

Yo-mallivastaukset
Syksy 2020



Lyhyt matematiikka

Tiesitkö tämän?

Mafylaiset veivät
vuoden 2020
haussa

81%

kaikista lääkiksen
pääsykoekiintiön paikoista.

60%

Pk-seudun lukioista
käyttää **Mafynettiä**.

Mafynetin oppimateriaalit tulossa kaikkiin LOPS 2021
moduuleihin matematiikkaan, fysiikkaan, kemiaan ja
biologiaan!

Mafynetti

Mallivastausten tekijät:

Malliratkaisujen laatimisesta ovat vastanneet MAFY:n toinen perustaja Antti Suominen sekä MAFY:n oppimateriaalitiimi, jonka päätehtävä on laatia ja kehittää MAFY:n lukioon tarkoitettuja oppimateriaaleja.

Oppimateriaalitiimistä mukana olivat Antti Suomisen lisäksi Saija Ojala, Jori Suominen ja Timo Kalinainen.

Lisäksi työn tukena olivat Tuomas Hauvala ja Matti Virolainen.

Mafy oppimateriaalit

Olemme Helsingissä, Tampereella, Turussa ja Jyväskylässä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys.

Palveluitamme ovat:

- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali
- Lääketieteellisen valmennuskurssit
- Kauppatieteellisen valmennusmateriaalit
- DI-valmennuskurssit
- Yo-kokeisiin valmentavat kurssit

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kurseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Käyttöehdot

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafyvalmennus.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion matematiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukiokursseillasi. Nämä mallivastaukset ovat MAFY Oy:n omaisuutta.

<https://mafy.fi/yhteydenotto>

Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	8
Ratkaisu tehtävään 3	12
Ratkaisu tehtävään 4	19
Ratkaisu tehtävään 5	22
Ratkaisu tehtävään 6	24
Ratkaisu tehtävään 7	27
Ratkaisu tehtävään 8	30
Ratkaisu tehtävään 9	36
Ratkaisu tehtävään 10	42
Ratkaisu tehtävään 11	47
Ratkaisu tehtävään 12	53
Ratkaisu tehtävään 13	57

1. Perustehtäviä (12 p.)

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria. Osatehtävissä 1.3.–1.6. vastauksen maksimipituus on 10 merkkiä. Vastaukset arvostellaan tietokoneavusteisesti ja ohjeiden noudattamatta jättäminen voi johtaa piste-
vähennyksiin.

1.1. Seuraavista jonoista vain yksi voi olla geometrinen jono. Mikä? (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: $(1, 2, 3, \dots)$, $(\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}, \dots)$, $(\frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{16}{9}, \dots)$

1.2. Seuraavassa on kolme yhtälöä. Minkä kuvaaja on paraabeli? (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: $y = 2x + 7x + 2$, $y = 2(x + 1)^2$, $y = x^3 + x^2$

1.3. Taksin kilometriveloitus on 1,55 €/km. Lisäksi on maksettava perusmaksu 5,90 €. Laske 5,0 km pitkän taksimatkan hinta. (2 p.)

Vastaus: €

1.4. Laske ympyräsektorin pinta-ala yhden neliömillimetrin tarkkuudella, kun keskuskulman suuruus on 40° ja ympyrän säde on 34 mm. (2 p.)

Vastaus: mm²

1.5. Mikä on funktion $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ suurin nollakohta? (2 p.)

Vastaus: $x =$

1.6. Mikä on funktion $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ suurin arvo? (2 p.)

Vastaus:

Ratkaisu.

1.1. $(\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}, \dots)$ 2 p. (yht. 2 p.)

1.2. $y = 2(x + 1)^2$ 2 p. (yht. 4 p.)

1.3. 13,65 € 2 p. (yht. 6 p.)

1.4. 404 mm^2 2 p. (yht. 8 p.)

1.5. $x = 4$ 2 p. (yht. 10 p.)

1.6. 1 2 p. (yht. 12 p.)

Perustelut:

1.1. Geometrisessa jonossa peräkkäisten jäsenten suhde on vakio. Jonossa $(1, 2, 3, \dots)$ toisen ja ensimmäisen jäsenen suhde on

$$2 : 1 = \frac{2}{1} = 2,$$

mutta kolmannen ja toisen jäsenen suhde on

$$3 : 2 = \frac{3}{2} \neq 2,$$

joten jono $(1, 2, 3, \dots)$ ei voi olla geometrinen.

Jonossa $(\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}, \dots)$ toisen ja ensimmäisen jäsenen suhde on

$$1 : \frac{2}{5} = 1 \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

ja kolmannen ja toisen jäsenen suhde on

$$\frac{5}{2} : 1 = \frac{5}{2}.$$

Jono $(\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}, \dots)$ voi siis olla geometrinen.

Jonossa $(\frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{16}{9}, \dots)$ toisen ja ensimmäisen jäsenen suhde on

$$\frac{4}{3} : \frac{3}{4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{9},$$

mutta kolmannen ja toisen jäsenen välinen suhde on

$$\frac{16}{9} : \frac{4}{3} = \frac{16}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{4}{3} \neq \frac{16}{9},$$

joten jono $(\frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{16}{9}, \dots)$ ei voi olla geometrinen.

- 1.2. Jos yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$, jossa $a \neq 0$, yhtälö esittää paraabelia. Kirjoitetaan ensimmäinen yhtälö muotoon, jossa oikea puoli on sievennetty.

$$y = 2x + 7x + 2$$

$$y = 9x + 2$$

Ensimmäinen yhtälö esittää suoraa.

Kirjoitetaan toinen yhtälö muotoon, jossa sulkeet on poistettu.

$$y = 2(x + 1)^2$$

$$y = 2(x + 1)(x + 1)$$

$$y = 2(x^2 + x + x + 1)$$

$$y = 2(x^2 + 2x + 1)$$

$$y = 2x^2 + 4x + 2$$

Toinen yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$, jossa $a = 2$, $b = 4$ ja $c = 2$, joten sen kuvaaja on paraabeli.

Kolmannessa yhtälössä

$$y = x^3 + x^2$$

on kolmannen asteen termi, joten se ei voi esittää paraabelia.

- 1.3. Taksin kilometriveloitus on $1,55 \text{ €/km}$, joten viiden kilometrin matkalta hinta on perusmaksu huomioon ottaen

$$5,90 \text{ €} + 5,0 \text{ km} \cdot 1,55 \frac{\text{€}}{\text{km}} = 13,65 \text{ €}.$$

- 1.4. Ympyräsektorin pinta-ala voidaan laskea kaavalla $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2$, jossa r on ympyrän säde.

Ympyrän säde on $r = 34 \text{ mm}$ ja keskuskulman suuruus on $\alpha = 40^\circ$, joten

ympyräsektorin pinta-ala on

$$\begin{aligned}A &= \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2 \\ &= \frac{40^\circ}{360^\circ} \pi (34 \text{ mm})^2 \\ &= 403,5201 \dots \text{ mm}^2 \\ &\approx 404 \text{ mm}^2\end{aligned}$$

1.5. Selvitetään funktion $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ nollakohdat toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\ -x^2 + 6x - 8 &= 0 \\ x &= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-1)} \\ x &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{-2} \\ x &= \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{-2} \\ x &= \frac{-6 \pm 2}{-2} \\ x &= \frac{-6 + 2}{-2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-6 - 2}{-2} \\ x &= \frac{-4}{-2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-8}{-2} \\ x &= 2 \quad \text{tai} \quad x = 4\end{aligned}$$

Nollakohdista suurempi on $x = 4$.

1.6.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Funktio $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ on alaspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat $x = 2$ ja $x = 4$. Paraabelin huippu on nollakohtien puolella välissä, joten funktio f saa suurimman arvonsa nollakohtien puolella välissä. Paraabelin huipun x -koordinaatti on

$$x = \frac{2 + 4}{2} = 3.$$

Funktio f saa siis suurimman arvonsa, kun $x = 3$. Tällöin funktion arvon on

$$f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 8 = 1.$$

Funktion suurin arvo on siis 1.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Selvitetään funktion f suurin arvo derivaatan avulla. Derivoidaan funktio $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

$$f'(x) = -2x + 6$$

Selvitetään derivaatan nollakohdat.

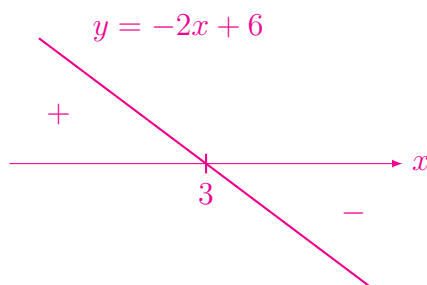
$$f'(x) = 0$$

$$-2x + 6 = 0 \quad \| -6$$

$$-2x = -6 \quad \| : (-2)$$

$$x = 3$$

Derivaattafunktio on laskeva suora. Piirretään mallikuva derivaattafunktion kuvaajasta.



Muodostetaan kulkukaavio.

3

$f'(x)$	+	-
$f(x)$	↗	↘

Funktio saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 3$. Funktion arvo on tällöin

$$f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 8 = 1.$$

Funktion suurin arvo on siis 1.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

2. Yhtälöitä (12 p.)

Ratkaise seuraavat yhtälöt. Anna vastausten likiarvot kahden desimaalin tarkkuudella.

1. $x^2 = 7$ (3 p.)

