 se saa arvon 2. Kyseisellä funktiolla on siten kohdassa 0 raja-arvo 1, koska lähestyttäessä nollaa kummalta tahansa puolelta, funktion arvo on joka kohdassa 1. Funktion arvo kohdassa 0 (täsmälleen siinä kohdassa) on kuitenkin 2, joten se ei ole jatkuva.

(e) Ei päde. 1p (yht. 4p)

Esimerkiksi funktiolla, jonka lauseke on $|x|$, on raja-arvo kohdassa 0, mutta funktio ei ole derivoituva kohdassa 0.

(f) Pätee.

Funktio on jatkuva kohdassa a, jos sillä on raja-arvo kohdassa a ja tämä raja-arvo on yhtä suuri kuin funktion arvo kohdassa a. Raja-arvon olemassaolo on siis välttämätön ehto jatkuvuudelle. Siten, jos tiedämme, että funktio on jatkuva kohdassa a, täytyy sillä olla myös raja-arvo kohdassa a.

(g) Pätee. 1p (yht. 5p)

Kohdassa (b) todettiin, että jos funktio f on derivoituva kohdassa a, niin se on jatkuva kohdassa a. Kohdassa (f) taas todettiin, että jos funktio f on jatkuva kohdassa a, niin sillä on raja-arvo kohdassa a. Näin ollen funktiolla f on raja-arvo kohdassa a, jos se on derivoituva kohdassa a.

Pisteytyksestä: Oikea vastaus 1 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

10.3. Alla on näytetty vastaesimerkiksi sopiva funktio kaikkiin virheellisiin väitteisiin. Huomaa, että tehtävässä edellytettiin vastaesimerkkiä vain kahteen kohtaan, jotka voit itse valita.

(a) Ei päde.
Vastaesimerkiksi käy funktio $|x|$.
Esimerkin funktio on jatkuva kohdassa 0, mutta se ei ole derivoituva kohdassa 0.

(c) Ei päde.
Vastaesimerkiksi käy funktio $|x|$.
Lisäselitys: Katso kohta 10.2. (c).

(d) Ei päde.
Vastaesimerkiksi käy funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \neq 0 \\ 2, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Lisäselitys: Katso kohta 10.2. (d).

(e) Ei päde.

Vastaesimerkiksi käy funktio $|x|$.

Esimerkin funktiolla on raja-arvo kohdassa 0, mutta funktio ei ole derivoituva kohdassa 0.

1p+1p (yht. 2p)

Pisteytyksestä: 1p / oikea esimerkki.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

11. Trigonometriset yhtälöt (12 p.)
Seuraavia yhtälöitä tarkastellaan vain muuttujan arvoilla $x \in [0, \pi]$

1. Ratkaise yhtälö $\cos x + \sin x = 0$. (2 p.)
2. Osoita, että yhtälöllä $(\cos x)^2 + \cos x \sin x + (\sin x)^2 = 0$ ei ole ratkaisua. (4 p.)
3. Selvitä perustellen yhtälön $\sum_{k=0}^{n} (\cos x)^{n-k}(\sin x)^k = 0$ kaikki ratkaisut, kun $n = 3, 4, 5, \ldots$. (6 p.)

Ratkaisu.

1.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Huom! Tapaus $\cos(x) = 0$ tutkitaan aluksi, koska myöhemmin jaetaan $\cos(x)$:llä ja nollalla ei saa jakaa.

Tutkitaan, onko tarkasteluvälillä ratkaisuja, kun $\cos(x) = 0$. Tällöin $x = \frac{\pi}{2}$, eli $\sin(x) = 1$, jolloin yhtälön vasen puoli on

$$\cos(x) + \sin(x) = 0 + 1 = 1.$$

Yhtälöllä ei siis ole ratkaisuja, joilla $\cos(x) = 0$.

Oletetaan, että $\cos(x) \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\cos(x) + \sin(x) &= 0 \quad \| : \cos(x) \\
1 + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= 0 \\
1 + \tan(x) &= 0 \\
\tan(x) &= -1 \\
x &= \frac{3\pi}{4} + \pi n.
\end{aligned}$$

Tehtävässä tarkastellaan väliä $[0, \pi]$, joten ainoa ratkaisu on siis

$$x = \frac{3\pi}{4}.$$

Vastaus: $x = \frac{3\pi}{4}$. 2p (yht. 2p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Ratkaistaan yhtälö:

$$\cos(x) + \sin(x) = 0$$
$$\cos(x) = -\sin(x).$$

Yhtälö pätee täsmälleen silloin, kun $\cos(x)$ ja $\sin(x)$ ovat vastakkaismerkkiset ja niiden itseisarvot ovat yhtä suuret. Yksikköympyrästä nähdään, että yhtälö toteutuu siis arvoilla

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n,$$

missä n on kokonaisluku.