2. $7x^5 + 2 = -3x^5 + 4$ (3 p.)

3. $(3^x)^3 \cdot 3^4 = 3^{11}$ (3 p.)

4. $13^x = 147$ (3 p.)

Ratkaisu.

1. Yhtälö $x^2 = 7$

$$x^2 = 7$$

$$x = \pm\sqrt{7}$$
 2 p. (yht. 2 p.)

$$x = \pm 2,645\dots$$

$$x \approx \pm 2,65$$
 1 p. (yht. 3 p.)

Vastaus: $x = \pm\sqrt{7} \approx \pm 2,65$

Jos löydetty vain ratkaisu $x = \sqrt{7}$, saa yhden pisteen riippumatta siitä, onko likiarvo laskettu vai ei.

2. Yhtälö $7x^5 + 2 = -3x^5 + 4$

$$7x^5 + 2 = -3x^5 + 4 \quad || -2 + 3x^5$$

$$7x^5 + 3x^5 = 4 - 2$$

$$10x^5 = 2 \quad || : 10 \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

$$x^5 = \frac{2}{10} \quad (2)$$

$$x^5 = \frac{1}{5} \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{1}{5}}$$

$$x = \frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{5}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt[5]{5}}$$

$$x = 0,724\dots$$

$$x \approx 0,72 \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Vastaus: $x = \sqrt[5]{\frac{1}{5}} \approx 0,72$

3. Yhtälö $(3^x)^3 \cdot 3^4 = 3^{11}$

$$(3^x)^3 \cdot 3^4 = 3^{11}$$

$$3^{x \cdot 3} \cdot 3^4 = 3^{11}$$

$$3^{3x+4} = 3^{11} \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)}$$

$$3x + 4 = 11 \quad || - 4 \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

$$3x = 11 - 4$$

$$3x = 7 \quad || : 3$$

$$x = \frac{7}{3}$$

$$x = 2,333\dots$$

$$x \approx 2,33 \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Vastaus: $x = \frac{7}{3} \approx 2,33$

4. Yhtälö $13^x = 147$

Ratkaisuvaihtoehto 1

$$13^x = 147$$

$$x = \log_{13}(147) \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)}$$

$$x = 1,945\dots$$

$$x \approx 1,95 \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Vastaus: $x = \log_{13}(147) \approx 1,95$

Ratkaisuvaihtoehto 2

$$13^x = 147 \quad || \lg()$$

$$\lg(13^x) = \lg(147) \quad \boxed{1 \text{ p. (yht. 1 p.)}}$$

$$x \cdot \lg(13) = \lg(147) \quad || : \lg(13) \quad \boxed{1 \text{ p. (yht. 2 p.)}}$$

$$x = \frac{\lg(147)}{\lg(13)}$$

$$x = 1,945 \dots$$

$$x \approx 1,95 \quad \boxed{1 \text{ p. (yht. 3 p.)}}$$

Vastaus: $x = \frac{\lg(147)}{\lg(13)} \approx 1,95$

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

3. Suorat ja kolmio (12 p.)

1. Suoran S_1 yhtälö on $2x + 5y = 7$. Suora S_2 kulkee pisteiden $(-1, -1)$ ja $(2, 5)$ kautta. Määritä suorien S_1 ja S_2 leikkauspiste. (6 p.)
2. Kolmion kärjet ovat pisteissä $(0, 0)$, $(2, 3)$, $(-1, 4)$. Laske kolmion origossa oleva kulma asteen tarkkuudella ja tämän kulman vastaisen sivun pituuden tarkka arvo. (6 p.)

Ratkaisu.

- 3.1. Tiedetään, että pisteet $(x_1, y_1) = (-1, -1)$ ja $(x_2, y_2) = (2, 5)$ ovat suoralla S_2 . Lasketaan suoran S_2 kulmakerroin.

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{5 - (-1)}{2 - (-1)} \quad \text{1 p. (yht. 1 p.)} \\
 &= \frac{5 + 1}{2 + 1} \\
 &= \frac{6}{3} \\
 &= 2 \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}
 \end{aligned}$$

Suoran S_2 yhtälön määrittäminen, ratkaisuvaihtoehto 1

Koska suoran S_2 kulmakerroin on $k = 2$, niin suoran S_2 yhtälö on muotoa

$$y = 2x + b. \quad (1)$$

Tiedetään, että piste $(-1, -1)$ on suoralla S_2 . Sijoitetaan pisteen $(-1, -1)$ koordinaatit $x = -1$ ja $y = -1$ yhtälöön (1).

$$y = 2x + b \quad \parallel x = -1, y = -1$$

$$-1 = 2 \cdot (-1) + b \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

$$-1 = -2 + b$$

$$-1 + 2 = b$$

$$1 = b$$

$$b = 1$$

Siis suoran S_2 yhtälö on $y = 2x + 1$. 1 p. (yht. 4 p.)

Pisteen $(-1, -1)$ koordinaattien sijaan voidaan käyttää pisteen $(2, 5)$ koordinaatteja.

Suoran S_2 yhtälön määrittäminen, ratkaisuvaihtoehto 2

Tiedetään, että suoran S_2 kulmakerroin on $k = 2$, ja että piste $(x_0, y_0) = (-1, -1)$ on suoralla. Määritetään suoran S_2 yhtälö

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad || k = 2, x_0 = -1, y_0 = -1$$

$$y - (-1) = 2(x - (-1)) \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

$$y + 1 = 2(x + 1)$$

$$y + 1 = 2x + 2 \quad || - 1$$

$$y = 2x + 1 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Pisteen $(-1, -1)$ koordinaattien sijaan voidaan käyttää pisteen $(2, 5)$ koordinaatteja.

Molemmat ratkaisuvaihtoehdot jatkuvat seuraavasti:

Suorien S_1 ja S_2 leikkauspiste on yhtälöparin

$$\begin{cases} 2x + 5y = 7 & (2) \\ y = 2x + 1 & (3) \end{cases}$$

ratkaisu. 1 p. (yht. 5 p.)

Ratkaistaan yhtälöpari sijoittamalla yhtälöön (2) muuttujan y paikalle yhtälöstä

(3) saatu $y = 2x + 1$.

$$2x + 5(2x + 1) = 7$$

$$2x + 5 \cdot 2x + 5 \cdot 1 = 7$$

$$2x + 10x + 5 = 7$$

$$12x + 5 = 7 \quad \parallel - 5$$

$$12x = 7 - 5$$

$$12x = 2 \quad \parallel : 12$$

$$x = \frac{2}{12}^{(2)}$$

$$x = \frac{1}{6}$$

Lasketaan leikkauspisteen y -koordinaatti sijoittamalla yhtälöön (2) $x = \frac{1}{6}$.

$$y = 2x + 1 \quad \parallel x = \frac{1}{6}$$

$$y = 2 \cdot \frac{1}{6} + 1$$

$$y = \frac{2}{6} + 1$$

$$y = \frac{1}{3} + \frac{3}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}$$

Leikkauspiste on $(\frac{1}{6}, \frac{4}{3})$. 1 p. (yht. 6 p.)

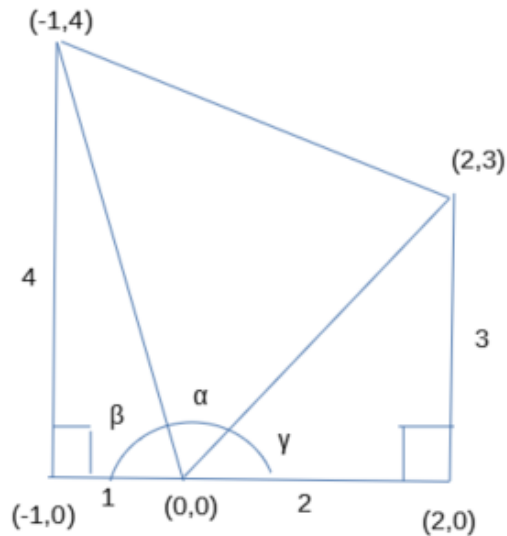
Vastaus: $(\frac{1}{6}, \frac{4}{3})$

Yhtälöpari voidaan ratkaista myös yhteen laskemalla.

3.2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Piirretään mallikuva. Tämä mallikuva on tehty LibreOffice Draw -ohjelmalla.



Mallikuvasta annetaan 1 p.

Tehtävässä kysytään kulmaa α . Kulma α voidaan laskea, kun lasketaan ensin kulmat β ja γ .

Ratkaistaan kulma β suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

$$\tan \beta = \frac{4}{1} \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

$$\beta = 75,963 \dots^\circ$$

Ratkaistaan kulma γ suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

$$\tan \gamma = \frac{3}{2} \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

$$\gamma = 56,309 \dots^\circ$$

Kulmien α , β ja γ summa on 180° , joten

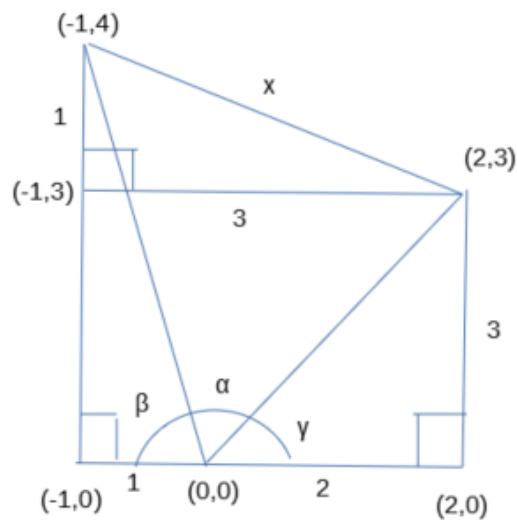
$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$$

$$\alpha = 180^\circ - 75,963\dots^\circ - 56,309\dots^\circ$$

$$\alpha = 47,726\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 48^\circ \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Lisätään mallikuvaan yksi piste ja yksi jana, jotta voidaan laskea kulman α vastaisen sivun pituus x .



Pythagoraan lauseen mukaan

$$x^2 = 1^2 + 3^2 \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

$$x^2 = 1 + 9$$

$$x^2 = 10$$

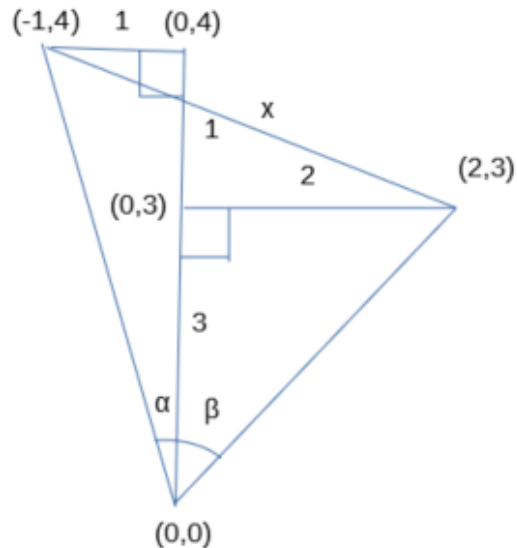
$$x = \pm\sqrt{10}$$

Sivun pituus ei voi olla negatiivinen, joten $x = \sqrt{10}$. 1 p. (yht. 6 p.)

Vastaus: Origossa oleva kulma on 48° ja kulman vastaisen sivun pituus on $\sqrt{10}$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Piirretään mallikuva. Tämä mallikuva on tehty LibreOffice Draw -ohjelmalla.



Mallikuvasta annetaan 1 p.

Tehtävässä kysytään kulmaa $\alpha + \beta$ ja sivun x pituutta.

Ratkaistaan kulma α suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

$$\tan \alpha = \frac{1}{4} \quad \text{1 p. (yht. 2 p.)}$$

$$\alpha = 14,036 \dots^\circ$$

Ratkaistaan kulma β suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

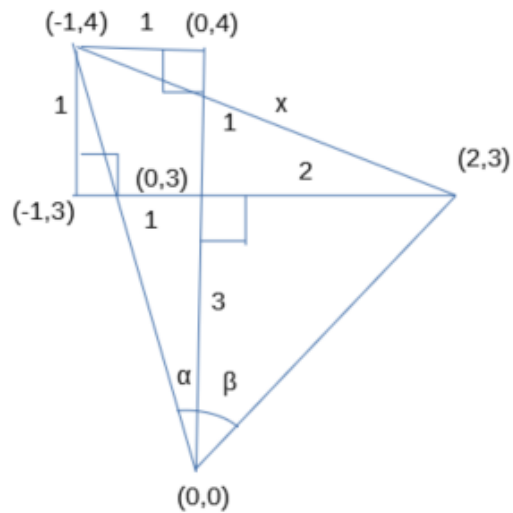
$$\tan \beta = \frac{2}{3} \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

$$\beta = 33,690 \dots^\circ$$

Lasketaan kysytty kulma $\alpha + \beta$.

$$\alpha + \beta = 14,036 \dots^\circ + 33,690 \dots^\circ = 47,726 \dots^\circ \approx 48^\circ \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Täydennetään mallikuvaa, jotta nähdään, miten sivu x voidaan laskea.



Pythagoraan lauseen mukaan

$$x^2 = 1^2 + 3^2 \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

$$x^2 = 1 + 9$$

$$x^2 = 10$$

$$x = \pm\sqrt{10}$$

Sivun pituus ei voi olla negatiivinen, joten $x = \sqrt{10}$. 1 p. (yht. 6 p.)

Vastaus: Origossa oleva kulma on 48° ja kulman vastaisen sivun pituus on $\sqrt{10}$.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

4. Veriryhmä tai Suurin arvo (12 p.)

Ratkaise joko tehtävä 1. Veriryhmä TAI tehtävä 2. Suurin arvo.

- Veriryhmä:** Ihmisen veriryhmä on jokin tyypeistä A, B, AB, tai O. Suomessa A:n osuus on 41 %, B:n 18 %, AB:n 8 % ja O:n 33 %. Millä todennäköisyydellä kahdella satunnaisesti valitulla henkilöllä on sama veriryhmä? (12 p.)
- Suurin arvo:** Määritä derivaattaa käyttämällä funktion $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - x + 4$ suurin arvo välillä $0 \leq x \leq 1$. (12 p.)

Ratkaisu.

- 4.1. Kahdella satunnaisesti valitulla henkilöllä on sama veriryhmä, jos molemmilla on veriryhmä A tai molemmilla on veriryhmä B tai molemmilla on veriryhmä AB tai molemmilla on veriryhmä O. 2 p. (yht. 2 p.)

Todennäköisyys tälle on

$$P(\text{sama veriryhmä})$$

$$= P(A \text{ ja } A) + P(B \text{ ja } B) + P(AB \text{ ja } AB) + P(O \text{ ja } O) \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

$$= 0,41 \cdot 0,41 + 0,18 \cdot 0,18 + 0,08 \cdot 0,08 + 0,33 \cdot 0,33 \quad \text{2+2+2+2 p. (yht. 11 p.)}$$

$$= 0,1681 + 0,0324 + 0,0064 + 0,1089$$

$$= 0,3158$$

$$\approx 0,32 \quad \text{1 p. (yht. 12 p.)}$$

Kahdella satunnaisesti valitulla henkilöllä on sama veriryhmä todennäköisyydellä 0,32.

Vastaus: 0,32

- 4.2. Funktio $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - x + 4$ saa suurimman arvonsa välillä $[0, 1]$ välillä olevassa derivaatan nollakohdassa tai välin päätepisteessä. 2 p. (yht. 2 p.)

Derivoidaan funktio $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - x + 4$.

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{4}{3}x^{3-1} - 1 + 0 = 4x^2 - 1 \quad \text{1 p. (yht. 3 p.)}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$4x^2 - 1 = 0 \quad || + 1 \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

$$4x^2 = 1 \quad || : 4$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}$$

$$x = \pm \frac{1}{2} \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

Derivaattafunktion nollakohdista ainoastaan $x = \frac{1}{2}$ kuuluu välille $[0, 1]$. 2 p. (yht. 7 p.)

Funktio saa suurimman arvonsa välillä $[0, 1]$ joko derivaattafunktion nollakohdassa $x = \frac{1}{2}$ tai välin päätepisteessä. Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa.

$$f(0) = \frac{4}{3} \cdot 0^3 - 0 + 4 = 4 \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} + 4$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 4$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{3}{6} + \frac{24}{6}$$

$$= \frac{22}{6}$$

$$= \frac{11}{3} \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

$$f(1) = \frac{4}{3} \cdot 1^3 - 1 + 4$$

$$= \frac{4}{3} + 3$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{9}{3}$$

$$= \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3} \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

Funktion suurin arvo on $f(1) = \frac{13}{3}$. 2 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Funktion suurin arvo välillä $[0, 1]$ on $\frac{13}{3}$.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

5. Maankäytön muutos (12 p.)

Aineisto:

5. A [Taulukko: Maankäyttö vuonna 2015](#)

Hallitustenvälisen ilmastopaneelin (IPCC) vuoden 2019 raportissa hyödynnettiin maankäytön tilastoja vuodelta 2015 (aineisto 5. A). Niiden mukaan jäätömästä maanpinnasta on ihmisen käytössä 72 % ja loput 28 % on käyttämättä. Oletetaan, että maankäyttö muuttuu vuosien 2015 ja 2030 välillä seuraavilla tavoilla:

- Kasvispitoisempaan ruokavalioon siirtyminen vähentää laidunmaan pinta-alaa kymmenellä prosentilla. Tämä pinta-ala muuttuu viljelysmaaksi.
- Viisi prosenttia käyttämättömästä osasta otetaan käyttöön talousmetsänä.

Laske näiden oletusten perusteella eri maankäyttötapojen prosenttiosuudet vuonna 2030.

Ratkaisu.