Tehtävässä tarkastellaan väliä $[0, \pi]$, joten ainoa ratkaisu on siis

$$x = \frac{3\pi}{4}.$$

Vastaus: $x = \frac{3\pi}{4}$. 2p (yht. 2p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 3

Ratkaistaan yhtälö annetulla välillä CAS-ohjelmalla:

$$\text{solve}(\cos(x)+\sin(x)=0,x)|0<x<\pi \blacktriangleright x=\frac{3\cdot\pi}{4}$$

Vastaus: $x = \dfrac{3\pi}{4}$. 2p (yht. 2p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 4

Ratkaistaan yhtälö CAS-ohjelmalla:

$$\mathrm{solve}(\cos(x)+\sin(x)=0,x) \;\blacktriangleright\; x=\frac{(4\cdot \boldsymbol{n1}-1)\cdot \pi}{4}$$

Yhtälön ratkaisuksi saadaan siis kaikilla reaaliluvuilla

$$x = \frac{(4n-1)\pi}{4} = n \cdot \pi - \frac{\pi}{4},$$

missä n on kokonaisluku. Näistä annetulle välille $[0, \pi]$ kuuluu vain

$$x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Vastaus: $x = \dfrac{3\pi}{4}$. 2p (yht. 2p)

2.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Tutkitaan, onko tarkasteluvälillä ratkaisuja, kun $\cos(x) = 0$. Tällöin $x = \frac{\pi}{2}$, eli $\sin(x) = 1$, jolloin yhtälön vasen puoli on

$$\cos^2(x) + \cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) = 0^2 + 0 \cdot 1 + 1^2 = 1.$$

Yhtälöllä ei siis ole ratkaisuja, joilla $\cos(x) = 0$. 1p (yht. 1p)

Oletetaan, että $\cos(x) \neq 0$.

$$\cos^2(x) + \cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) = 0 \quad \| : \cos^2(x)$$

$$1 + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 0$$

$$1 + \tan(x) + \tan^2(x) = 0 \tag{11.1}$$

$$1 + 2\tan(x) + \tan^2(x) = \tan(x)$$

$$(1 + \tan(x))^2 = \tan(x).$$ 2p (yht. 3p) d

Yhtälön vasen puoli on epänegatiivinen, joten jos ratkaisuja on, niiden täytyy olla sellaisia, että yhtälön oikea puoli $\tan(x) \geq 0$, mikä on ristiriidassa yhtälön (11.1) kanssa, sillä tällöin sen vasen puoli on

$$1 + \tan(x) + \tan^2(x) \geq 1 + 0 + 0 = 1.$$

Yhtälöllä ei siis ole ratkaisuja. 1p (yht. 4p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Tutkitaan funktiota

$$f(x) = \cos^2(x) + \cos(x)\sin(x) + \sin^2(x)$$

välillä $[0, \pi]$. Derivoidaan f CAS-ohjelman toiminnolla:

$$f'(x) = 2\cos^2(x) - 1.$$ 1p (yht. 1p)

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat tarkasteluvälillä CAS-ohjelman toiminnolla:

$$x = \frac{\pi}{4} \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{3\pi}{4}.$$ 1p (yht. 2p)

Suljetulla välillä jatkuvan funktion suurin ja pienin arvo löytyvät derivaatan nollakohdista tai välin päätepisteistä.

$$\begin{aligned} f(0) &= \cos^2(0) + \cos(0)\sin(0) + \sin^2(0) = 1 \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{3}{2} \\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= \frac{1}{2} \\ f(\pi) &= 1. \end{aligned}$$ 1p (yht. 3p)

Näin ollen funktion f pienin arvo tarkasteluvälillä on $\frac{1}{2}$, joten sillä ei ole nollakohtaa tarkasteluvälillä, eli yhtälöllä

$$\cos^2(x) + \cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) = 0$$

ei ole ratkaisua tarkasteluvälillä. 1p (yht. 4p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 3

Trigonometrian peruslauseen nojalla

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1,$$

joten tehtävänannon yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) + \cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) &= 0 \\
\sin^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x)\sin(x) &= 0 \\
1 + \cos(x)\sin(x) &= 0 \quad \text{2p (yht. 2p)} \\
\cos(x)\sin(x) &= -1 \quad \text{1p (yht. 3p)}
\end{aligned}$$

Tiedetään, että $\sin(x)$ ja $\cos(x)$ ovat molemmat itseisarvoltaan korkeintaan 1, joten jos kumpi tahansa niistä on itseisarvoltaan pienempi kuin 1, myös niiden tulo on itseisarvoltaan pienempi kuin 1 ja tällöin yhtälö ei päde. Ainoat mahdolliset ratkaisut ovat siis sellaiset, että sekä $\sin(x)$ on 1 tai -1 ja $\cos(x)$ on 1 tai -1. Kuitenkin silloin, kun $\cos(x)$ on 1 tai -1, $\sin(x) = 0$, joten tällaisia ratkaisuja ei ole.