Laidunmaan pinta-ala vähenee kymmenellä prosentilla, jolloin laidunmaan pinta-ala vuonna 2030 on $1 - 0,1 = 0,9$ -kertainen vuoden 2015 laidunmaan pinta-alaan verrattuna. Vuonna 2015 laidunmaan osuus oli 37 %, joten vuonna 2030 laidunmaan osuus on

$$\begin{aligned}
 &0,37 \cdot (1 - 0,1) && \text{1 p. (yht. 1 p.)} \\
 &= 0,37 \cdot 0,9 \\
 &= 0,333 \\
 &= 33,3 \% \\
 &\approx 33 \%. && \text{1 p. (yht. 2 p.)}
 \end{aligned}$$

Laidunmaasta vähentynyt 10 prosentin pinta-ala muuttuu viljelysmaaksi. Viljelysmaan osuus siis kasvaa luvun $0,1 \cdot 0,37$ verran. Vuonna 2030 viljelysmaan osuus on

$$\begin{aligned}
 &0,12 + 0,1 \cdot 0,37 && \text{2 p. (yht. 4 p.)} \\
 &= 0,157 \\
 &= 15,7 \% \\
 &\approx 16 \%. && \text{1 p. (yht. 5 p.)}
 \end{aligned}$$

Viisi prosenttia käyttämättömästä osasta otetaan käyttöön, eli käyttämätön osa vuonna 2030 on $100\% - 5\% = 95\%$ vuoden 2015 käyttämättömästä osuudesta. Käyttämätön osuus vuonna 2030 on

$$\begin{aligned} &0,28 \cdot (1 - 0,05) && \text{1 p. (yht. 6 p.)} \\ &= 0,28 \cdot 0,95 \\ &= 0,266 \\ &= 26,6\% \\ &\approx 27\%. && \text{1 p. (yht. 7 p.)} \end{aligned}$$

Tällöin käytössä oleva osuus vuonna 2030 on

$$100\% - 26,6\% = 73,4\% \approx 73\%. \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

Viisi prosenttia käyttämättömästä osasta otetaan käyttöön talousmetsänä eli talousmetsän osuus kasvaa luvun $0,05 \cdot 0,28$ verran. Vuonna 2030 talousmetsän osuus on

$$\begin{aligned} &0,22 + 0,05 \cdot 0,28 && \text{2 p. (yht. 10 p.)} \\ &= 0,234 \\ &= 23,4\% \\ &\approx 23\%. && \text{1 p. (yht. 11 p.)} \end{aligned}$$

Rakennetun alueen osuus pysyy ennallaan, joten vuonna 2030 rakennetun alueen osuus on 1%. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus:

Käyttämättä: 27 %

Käytössä: 73 %

- rakennetut alueet: 1 %
- viljelysmaa: 16 %
- laidunmaa: 33 %
- talousmetsä: 23 %

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

6. Abiturentit ravintolassa (12 p.)

Joukko abiturientteja on ravintolassa syömässä ja laskun maksun yhteydessä päättää antaa tarjoilijalle juomarahaa 10 % laskun loppusummasta. Jos jokainen abiturientti maksaa 25 euroa, niin rahaa laskun maksuun on 3 euroa enemmän kuin laskun loppusumma, mutta raha ei riitä kattamaan 10 %:n juomarahaa. Jos jokainen abiturientti maksaa 27 euroa, niin laskun maksuun kerätty raha kattaa juomarahan ja tarjoilijalle jää vielä 80 senttiä ylimääräistä juomarahaa 10 % juomarahan lisäksi. Mikä on laskun loppusumma, ja kuinka monta abiturienttia joukossa on?

Ratkaisu.

Merkitään abiturienttien lukumäärää kirjaimella x ja laskun loppusummaa euroina kirjaimella y . 1 p. (yht. 1 p.)

Muodostetaan kummastakin tilanteesta yhtälö, jolloin saadaan yhtälöpari, josta voidaan ratkaista x ja y .

Ensimmäisessä tilanteessa jokainen abiturientti maksaa 25 euroa, jolloin saadaan maksettua laskun loppusumma ja yli jää 3 euroa. Muodostuu siis yhtälö

$$25x = y + 3. \quad \text{3 p. (yht. 4 p.)}$$

Toisessa tilanteessa jokainen abiturientti maksaa 27 euroa, jolloin saadaan maksettua laskun loppusumma juomarahoineen ja tarjoilijalle jää vielä yli 80 senttiä eli 0,80 euroa. Juomaraaha on 10 % laskun loppusummasta eli laskun loppusumma juomarahoineen on $1,10y$. Toisesta tilanteesta voidaan muodostaa siis yhtälö

$$27x = 1,10y + 0,80. \quad \text{3 p. (yht. 7 p.)}$$

Muodostuu seuraava yhtälöpari:

$$\begin{cases} 25x = y + 3 \\ 27x = 1,10y + 0,80 \end{cases}$$

Ratkaisuvaihtoehto 1

Ratkaistaan muodostunut yhtälöpari

$$\begin{cases} 25x = y + 3 \\ 27x = 1,10y + 0,80 \end{cases}$$

laskinohjelmalla. Esimerkiksi TI-Nspirellä yhtälöpari voidaan ratkaista solve- komenolla.

$$\text{solve}\left(\left\{\begin{array}{l} 25 \cdot x = y + 3 \\ 27 \cdot x = 1.1 \cdot y + 0.8 \end{array}\right\}, \{x, y\}\right) \quad x=5. \text{ and } y=122.$$

Laskinohjelmalla saadaan, että $x = 5$ ja $y = 122$. 4 p. (yht. 11 p.) eli abiturientteja on 5 ja laskun loppusumma on 122 euroa. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Abiturientteja on 5 ja laskun loppusumma on 122 euroa.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Ratkaistaan yhtälöparin

$$\begin{cases} 25x = y + 3 \\ 27x = 1,10y + 0,80 \end{cases}$$

ylemmästä yhtälöstä y .

$$25x = y + 3$$

$$y = 25x - 3 \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

Sijoitetaan tämä yhtälöparin alempaan yhtälöön muuttujan y paikalle ja ratkaistaan x .

$$27x = 1,10y + 0,80 \quad \parallel y = 25x - 3$$

$$27x = 1,10 \cdot (25x - 3) + 0,80 \quad \text{1 p. (yht. 9 p.)}$$

$$27x = 1,10 \cdot 25x - 1,10 \cdot 3 + 0,80$$

$$27x = 27,5x - 3,30 + 0,80 \quad \parallel - 27,5x$$

$$-0,50x = -2,50 \quad \parallel : (-0,50)$$

$$x = 5 \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

Abiturientteja on siis 5.

Lasketaan vielä y sijoittamalla $x = 5$ yhtälöön $y = 25x - 3$.

$$y = 25x - 3 \quad || x = 5$$

$$y = 25 \cdot 5 - 3$$

$$y = 125 - 3$$

$$y = 122$$

1 p. (yht. 11 p.)

Laskun loppusumma on siis 122 euroa.

Vastaus: Abiturienteja on 5 ja laskun loppusumma on 122 euroa. 1 p. (yht. 12 p.)

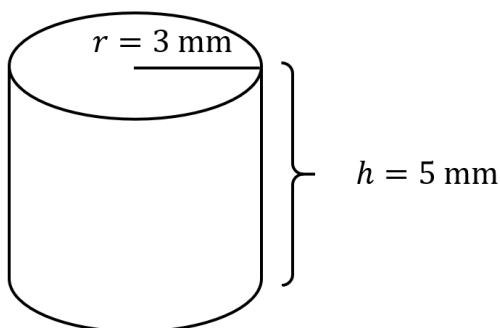
Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

7. Hammastahnaa tuubista (12 p.)

Hammastahnatuubissa on 90 ml tahnaa, ja sen pyöreän suuaukon halkaisija on 6 mm. Riittääkö yksi hammastahnatuubi nelihenkisessä perheessä kolmen kuukauden käyttöön, kun jokainen perheenjäsen pesee hampaansa aamulla ja illalla ja pursottaa 5 mm tahnaa hammasharjaansa jokaisella pesukerralla?

Ratkaisu.

Selvitetään ensin hammastahnan kerta-annoksen tilavuus. Hammastahnaa pursotetaan 5 mm suuaukosta, jonka halkaisija on 6 mm. Suuaukon säde on siten 3 mm. Hammastahnan kerta-annoksesta muodostuu siis suora ympyrälieriö.



Hammastahnan kerta-annoksen tilavuus V_{kerta} voidaan laskea suoran ympyrälieriön tilavuuden avulla.

$$V_{\text{kerta}} = \pi r^2 h \quad || r = 3 \text{ mm}, h = 5 \text{ mm}$$

$$V_{\text{kerta}} = \pi (3 \text{ mm})^2 \cdot (5 \text{ mm}) \quad \text{2 p. (yht. 2 p.)}$$

$$V_{\text{kerta}} = 45\pi \text{ mm}^3$$

$$V_{\text{kerta}} = 141,371 \dots \text{ mm}^3 \quad \text{2 p. (yht. 4 p.)}$$

Hammastahnatuubissa on 90 ml tahnaa. Tiedetään, että $1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$, joten muunnetaan hammastahnan kerta-annos yksikköön cm^3 ja sitten yksikköön ml.

$$V_{\text{kerta}} = 141,371 \dots \text{ mm}^3$$

$$= 0,141 \dots \text{ cm}^3 \quad \text{2 p. (yht. 6 p.)}$$

$$= 0,141 \dots \text{ ml} \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

Ratkaisuvaihtoehto 1

Selvitetään, kuinka paljon hammastahnaa perhe käyttää kolmessa kuukaudessa. Kolmessa kuukaudessa on $3 \cdot 30 = 90$ päivää. Perheessä on 4 henkilöä, joista jokainen käyttää hammastahnan kerta-annoksen kaksi kertaa päivässä. Perhe käyttää hammastahnaa kolmessa kuukaudessa siis

$$90 \cdot 4 \cdot 2 \cdot V_{\text{kerta}} = 90 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 0,141 \dots \text{ ml} \quad (2 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

$$= 101,787 \dots \text{ ml} \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)})$$

$$> 90 \text{ ml} \quad (1 \text{ p. (yht. 11 p.)})$$

joten hammastahna ei riitä kolmeksi kuukaudeksi. (1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: ei riitä

Ratkaisuvaihtoehto 2

Selvitetään, kuinka moneksi päiväksi hammastahnatuubi riittää.

Perheessä on 4 henkilöä, joista jokainen käyttää hammastahnan kerta-annoksen kaksi kertaa päivässä. Perhe käyttää päivässä hammastahnaa

$$4 \cdot 2 \cdot V_{\text{kerta}} = 4 \cdot 2 \cdot 0,141 \dots \text{ ml} \quad (1 \text{ p. (yht. 8 p.)})$$

$$= 1,130 \dots \text{ ml} \quad (1 \text{ p. (yht. 9 p.)})$$

$$\frac{90 \text{ ml}}{1,130 \dots \text{ ml}} = 79,577 \dots \quad (1 \text{ p. (yht. 10 p.)})$$

joten hammastahna riittää 79,577... päiväksi. (1 p. (yht. 11 p.)

Koska $79,577 \dots < 90$, ei hammastahnatuubi riitä kolmeksi kuukaudeksi. (1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: ei riitä

Ratkaisuvaihtoehto 3

Tuubissa on 90 ml tahnaa ja 3 kuukaudessa on $3 \cdot 30 = 90$ päivää, joten tuubi riittää 3 kuukaudeksi, jos perhe käyttää hammastahnaa korkeintaan 1 ml päivässä. Lasetaan, kuinka paljon perhe käyttää hammastahnaa päivässä. 2 p. (yht. 10 p.)

Perheessä on 4 henkilöä, joista jokainen käyttää hammastahnan kerta-annoksen kaksi kertaa päivässä. Perhe käyttää päivässä hammastahnaa

$$4 \cdot 2 \cdot V_{\text{kerta}} = 4 \cdot 2 \cdot 0,141 \dots \text{ ml} \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

$$= 1,130 \dots \text{ ml} \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

$$> 1 \text{ ml}$$

Perhe siis käyttää hammastahnaa yli 1 ml päivässä. Hammastahnaa ei siis riitä kolmeksi kuukaudeksi. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: ei riitä

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

8. Rekursiiviset mallit (12 p.)

1. Säästötilin saldolle maksetaan vuosittain 2 % nettokorkoa, ja sen jälkeen tilille talletetaan 100 euroa. Tilin saldoa a_n voidaan mallintaa rekursiokaavalla

$$a_{n+1} = 1,02a_n + 100, \quad n \geq 1.$$

Alkuarvona on $a_1 = 1000$. Laske a_5 eli saldo neljän vuoden jälkeen. (6 p.)

2. Tutkijat ovat mallintaneet korppipopulaation kokoa seuraavien rekursiokaavojen avulla:

$$p_{n+1} = 0,95p_n + 0,02e_n,$$

$$e_{n+1} = p_n + e_n(1 - 0,01e_n),$$

missä p_n on pesivien korppien lukumäärä ja e_n on ei-pesivien korppien lukumäärä vuonna $n \geq 1$. Alkuarvot ovat $p_1 = 12$ ja $e_1 = 23$. Laske p_2 ja e_3 . (6 p.)

Ratkaisu.

8.1.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Tilin saldoa a_n mallinnetaan rekursiokaavalla

$$a_{n+1} = 1,02a_n + 100, \quad n \geq 1,$$

alkuarvo $a_1 = 1000$. Jotta voidaan laskea a_5 , täytyy laskea myös sitä edeltävät jäsenet, sillä rekursiokaavan mukaan

$$a_5 = a_{4+1} = 1,02a_4 + 100.$$

Rekursiokaavan avulla saadaan

$$\begin{aligned}a_2 &= a_{1+1} \\ &= 1,02a_1 + 100 \\ &= 1,02 \cdot 1000 + 100 && \text{1 p. (yht. 1 p.)} \\ &= 1120 && \text{1 p. (yht. 2 p.)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_3 &= a_{2+1} \\ &= 1,02a_2 + 100 \\ &= 1,02 \cdot 1120 + 100 \\ &= 1242,4 && \text{1 p. (yht. 3 p.)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_4 &= a_{3+1} \\ &= 1,02a_3 + 100 \\ &= 1,02 \cdot 1242,4 + 100 \\ &= 1367,248 && \text{1 p. (yht. 4 p.)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_5 &= a_{4+1} \\ &= 1,02a_4 + 100 \\ &= 1,02 \cdot 1367,248 + 100 \\ &= 1494,59296 && \text{1 p. (yht. 5 p.)}\end{aligned}$$

Jäsen $a_5 = 1494,59296$ euroa $\approx 1494,59$ euroa.

Vastaus: $a_5 \approx 1494,59$ euroa && \text{1 p. (yht. 6 p.)}

Tehtävässä hyväksytään myös ratkaisu, missä on pyöristetty $a_4 \approx 1367,25$ ja laskettu sitten a_5 käyttäen tätä pyöristettyä arvoa. Tällöin $a_5 = 1494,595 \dots \approx 1494,60$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Ratkaistaan tehtävä taulukkolaskentaohjelmalla. Tässä on käytetty LibreOffice Calc -ohjelmistoa.

Tilin saldoa a_n mallinnetaan rekursiokaavalla

$$a_{n+1} = 1,02a_n + 100, \quad n \geq 1.$$

Alkuarvo $a_1 = 1000$ on sijoitettu soluun B4. Soluun B5 kirjoitetaan rekursiokaava viitaten yllä olevaan soluun.

	A	B
1	Teht. 8.1	
2		
3	n	a_n
4		1 1000
5		2 =1,02*B4+100

Kuvakaappauksesta tai selityksestä (1 p.)

Kopioidaan solun B5 komento myös seuraaville riveille, jolloin saadaan loput taulukossa olevat arvot.

	A	B
1	Teht. 8.1	
2		
3	n	a_n
4		1 1000
5		2 1120
6		3 1242,4
7		4 1367,248
8		5 1494,59296

Kuvakaappauksesta (4 p.)

Jäsen $a_5 = 1494,59296$ euroa $\approx 1494,59$ euroa. 1 p. (yht. 6 p.)

Vastaus: $a_5 \approx 1494,59$ euroa

8.2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Pesivien korppien lukumäärä on p_n ja ei-pesivien korppien lukumäärä on e_n vuonna $n \geq 1$. Korppipopulaation kokoa voidaan mallintaa seuraavien rekursiokaavojen avulla:

$$p_{n+1} = 0,95p_n + 0,02e_n$$

$$e_{n+1} = p_n + e_n(1 - 0,01e_n).$$

Alkuarvot ovat $p_1 = 12$ ja $e_1 = 23$.

Ylemmän rekursiokaavan avulla saadaan laskettua p_2 .

$$\begin{aligned} p_2 &= p_{1+1} \\ &= 0,95p_1 + 0,02e_1 \quad (1 \text{ p. (yht. 1 p.)}) \\ &= 0,95 \cdot 12 + 0,02 \cdot 23 \\ &= 11,86 \end{aligned}$$

Korppien lukumäärän täytyy olla kokonaisluku, joten $p_2 \approx 12$. (1 p. (yht. 2 p.))

Jotta voidaan laskea e_3 , täytyy ensin laskea e_2 . Alemman rekursiokaavan avulla voidaan laskea e_2 .

$$\begin{aligned} e_2 &= e_{1+1} \\ &= p_1 + e_1(1 - 0,01e_1) \quad (1 \text{ p. (yht. 3 p.)}) \\ &= 12 + 23 \cdot (1 - 0,01 \cdot 23) \\ &= 29,71. \end{aligned}$$

Koska korppien lukumäärän täytyy olla kokonaisluku, on $e_2 \approx 30$. (1 p. (yht. 4 p.))

Lasketaan nyt e_3 .

$$\begin{aligned}
 e_3 &= e_{2+1} \\
 &= p_2 + e_2(1 - 0,01e_2) \quad (1 \text{ p. (yht. 5 p.)}) \\
 &= 11,86 + 29,71 \cdot (1 - 0,01 \cdot 29,71) \\
 &= 32,743159 \\
 &\approx 33 \quad (1 \text{ p. (yht. 6 p.)})
 \end{aligned}$$

Vastaus: $p_2 \approx 12$ ja $e_3 \approx 33$.

Jos halutaan mahdollisimman tarkka mallin antama tulos, niin välivaiheissa käytetään pyöristämättömiä lukuja. Ratkaisusta ei kuitenkaan vähennetä pisteitä, jos e_3 :n on laskettu käyttämällä pyöristettyjä arvoja $p_2 = 12$ ja $e_2 = 30$. Korppien määrät vastauksissa on kuitenkin pyöristettävä lähimpiin kokonaislukuihin.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Ratkaistaan tehtävä taulukkolaskentaohjelmalla. Tässä on käytetty LibreOffice Calc -ohjelmistoa.

Lasketaan ensin p_2 rekursiokaavan $p_{n+1} = 0,95p_n + 0,02e_n$ avulla. Käytetty komento näkyvillä kuvassa solussa C15.

13	n	e_n	p_n
14	1	23	12
15	2		=0,95*C14+0,02*B14
16	3		

Kuvakaappauksesta (1 p.)

Näin saadaan $p_2 = 11,86$. Koska korppien määrän on oltava kokonaisluku, niin $p_2 \approx 12$. (1 p. (yht. 2 p.))