Näin ollen yhtälöllä

$$\cos^2(x) + \cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) = 0$$

ei ole ratkaisua. 1p (yht. 4p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 4

Muokataan yhtälön vasenta puolta. Trigonometrian peruslauseen nojalla

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1,$$

joten saadaan

$$
\begin{aligned}
&\cos^2(x) + \cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) \\
&= \sin^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x)\sin(x) \\
&= 1 + \cos(x)\sin(x) \quad \text{2p (yht. 2p)} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\cdot 2\sin(x)\cos(x)
\end{aligned}
$$

Kaksinkertaisen kulman sinin kaavan $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ avulla saadaan

$$= 1 + \frac{1}{2}\sin(2x) \quad \text{1p (yht. 3p)}$$

Tiedetään, että $-1 < \sin(2x) < 1$ kaikilla x, joten

$$1 + \frac{1}{2}\sin(2x) \geq 1 + \frac{1}{2}\cdot(-1) = \frac{1}{2} > 0.$$

Näin ollen yhtälöllä

$$\cos^2(x) + \cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) = 0$$

ei ole ratkaisua. 1p (yht. 4p)

Huom! Jos ei keksinyt ratkaisua, syöttämällä yhtälön CAS-ohjelmaan saattoi huomata, että CAS-ohjelma ilmoittaa, ettei yhtälöllä ole ratkaisua. Jos tästä otti kuvakaappauksen ratkaisuun, saattoi saada ainakin osan pisteistä. Tämä on kuitenkin vain hätäratkaisu. Jos tehtävässä pyydetään osoittamaan, perustelemaan tai todistamaan, ei ratkaisusta yleensä anneta täysiä pisteitä tai välttämättä yhtään pisteitä, jos perustelu nojaa lähes kokonaan laskinohjelman käyttöön. Sen sijaan, jos tehtävässä pyydetään ratkaisemaan tai laskemaan jotakin, ei ole tarvetta rajoittaa laskinohjelman käyttöä.

3.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Tutkitaan, onko tarkasteluvälillä ratkaisuja, kun $\cos(x) = 0$. Tällöin $x = \frac{\pi}{2}$, eli $\sin(x) = 1$. Yhtälön vasemmalla puolella kaikissa termeissä on tekijänä $\cos(x)$ lukuunottamatta termiä $\sin^n(x)$, joten jos $\cos(x) = 0$, yhtälön vasen puoli on

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^{n-k}(x)\sin^k(x) = 0 + 1^n = 1.$$

Yhtälöllä ei siis ole ratkaisuja, joilla $\cos(x) = 0$.

Oletetaan, että $\cos(x) \neq 0$.

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^{n-k}(x)\sin^k(x) = 0 \quad \| : \cos^n(x)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos^{n-k}(x)}{\cos^n(x)} \cdot \sin^k(x) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^{n-k-n}(x)\sin^k(x) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^{-k}(x)\sin^k(x) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^k(x)}{\cos^k(x)} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \tan^k(x) = 0$$

Yhtälön vasen puoli on geometrinen summa. Jos $\tan(x) = 1$, yhtälön vasen puoli on

$$\sum_{k=0}^{n} 1^n = n + 1 \neq 0,$$

joten $\tan(x) = 1$ ei ole yhtälön ratkaisu. 1p (yht. 1p) Yhtälön ratkaisuille pätee siis $\tan(x) \neq 1$. Näin ollen saadaan geometrisen summan kaavalla yhtälö muotoon

$$\frac{1 - \tan^{n+1}(x)}{1 - \tan(x)} = 0$$ 1p (yht. 2p)

Rationaalifunktion nollakohdat löytyvät osoittajan nollakohdista:

$$1 - \tan^{n+1}(x) = 0$$

$$\tan^{n+1}(x) = 1.$$ 1p (yht. 3p)

Tämän yhtälön ratkaisut ovat $\tan(x) = 1$ kaikilla n ja lisäksi $\tan(x) = -1$ parittomilla n. Aiemmin todettiin, että $\tan(x) = 1$ ei ole yhtälön ratkaisu, joten yhtälöllä ei ole siis ratkaisua parillisilla n, 1p (yht. 4p) ja parittomilla n ratkaisut saadaan yhtälöstä

$$\tan(x) = -1$$ 1p (yht. 5p)

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n,$$

eli tarkasteluvälillä yhtälön ainoa ratkaisu on $x = \dfrac{3\pi}{4}$. 1p (yht. 6p)

Vastaus: Yhtälöllä ei ole ratkaisuja, kun $n = 4, 6, 8 \ldots$ ja yhtälön ainoa ratkaisu on $x = \dfrac{3\pi}{4}$, kun $n = 3, 5, 7 \ldots$.