Rekursiokaavan $e_{n+1} = p_n + e_n(1 - 0,01e_n)$ avulla voidaan laskea e_3 . Alla olevassa kuvassa näkyy solussa B15 käytetty komento.

13	n	e_n	p_n
14		1	23
15		2 = C14 + B14 * (1 - 0,01 * B14)	
16		3	

Kuvakaappauksesta (1 p.)

Kopioimalla solussa B15 käytetty komento soluun B16 saadaan laskettua e_3 .

1 p. (yht. 4 p.)

Tulokset näkyvät alla olevassa taulukossa.

13	n	e_n	p_n
14		1	23
15		2	29,71
16		3	32,743159

Kuvakaappauksesta (1 p.)

Koska korppien lukumäärän täytyy olla kokonaisluku, saadaan $e_3 \approx 33$.

1 p. (yht. 6 p.)

Vastaus: $p_2 \approx 12$ ja $e_3 \approx 33$.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

9. Merimetsot (12 p.)

Aineisto:

9. A [Taulukko: Merimetsot](#)

Taulukossa 9. A on merimetsion pesien lukumäärä eri yhdyskunnissa vuonna 2019. Samassa kunnassa sijaitsevia yhdyskuntia on merkitty taulukossa numeroilla, esimerkiksi Kirkkonummi 1 ja Kirkkonummi 2.

1. Kuinka monta merimetsion pesää oli aineiston mukaan olemassa vuonna 2019? (2 p.)
2. Selvitä, mikä yhdyskunnista oli pienin ja mikä suurin, sekä se, mikä oli samaan yhdyskuntaan kuuluvien pesien lukumäärän keskiarvo ja keskihajonta. (3 p.)
3. Aineisto luokitellaan keskihajonnan pituisiin luokkiin siten, että keskiarvo on yhtenä luokkarajana. Mihin luokkaan Kokkolan merimetsoyhdyskunta kuuluu? (3 p.)
4. Määritä luokitellun aineiston suhteelliset frekvenssit ja kuvaile sanallisesti luokiteltua jakaumaa. (4 p.)

Ratkaisu.

- 9.1. Merimetsion pesien lukumäärä saadaan laskemalla yhteen solut B2-B48. LibreOffice Calc -ohjelmassa pesien lukumäärä saadaan komennolla =SUMMA (B2 : B48).

	A	B	C
1	Yhdyskunta	Pesiä	
2	Helsinki	7	
3	Kristinankaupunki 2	30	
4	Parainen	30	
5	Espoo	36	
6	li	40	
7	Sauvo 2	40	
8	Vöyri 2	45	
9	Hamina 4	73	
10	Raasepori 5	75	
11	Hamina 3	85	
12	Naantali	88	
13	Hamina 2	91	
14	Sauvo 1	127	
15	Porvoo 4	132	
16	Raasepori 4	136	
17	Porvoo 3	158	
18	Siikajoki	163	
19	Maalahti	192	
20	Uusikaarlepyy 3	231	
21	Raasepori 3	239	
22	Hamina 1	261	
23	Porvoo 2	280	
24	Loviisa 3	294	
25	Vöyri 1	300	
26	Loviisa 2	345	
27	Raasepori 2	373	
28	Sipoo	387	
29	Raasepori 1	395	
30	Uusikaarlepyy 2	462	
31	Hanko	467	
32	Pyhtää	562	
33	Eurajoki 2	563	
34	Loviisa 1	563	
35	Kokkola	600	
36	Kristinankaupunki 1	870	
37	Kirkkonummi 2	875	
38	Porvoo 1	990	
39	Uusikaarlepyy 1	1051	
40	Kustavi	1055	
41	Virolahti	1148	
42	Pori	1246	
43	Eurajoki 1	1561	
44	Uusikaupunki	1670	
45	Mustasaari	1710	
46	Turku	1766	
47	Kirkkonummi 1	1793	
48	Rauma	2080	
49	Yhteensä	=SUMMA(B2:B48)	

Merimetson pesiä oli yhteensä 25 685 kappaletta.

Vastaus: 25 685

Pisteet: kuvakaappauksesta tai komennon selityksestä 1 p, vastauksesta 1 p.

9.2. LibreOffice Calc- ohjelmalla voidaan selvittää pienin ja suurin yhdyskunta sekä

keskiarvo ja keskihajonta alla olevien komentojen avulla.

50	Minimi	MIN(B2:B48)	Helsinki	
51	Maksimi	MAKS(B2:B48)	Rauma	
52	Keskiarvo	KESKIARVO(B2:B48)		
53	Keskihajonta	KESKIHAJONTA(B2:B48)		
54				

Yllä olevien komentojen avulla saadaan alla olevat tulokset.

Minimi	7	Helsinki
Maksimi	2080	Rauma
Keskiarvo	546,4894	
Keskihajonta	576,4498	

Pienin yhdyskunta on 7 eli Helsingin yhdyskunta. Suurin yhdyskunta on 2080 eli Rauman yhdyskunta. 1 p. (yht. 3 p.)

Pienin ja suurin yhdyskunta voidaan etsiä suoraan myös taulukosta. Pienin yhdyskunta on se, jonka pesien lukumäärä on pienin eli Helsingin yhdyskunta. Vastaavasti suurin yhdyskunta on se, jonka pesien lukumäärä on suurin eli Rauman yhdyskunta.

Samaan yhdyskuntaan kuuluvien pesien lukumäärän keskiarvo oli $546,489 \approx 546$ 1 p. (yht. 4 p.) ja keskihajonta $576,45 \approx 576$ 1 p. (yht. 5 p.)

Vastaus: Pienin yhdyskunta on Helsingin yhdyskunta ja suurin Rauman. Keskiarvo on 546 ja keskihajonta 576.

Edellä olevassa ratkaisussa on käytetty keskihajontana otoskeskihajontaa. Otoskeskihajonnan laskukaavassa jakajana on $n - 1$. Jos keskihajonta lasketaan koko populaatiosta, jakajana on n . Tällöin keskihajonta on $570,2844 \approx 570$. Molemmat ratkaisutavat hyväksytään.

- 9.3. Kokkolan merimetsöyhdyskunnassa pesiä on 600. Pesien lukumäärän keskiarvo on 546,489. Koska $546,489 < 600$ on keskiarvo luokan alarajana, sillä keskiarvon tulee olla yhtenä luokkarajana. (1 p. (yht. 6 p.))

Aineisto luokitellaan keskihajonnan pituisiin luokkiin, joten Kokkolan merimetsöyhdyskunnan luokan yläraja on keskiarvo + keskihajonta, sillä $600 < 546,489 + 576,45 = 1122,94$. (1 p. (yht. 7 p.))

Kokkolan merimetsöyhdyskunta kuuluu siis välille [keskiarvo, keskiarvo + keskihajonta]. (1 p. (yht. 8 p.))

Vastaus: luokkaan [keskiarvo, keskiarvo + keskihajonta]

Jos keskihajontana on käytetty otoskeskihajontaa, luokan yläraja on 1116,77. Tällöinkin Kokkolan merimetsöyhdyskunta kuuluu luokkaan luokkaan [keskiarvo, keskiarvo + keskihajonta].

- 9.4. Jotta voidaan laskea suhteelliset frekvenssit, täytyy ensin selvittää luokkien ylärajat ja luokkien frekvenssit. Aineistosta muodostuvien luokkien ylärajat ovat seuraavat: keskiarvo, keskiarvo + keskihajonta, keskiarvo + 2 keskihajontaa ja keskiarvo + 3 keskihajontaa. Luokan yläraja ei voi olla keskiarvo - keskihajonta, sillä tällöin luokkaan kuuluvat arvot olisivat negatiivisia (yläraja olisi $546,489 - 576,45 = -29,961$).

Alla on esitetty luokkien ylärajat, kun solu B52 on keskiarvo ja solu B53 keskihajonta.

Luokan yläraja	Luokan yläraja
B52	546,489361702128
B52+B53	1122,93913598925
B52+2*B53	1699,38891027637
B52+3*B53	2275,83868456349

Ylärajojen laskemisesta tulee (1 p.)

Selvitetään sitten frekvenssit näissä luokissa. Frekvenssit voidaan laskea esimerkiksi alla olevalla komennolla tai laskemalla käsin aineistosta kuhunkin luokkaan kuuluvien yhdyskuntien lukumäärät.

={TAAJUUS(B2:B48;D2:D5)}	
D	E
Luokan yläraja	frekvenssi
546,489361702128	30
1122,93913598925	9
1699,38891027637	4
2275,83868456348	4

Frekvenssien laskemisesta tulee (1 p.)

Lasketaan frekvenssit yhteen SUMMA-komennolla.

D	E	D	E
Luokan yläraja	frekvenssi	Luokan yläraja	frekvenssi
546,489361702128	30	546,489361702128	30
1122,93913598925	9	1122,93913598925	9
1699,38891027637	4	1699,38891027637	4
2275,83868456348	4	2275,83868456348	4
	0		0
Yhteensä:	=SUMMA(E2:E5)	Yhteensä:	47

Nyt voidaan laskea suhteelliset frekvenssit.

D	E	F
Luokan yläraja	frekvenssi	suhteellinen frekvenssi
546,489361702128	30	=E2/\$E\$7
1122,93913598925	9	0,191489361702128
1699,38891027637	4	0,085106382978723
2275,83868456348	4	0,085106382978723
	0	
Yhteensä:	47	

Solun F2 komento on kopioitu alempiin soluihin. Näin saadaan kunkin luokan suhteelliset frekvenssit laskettua.