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Kohtaan $x = \frac{\pi}{4}$ liittyvä tarkastelu tehdään tässä ensin, koska myöhemmin halutaan kertoa yhtälö puolittain $\cos(x) - \sin(x)$:llä, jonka arvo on nolla kohdassa $x = \frac{\pi}{4}$.

Kun $x = \frac{\pi}{4}$, on $\cos(x) = \sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$, joten yhtälön vasen puoli on selvästi positiivinen ja näin ollen $x = \frac{\pi}{4}$ ei ole yhtälön ratkaisu. Kohta $x = \frac{\pi}{4}$ on myös tarkasteluvälin ainoa kohta, jossa $\cos(x) = \sin(x)$, joten voidaan olettaa ratkaisussa, että $\cos(x) \neq \sin(x)$.

Tutkitaan tehtävänannon yhtälön vasenta puolta:

$$\begin{aligned}S(x) &= \sum_{k=0}^{n} \cos^{n-k}(x)\sin^k(x)\\ &= \cos^n(x) + \cos^{n-1}(x)\sin(x) + \cos^{n-2}(x)\sin^2(x) + \dots\\ &\quad + \cos^2(x)\sin^{n-2}(x) + \cos(x)\sin^{n-1}(x) + \sin^n(x)\end{aligned}$$

Huomataan, että jos toinen termi kerrotaan $\cos(x)$:llä, siitä tulee $\cos^n \sin(x)$, joka on sama kuin mikä ensimmäisestä termistä tulisi, jos lausekkeen kertoisi $\sin(x)$:llä. Vastaavasti kolmannesta termistä tulisi $\cos(x)$:llä kertoessa sama, mikä toisesta termistä tulisi $\sin(x)$:llä kertoessa, ja niin edelleen. Ainoat termit, joille ei löydy tällaista paria, ovat ensimmäinen termi $\cos(x)$:llä kertoessa ja viimeinen termi $\sin(x)$:llä kertoessa. Jos siis lasketaan

$$\cos(x) \cdot S(x) - \sin(x) \cdot S(x),$$

eli

$$(\cos(x) - \sin(x))S(x),$$

termejä $\cos^{n+1}(x)$ ja $-\sin^{n+1}(x)$ lukuunottamatta kaikki termit supistuvat pois, ja jäljelle jää

$$\cos^{n+1}(x) - \sin^{n+1}(x).$$

Yhtälö voidaan siis kertoa puolittain lausekkeella $\cos(x) - \sin(x)$, jolloin se sievenee muotoon

$$\cos^{n+1}(x) - \sin^{n+1}(x) = 0$$ 1p (yht. 1p)

$$\cos^{n+1}(x) = \sin^{n+1}(x).$$ 1p (yht. 2p)

Asian voi perustella täsmällisesti seuraavasti:

Kerrotaan tehtävänannon yhtälö puolittain lausekkeella $\cos(x) - \sin(x)$.

$$(\cos(x) - \sin(x)) \sum_{k=0}^{n} \cos^{n-k}(x)\sin^k(x) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^{n+1-k}(x)\sin^k(x) - \sum_{k=0}^{n} \cos^{n-k}(x)\sin^{k+1}(x) = 0$$

$$\cos^{n+1}(x) + \sum_{k=1}^{n} \cos^{n+1-k}(x)\sin^k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \cos^{n-k}(x)\sin^{k+1}(x) - \sin^{n+1}(x) = 0$$

Sijoitetaan toiseen summaan $k = i - 1$.

$$\cos^{n+1}(x) + \sum_{k=1}^{n} \cos^{n+1-k}(x)\sin^{k}(x) - \sum_{i=1}^{n} \cos^{n-(i-1)}(x)\sin^{i-1+1}(x) - \sin^{n+1}(x) = 0$$

$$\cos^{n+1}(x) + \sum_{k=1}^{n} \cos^{n+1-k}(x)\sin^{k}(x) - \sum_{i=1}^{n} \cos^{n+1-i}(x)\sin^{i}(x) - \sin^{n+1}(x) = 0$$

Summalausekkeet ovat identtiset, joten ne kumoavat toisensa.

$$\cos^{n+1}(x) - \sin^{n+1}(x) = 0$$

$$\cos^{n+1}(x) = \sin^{n+1}(x).$$

Jos n on parillinen, tämä yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $\cos(x) = \sin(x)$ kanssa 1p (yht. 3p) ja aiemmin todettiin, että yhtälöllä ei ole ratkaisua, kun $\cos(x) = \sin(x)$. Näin ollen parillisilla n yhtälöllä ei ole ratkaisuja. 1p (yht. 4p)

Parittomilla n yhtälön ratkaisuja ovat myös ne kohdat, joissa

$$\sin(x) = -\cos(x),$$ 1p (yht. 5p)

eli yksikköympyrän nojalla tarkasteluvälillä vain $x = \frac{3\pi}{4}$. 1p (yht. 6p)