Luokan yläraja	frekvenssi	suhteellinen frekvenssi	eli
546,489361702128	30	0,638297872340426	30/47
1122,93913598925	9	0,191489361702128	9/47
1699,38891027637	4	0,085106382978723	4/47
2275,83868456348	4	0,085106382978723	4/47
	0		
Yhteensä:	47		

Suhteelliset frekvenssit ovat $\frac{30}{47}$, $\frac{9}{47}$, $\frac{4}{47}$ ja $\frac{4}{47}$. 1 p. (yht. 11 p.)

Luokitellusta aineistosta nähdään, että pieniä yhdyskuntia on paljon, keskikokoisia jonkin verran ja suuria vähän. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Suhteelliset frekvenssit ovat $\frac{30}{47}$, $\frac{9}{47}$, $\frac{4}{47}$ ja $\frac{4}{47}$. Pieniä yhdyskuntia on paljon, keskikokoisia jonkin verran ja suuria vähän.

Jos keskihajontana käytetään otoskeskihajontaa, tulokset ovat muuten samat kuin yllä, mutta luokkien ylärajat ovat alla olevan taulukon mukaiset:

Luokan yläraja	frekvenssi	suhteellinen frekvenssi	eli
546,489361702128	30	0,638297872340426	30/47
1116,77372049766	9	0,191489361702128	9/47
1687,05807929318	4	0,085106382978723	4/47
2257,34243808871	4	0,085106382978723	4/47
	0		
Yhteensä:	47		

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

10. Maksukykyisyydesti (12 p.)

Aineisto:

10. A [Taulukko: Laina](#)

Kun yksityishenkilö hakee asuntolainaa, haluaa pankki yleensä tehdä maksukykyisyydestin. Tavoitteena on varmistaa, että henkilö selviää tulevaisuudessa mahdollisesti kasvavista koroista. Annikalle myönnetään 100 000 euron laina 1,2 %:n vuosikorkokannalla. Pankki on tehnyt maksukykyisyydestin 6,0 %:n vuosikorkokannalla. Annuiteettilainan takaisinmaksuaika on 15 vuotta.

1. Kuinka paljon rahaa kuukaudessa Annikalla on oltava käytettävissä lainan takaisinmaksuun, jotta hän läpäisisi maksukykyisyydestin? (6 p.)
2. Tee taulukon 10. A mallin mukainen laskelma, josta näkyvät jäljellä oleva lainan määrä kuukausittain sekä ensimmäisen 12 kuukauden korot, lyhennykset ja annuiteetit. Laina nostetaan tänään, ja ensimmäinen lyhennys on kuukauden kuluttua. (6 p.)

Ratkaisu.

10.1 Annuiteettilainassa kuukausittaisen maksuerän suuruus eli annuiteetti on vakio. Lasketaan annuiteetin suuruus maksukykyisyydestin korkokannalla eli 6,0 %:lla. Laina-aika on 15 vuotta. Kuukausien eli korkokausien lukumäärä on siis $n = 15 \cdot 12 = 180$ 1 p. (yht. 1 p.). Kuukausittainen korkokanta on $p = \frac{6,0}{12} = 0,5$. Korkotekijä lainalle on

$$q = 1 + \frac{0,5}{100}$$

$$q = 1,005$$
 1 p. (yht. 2 p.)

Korkotekijä voidaan laskea myös suoraan

$$q = 1 + \frac{6,0}{12 \cdot 100}$$

$$q = 1,005$$

Lainapääoma on $K = 100\,000$ €, korkotekijä on $q = 1,005$ ja korkokausien lukumäärä on $n = 180$. Lainaerän eli annuiteetin suuruus A voidaan laskea

kaavakokoelmasta löytyvällä kaavalla:

$$\begin{aligned}
 A &= Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \\
 &= 100\,000 \text{ €} \cdot 1,005^{180} \cdot \frac{1-1,005}{1-1,005^{180}} \quad \text{2 p. (yht. 4 p.)} \\
 &= 843,856 \dots \text{ €} \\
 &\approx 843,86 \text{ €} \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}
 \end{aligned}$$

Vastaus: Annikalla on oltava kuukaudessa 843,86 € rahaa lainanmaksuun, jotta hän läpäisisi maksukykyisyydestin. 1 p. (yht. 6 p.)

10.2 Lasketaan Annikan lainan oikea annuiteetti eli maksuerän suuruus lainan oikealla korkokannalla. Nyt siis vuotuinen korkokanta on 1,2 % ja kuukausittainen korkokanta on $p = \frac{1,2}{12} = 0,1$. Korkotekijä lainalle on

$$\begin{aligned}
 q &= 1 + \frac{0,1}{100} \\
 &= 1,001
 \end{aligned}$$

Annuiteetin suuruus on nyt

$$\begin{aligned}
 A &= Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \\
 &= 100\,000 \text{ €} \cdot 1,001^{180} \cdot \frac{1-1,001}{1-1,001^{180}} \\
 &= 607,331 \dots \text{ €} \\
 &\approx 607,33 \text{ €} \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}
 \end{aligned}$$

Tämän tiedon perusteella voidaan täydentää kysytyt taulukko.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Annuiteetti on maksuerä, jonka pankki veloittaa. Sen suuruus on pyöristettävä sentin tarkkuuteen, sillä sitä pienempiä rahasummia ei voi maksaa tilisiirtona. Täydennetään taulukko siis siten, että annuiteetin suuruus on 607,33 €. Tällöin saadaan seuraava taulukko:

	A	B	C	D	E
1	Päivämäärä	Jäljellä oleva laina, €	Korko, €	Lyhennys, €	Annuiteetti, €
2	22.10.2020	100 000,00	0	0	0
3	22.11.2020	99 492,67	100,00	507,33	607,33
4	22.12.2020	98 984,83	99,49	507,84	607,33
5	22.01.2021	98 476,49	98,98	508,35	607,33
6	22.02.2021	97 967,63	98,48	508,85	607,33
7	22.03.2021	97 458,27	97,97	509,36	607,33
8	22.04.2021	96 948,40	97,46	509,87	607,33
9	22.05.2021	96 438,02	96,95	510,38	607,33
10	22.06.2021	95 927,13	96,44	510,89	607,33
11	22.07.2021	95 415,72	95,93	511,40	607,33
12	22.08.2021	94 903,81	95,42	511,91	607,33
13	22.09.2021	94 391,38	94,90	512,43	607,33
14					

Pistetyksestä: oikein lasketuista sarakkeista "Jäljellä oleva laina", "Korko" ja "Lyhennys" kustakin yksi piste.

Taulukko on laadittu seuraavasti: Ensimmäiselle riville (22.10.2020) on täydennetty nollat, sillä se tulkitaan lainan nostopäiväksi ja ensimmäinen maksuerä maksetaan siitä kuukauden päästä. Annuiteetin eli maksuerän suuruus säilyy vakiona, joten se voidaan täyttää lukuarvona jokaiselle riville E-sarakkeeseen. Korko lasketaan edellisen kuukauden alussa jäljellä olevasta lainasta. Eli marraskuun korko (solu C3) on laskettu lokakuussa jäljellä olleesta lainasummasta (solu B2). Soluun C3 on siis syötetty kaava $=0,001*B2$. Lyhennys saadaan annuiteetin ja koron erotuksena. Marraskuun maksun jälkeen jäljellä oleva lainasumma (solu B3) saadaan edellisen lainasumman ja marraskuun lyhennyksen erotuksena (eli B2-D3).

Selityksestä kaksi pistettä.

Näin saadut laskukaavat voidaan jatkaa taulukon seuraaville riveille hiirellä vetämällä, jolloin saadaan yllä oleva taulukko.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Lasketaan muuten kuin edellä, mutta lasketaan annuiteetti suoraan taulukoon laskukaavalla. Tällöin rahasummien viimeiset desimaalit muuttuvat hie-

	A	B	C	D	E
1	Päivämäärä	Jäljellä oleva laina, €	Korko, €	Lyhennys, €	Annuiteetti, €
2	22.10.2020	100 000,00	0	0	0
3	22.11.2020	99 492,67	100,00	507,33	607,33
4	22.12.2020	98 984,83	99,49	507,84	607,33
5	22.01.2021	98 476,48	98,98	508,35	607,33
6	22.02.2021	97 967,63	98,48	508,86	607,33
7	22.03.2021	97 458,26	97,97	509,36	607,33
8	22.04.2021	96 948,39	97,46	509,87	607,33
9	22.05.2021	96 438,01	96,95	510,38	607,33
10	22.06.2021	95 927,11	96,44	510,89	607,33
11	22.07.2021	95 415,71	95,93	511,40	607,33
12	22.08.2021	94 903,79	95,42	511,92	607,33
13	22.09.2021	94 391,36	94,90	512,43	607,33

Pistetyksestä: oikein lasketuista sarakkeista "Jäljellä oleva laina", "Korko" ja "Lyhennys" kustakin yksi piste.

Rahasummien muutos verrattuna ratkaisuvaihtoehtoon 1 johtuu siitä, että nyt annuiteetin ja siten koron, lyhennyksen ja jäljellä olevan lainan määrät on laskettu useiden desimaalien tarkkuudella. Tämä on se tapa, mikä esiteltiin YTL:n hyvän vastauksen piirteissä koepäivänä (22.9.2020). Tämän ratkaisutavan huono puoli on siinä, että rahasummia ei tyypillisesti lasketa useiden desimaalien tarkkuudella. Annika ei voi myöskään maksaa lainaansa takaisin kuin sentin tarkkuudella.