Vastaus: Yhtälöllä ei ole ratkaisuja, kun $n = 4, 6, 8\ldots$ ja yhtälön ainoa ratkaisu on $x = \dfrac{3\pi}{4}$, kun $n = 3, 5, 7\ldots$.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

12. Kaarevuus (12 p.)

Aineisto:

12. A [Kuva: Kaarevuus]

Kaikki ympyrän normaalit leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka on ympyrän keskipiste. Tätä havaintoa voidaan käyttää muidenkin käyrien *kaarevuussäteiden* tutkimiseen seuraavalla tavalla, jossa esimerkkinä käytetään paraabelia $y = x^2$ ja sen pistettä P. Tavoitteena on löytää pisteen P kautta kulkevan normaalin ja paraabelin muiden normaalien avulla keskipiste sellaiselle ympyrälle, joka sivuaa paraabelia mahdollisimman tarkasti pisteessä P. Tämä keskipiste on paraabelin kaarevuuskeskipiste (pisteen P suhteen) ja sen etäisyys pisteestä P on paraabelin kaarevuussäde (pisteessä P).

1. Paraabelin $y = x^2$ pisteeseen $(0, 0)$ asetettu normaalisuora Y yhtyy y-akseliin. Missä pisteessä $K(t) = (0, k(t))$ paraabelin pisteeseen $T(t) = (t, t^2)$ asetettu normaali leikkaa suoran Y, kun $t \neq 0$? Katso kuva 12. A. (4 p.)

2. Kun parametri t lähestyy nollaa, niin piste $T(t)$ lähestyy origoa $(0, 0)$. Samalla piste $K(t)$ lähestyy erästä pistettä $K(0)$, jonka etäisyyttä origosta kutsutaan paraabelin kaarevuussäteeksi origossa. Mikä on tämä kaarevuussäde? (2 p.)

3. Määritä vastaavaa menetelmää käyttämällä paraabelin $y = x^2$ kaarevuussäde pisteessä $(1, 1)$. (6 p.)

Ratkaisu.

1.

$\boxed{\text{RATKAISUVAIHTOEHTO 1}}$

Ratkaistaan paraabelille $y = x^2$ pisteeseen $T(t) = (t, t^2)$ piirretyn normaalisuoran yhtälö CAS-ohjelmalla:

$$f(x) := x^2 \ \blacktriangleright \ \textit{Valmis}$$

$$\text{normalLine}(f(x), x, t) \ \blacktriangleright \ t^2 - \frac{x}{2 \cdot t} + \frac{1}{2}$$

Normaalisuoran yhtälö on siis

$$y = -\frac{1}{2t} \cdot x + t^2 + \frac{1}{2}. \quad \boxed{\text{3p (yht. 3p)}}$$

Piste $K(t) = (0, k(t))$ on tällä normaalisuoralla, joten se toteuttaa suoran yhtälön. Sijoitetaan $K(t)$ normaalisuoran yhtälöön:

$$k(t) = -\frac{1}{2t} \cdot 0 + t^2 + \frac{1}{2} = t^2 + \frac{1}{2}. \quad \boxed{\text{1p (yht. 4p)}}$$

Vastaus: Paraabelin $y = x^2$ pisteeseen $T(t) = (t, t^2)$ piirretty normaalisuora leikkaa y-akselin Y pisteessä $K(t) = (0, t^2 + \frac{1}{2})$.

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Paraabelille $y = f(x) = x^2$ pisteeseen $T(t) = (t, t^2)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on

$$k_t = f'(t) = 2t. \quad \boxed{\text{1p (yht. 1p)}}$$

Pisteeseen $T(t)$ piirretty normaali on kohtisuorassa tangentin kanssa, joten normaalin kulmakertoimelle k_n pätee

$$\begin{aligned} k_t \cdot k_n &= -1 \\ k_n &= -\frac{1}{k_t} \\ k_n &= -\frac{1}{2t}. \quad \boxed{\text{1p (yht. 2p)}} \end{aligned}$$

Normaalisuoran yhtälö on siis

$$\begin{aligned} y - t^2 &= -\frac{1}{2t}(x - t) \\ y &= -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}. \quad \boxed{\text{1p (yht. 3p)}} \end{aligned}$$

Piste $K(t) = (0, k(t))$ on tällä normaalisuoralla, joten se toteuttaa suoran yhtälön. Sijoitetaan $K(t)$ normaalisuoran yhtälöön:

$$k(t) = -\frac{1}{2t} \cdot 0 + t^2 + \frac{1}{2} = t^2 + \frac{1}{2}.$$ 1p (yht. 4p)

Vastaus: Paraabelin $y = x^2$ pisteeseen $T(t) = (t, t^2)$ piirretty normaalisuora leikkaa y-akselin Y pisteessä $K(t) = (0, t^2 + \frac{1}{2})$.

2. Pisteen $K(0)$ y-koordinaatti on raja-arvo

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0} k(t) &= \lim_{t \to 0} t^2 + \frac{1}{2} \\ &= 0^2 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$ 1p (yht. 1p)

Näin ollen $K(0) = (0, \frac{1}{2})$, jonka etäisyys origosta on $\frac{1}{2}$.

Vastaus: Paraabelin $y = x^2$ kaarevuussäde origossa on $\frac{1}{2}$. 1p (yht. 2p)

3. Pisteen (t, t^2) kautta kulkevan normaalisuoran yhtälö on kohdan 1 nojalla

$$y = -\frac{1}{2t} \cdot x + t^2 + \frac{1}{2},$$

joten pisteen $(1, 1)$ kautta kulkevan normaalisuoran yhtälö on

$$y = -\frac{1}{2 \cdot 1} \cdot x + 1^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$ 1p (yht. 1p)

Selvitetään tämän normaalin ja kohtaan $t \neq 1$ piirretyn normaalin leikkauspisteen koordinaatit. 1p (yht. 2p)

$$-\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$ 1p (yht. 3p)

CAS-ohjelmalla:

$$x = -2t^2 - 2t.$$ 1p (yht. 4p)

Selvitetään, mitä pistettä leikkauspiste lähestyy, kun $t \to 1$. Leikkauspisteen x-koordinaatti lähestyy kohtaa

$$\lim_{t\to 1} -2t^2 - 2t = -2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = -4.$$

Leikkauspisteen y-koordinaatti lähestyy siis kohtaa

$$y = -\frac{1}{2} \cdot (-4) + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$$ 1p (yht. 5p)

Leikkauspisteen etäisyys pisteestä $(1, 1)$, eli paraabelin kaarevuussäde pisteessä $(1, 1)$, on siis

$$\sqrt{\left(\frac{7}{2} - 1\right)^2 + (-4 - 1)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$ 1p (yht. 6p)

Vastaus: Paraabelin $y = x^2$ kaarevuussäde pisteessä $(1, 1)$ on $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$.

13. Pinta-ala-algoritmi (12 p.)
Tason monikulmio voidaan esittää järjestettynä listana $[(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)]$ kärkipisteitä niin, että monikulmion reuna saadaan yhdistämällä peräkkäiset kärkipisteet sekä ensimmäinen ja viimeinen kärkipiste janoilla. Oletetaan, että monikulmion reuna ei leikkaa itseään. Käytössä on menetelmä, joka laskee annetun kolmion pinta-alan, ja se halutaan yleistää monikulmioille.

1. Piirrä tarkka kuva monikulmiosta, joka vastaa listaa

   $$[(2, 2), (3, -1), (5, 2), (7, 3), (4, 6)].$$

   (2 p.)

2. Terje ehdottaa seuraavaa algoritmia monikulmion pinta-alan määrittämiseksi:

   i. Valitaan satunnainen kärkipiste.
   ii. Piirretään siitä janat kaikkiin muihin kärkiin, jolloin muodostuu joukko kolmioita.
   iii. Lasketaan näiden kolmioiden pinta-alat yhteen.

   Anna esimerkki monikulmiosta, jolle algoritmi antaa väärän pinta-alan ja toinen esimerkki sellaisesta monikulmiosta, jonka pinta-alan algoritmi antaa oikein. (5 p.)

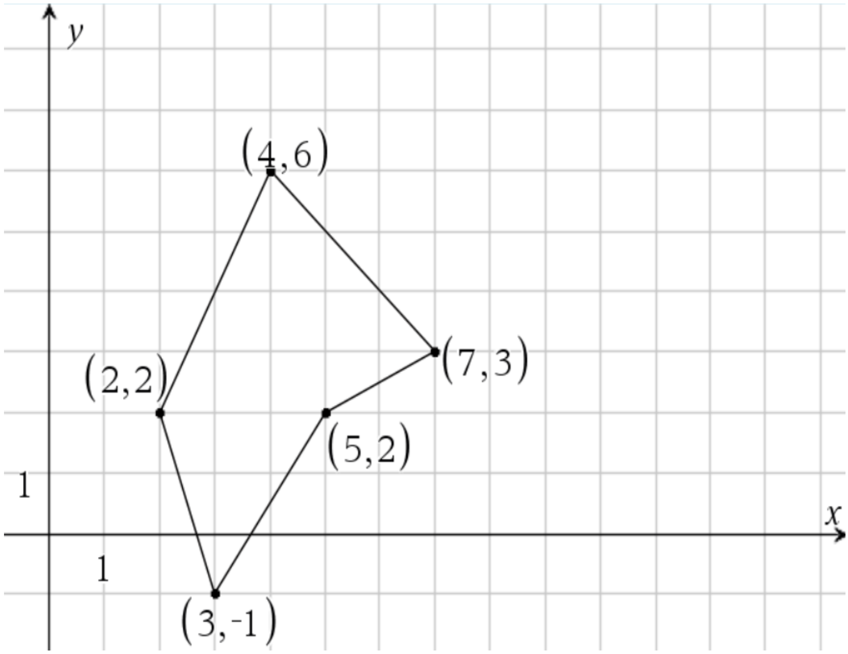
3. Aale ehdottaa seuraavaa toimintaohjetta monikulmion pinta-alan määrittämiseksi:

   i. Jaetaan monikulmio kolmioihin yhdistämällä sopivasti kärkipisteitä.
   ii. Lasketaan yhteen näiden kolmioiden pinta-alat.

   Mitä puutteita Aalen ehdotuksessa on, eli miksi tämä ei ole algoritmi? (5 p.)

Ratkaisu.

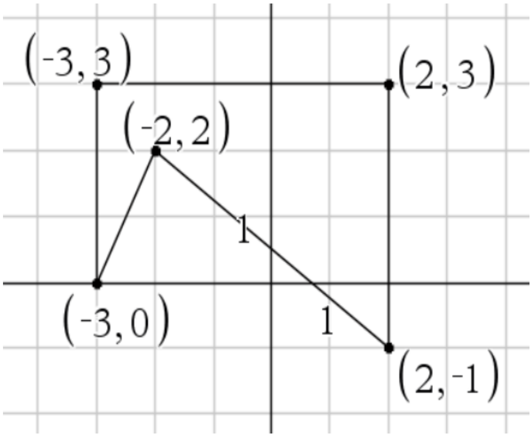
1. Kuva on piirretty TI-Nspiren ”Kuvaajat-sovelluksella”.



Pisteytyksestä:
Monikulmio piirretty oikein ja kärkipisteet tarkasti oikeissa paikoissa = 2 p,
Jos kuvasta ei ilmene origon paikka ja akselien mitta-asteikot selkeästi = -1p.

2. Kuvat on piirretty TI-Nspiren ”Kuvaajat-sovelluksella”.

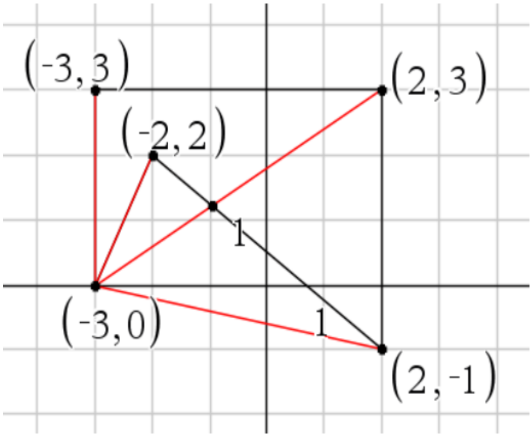
   Alla on esimerkki, johon **algoritmi ei toimi**.



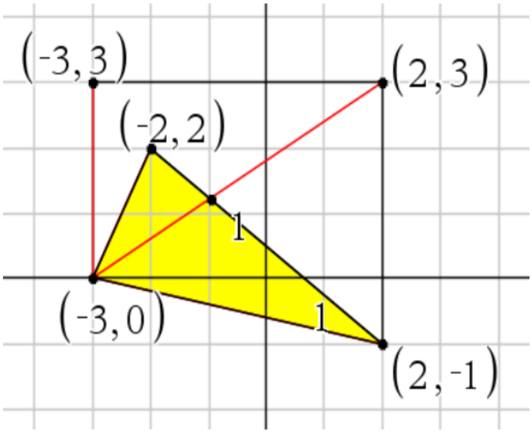
3p (yht. 3p)

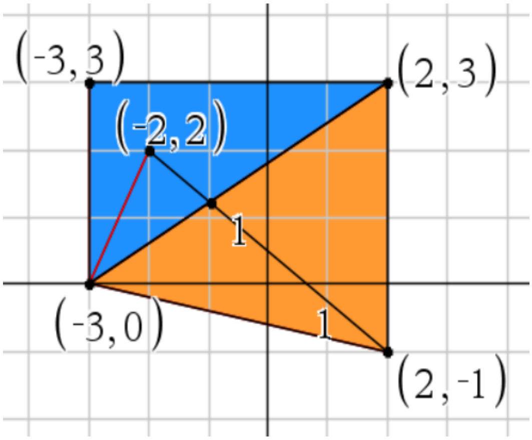
Lähtökohtaisesti ratkaisut matematiikan kokeessa tulee perustella, joten varalta perustelu kannattaa aina kirjoittaa, ellei tehtävänannossa erikseen sanota, ettei perustelua tarvita tai että "pelkkä esimerkki riittää". Alla on perustelu.

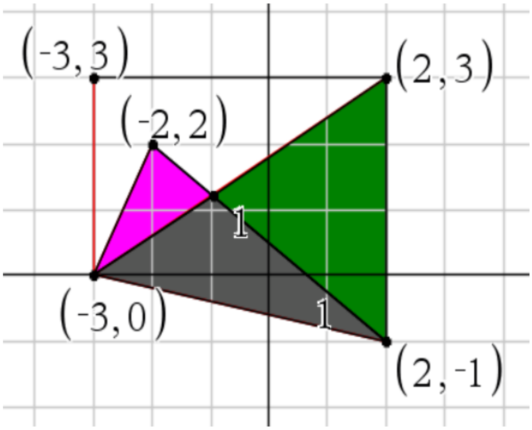
Piirretään kärjestä $(-3,0)$ janat muihin kärkiin.



Kuvaan muodostuu peräti 6 eri kolmiota. Kolmiot on merkitty värittämällä alla oleviin kuviin.

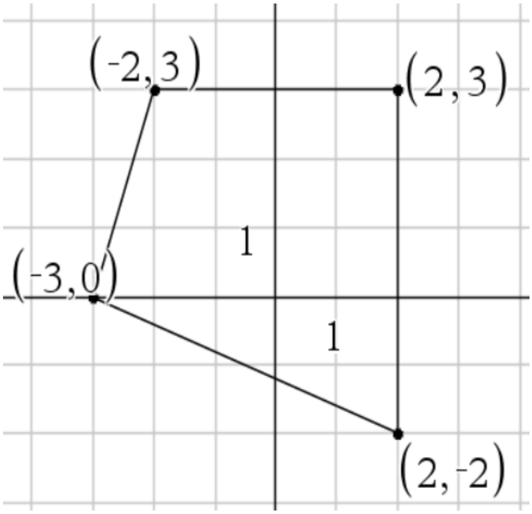






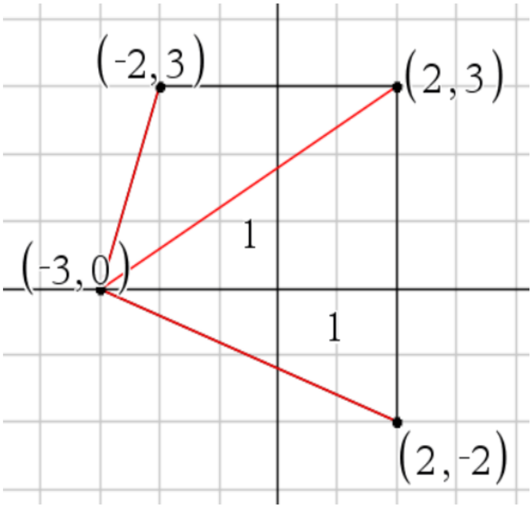
Algoritmin mukaan tulee laskea kaikkien kuuden kolmion pinta-alat yhteen. Pelkästään keskimmäisen kuvan sinisen ja oranssin kolmion yhteinen ala on suurempi kuin koko monikulmion ala. Algoritmin antama pinta-ala on siis liian suuri.

Alla on esimerkki, johon **algoritmi toimii**.

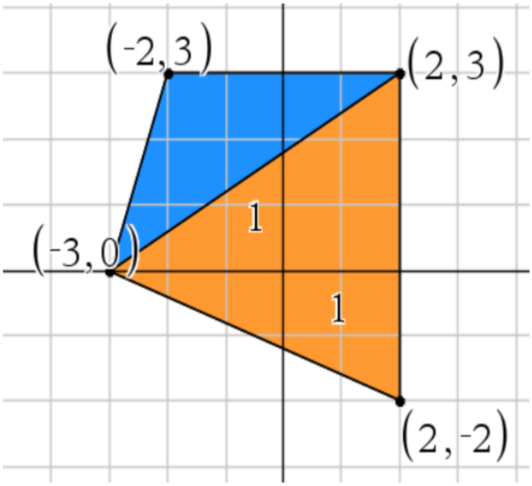


2p (yht. 5p)

Yhdistetään kärkipiste (-3,0) muihin kärkiin.



Monikulmio jakaantuu kahteen kolmioon, joiden yhteinen ala on yhtä suuri kuin monikulmion ala.



Algoritmi toimii tässä monikulmiossa, koska se jakaantuu aina kahteen kolmioon riippumatta siitä, mistä kärkipisteestä (punaiset) janat piirretään.

3. Ilmaus ”yhdistämällä sopivasti” ei kerro, kuinka yhdistettävät kärjet valitaan. Näin ollen ehdotettu algoritmi ei ratkaise niitä tapauksia, joissa yhdistettäviä kärkipisteitä ei voi valita miten tahansa. 5p (yht. 5p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.