Selityksestä kaksi pistettä.

Alla olevassa kuvassa on osa samasta taulukosta siten, että luvuista näytetään useampia desimaaleja.

	A	B	C	D	E
1	Päivämäärä	Jäljellä oleva laina, €	Korko, €	Lyhennys, €	Annuiteetti, €
2	22.10.2020	100 000,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
3	22.11.2020	99 492,6682706	100,0000000	507,3317294	607,3317294
4	22.12.2020	98 984,8292095	99,4926683	507,8390611	607,3317294
5	22.01.2021	98 476,4823093	98,9848292	508,3469002	607,3317294

Ratkaisuvaihtoehto 3

Ratkaistaan tehtävä muuten kuin ratkaisuvaihtoehdossa 1, mutta tulkitaan ai-neistona annettua taulukkoa toisella tavalla. Tehtävänannossa sanottiin, että "Laina nostetaan *tänään*, ja ensimmäinen lyhennys on kuukauden kuluttua." Taulukon ensimmäinen rivi on päivämäärällä 22.10.2020 eli tasan kuukausi koe-päivämäärän (koe pidettiin 22.9.2020) jälkeen. Se on siis ensimmäisen maksue-rän päivämäärä.

Täydennetään taulukkoon annuiteetti sentin tarkkuudella eli syötetään luku 607,33 sarakkeeseen E jokaiselle riville. Korko saadaan saman rivin alussa ole-vasta, juuri ennen maksuerää jäljellä olevasta lainasummasta. Eli solun (C2) eli lokakuun maksuerän korkosumma saadaan lokakuussa jäljellä olevasta lai-nasummasta (solu B2) syöttämällä soluun C2 kaava $=0,001*B2$. Marraskuus-sa jäljellä oleva lainasumma (solu C3) saadaan vähentämällä lokakuun lyhen-nys lokakuussa jäljellä olleesta lainasummasta (eli soluun C3 syötetään kaava $=B2-D2$). Taulukko näyttää nyt tältä:

Selityksestä kaksi pistettä.

	A	B	C	D	E
1	Päivämäärä	Jäljellä oleva laina, €	Korko, €	Lyhennys, €	Annuiteetti, €
2	22.10.2020	100 000,00	100,00	507,33	607,33
3	22.11.2020	99 492,67	99,49	507,84	607,33
4	22.12.2020	98 984,83	98,98	508,35	607,33
5	22.01.2021	98 476,49	98,48	508,85	607,33
6	22.02.2021	97 967,63	97,97	509,36	607,33
7	22.03.2021	97 458,27	97,46	509,87	607,33
8	22.04.2021	96 948,40	96,95	510,38	607,33
9	22.05.2021	96 438,02	96,44	510,89	607,33
10	22.06.2021	95 927,13	95,93	511,40	607,33
11	22.07.2021	95 415,72	95,42	511,91	607,33
12	22.08.2021	94 903,81	94,90	512,43	607,33
13	22.09.2021	94 391,38	94,39	512,94	607,33

Pistetyksestä: oikein lasketuista sarakkeista "Jäljellä oleva laina", "Korko" ja "Ly-hennys" kustakin yksi piste.

Huomautus lukijalle: Tehtävänannon monitulkintaisuuden takia useampi eri-lainen taulukko on mielestämme hyväksyttävä.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

11. Kolmiot neliössä (12 p.)

Neliön kärjet ovat pisteissä $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(10, 10)$ ja $(0, 10)$. Neliön sisältä valitaan piste P , joka yhdistetään janoilla jokaiseen neliön kärkeen. Näin muodostuu neljä kolmiota. Merkitään kolmioita ja niiden pinta-aloja kirjaimilla A , B , C ja D .

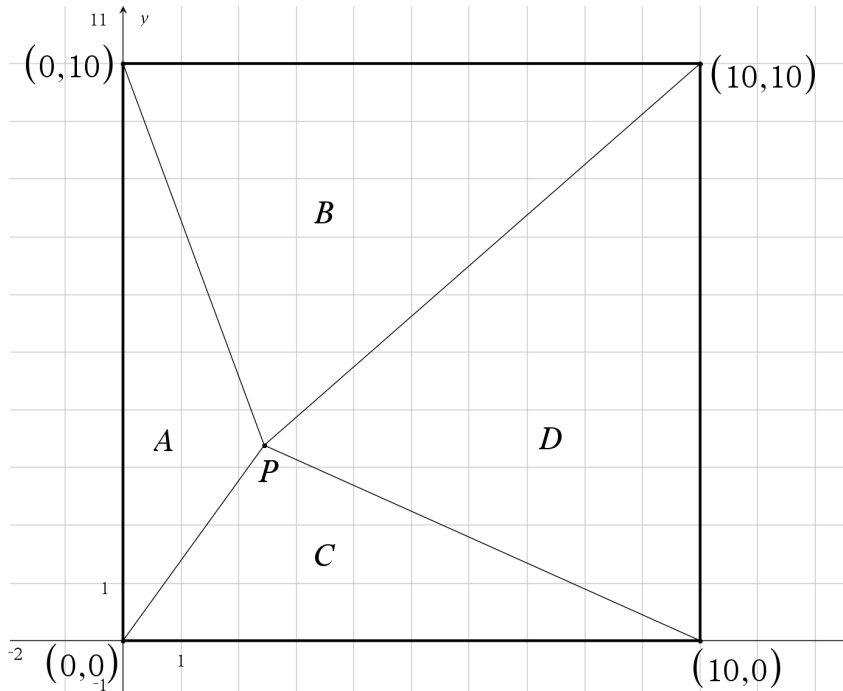
1. Piirrä tilanteesta kuva. (3 p.)
2. Määritä pisteen P koordinaattien tarkat arvot, kun A on kuviossa vasemmalla, B ylhäällä, C alhaalla ja D oikealla ja pinta-alojen suhteille pätee

$$A : B : C : D = 1 : 2 : 3 : 4$$

(9 p.)

Ratkaisu.

- 11.1 Piiretään kuva valitulla ohjelmalla. Pisteen P paikalla ei ole merkitystä, kunhan se on neliön sisällä ja kolmiot erottuvat selkeästi.



Kuvasta kolme pistettä.

11.2

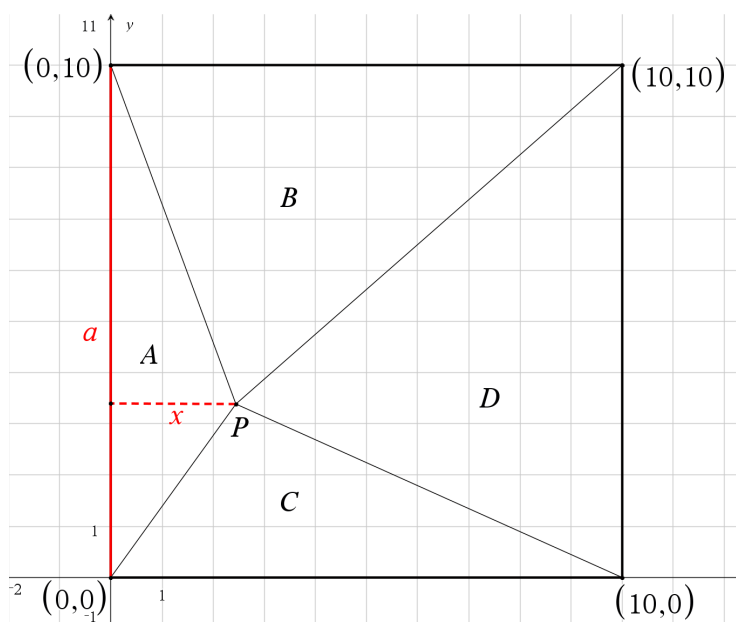
Ratkaisuvaihtoehto 1

Kolmioiden pinta-alojen suhde on $1 : 2 : 3 : 4$. Neliön pinta-ala pitää siis jakaa yhteensä $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ osaan, joista yksi kuuluu kolmioon A , kaksi kolmioon B , kolme kolmioon C ja neljä kolmioon D . 1 p. (yht. 4 p.) Neliön pinta-ala on kanta kertaa korkeus eli

$$A_{\text{neliö}} = 10 \cdot 10 = 100.$$

Yhden osan pinta-ala on siis $\frac{100}{10} = 10$. Eli kolmion A pinta-alan pitää olla $A_A = 10$, kolmion B pinta-alan on oltava $A_B = 20$, kolmion C pinta-alan on oltava $A_C = 30$ ja kolmion D pinta-alan on oltava $A_D = 40$. 1 p. (yht. 5 p.)

Valitaan kolmion A kannaksi pisteiden $(0, 0)$ ja $(0, 10)$ välinen jana a , jonka pituudeksi tiedetään 10 ja merkitään kolmion korkeutta muuttujalla x : 1 p. (yht. 6 p.)



Kolmion A pinta-alan avulla voidaan muodostaa yhtälö, josta saadaan ratkaistua etäisyys x . Tämä etäisyys on samalla pisteen P x -koordinaatti.

$$A_A = \frac{a \cdot x}{2} \quad || \cdot 2 \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

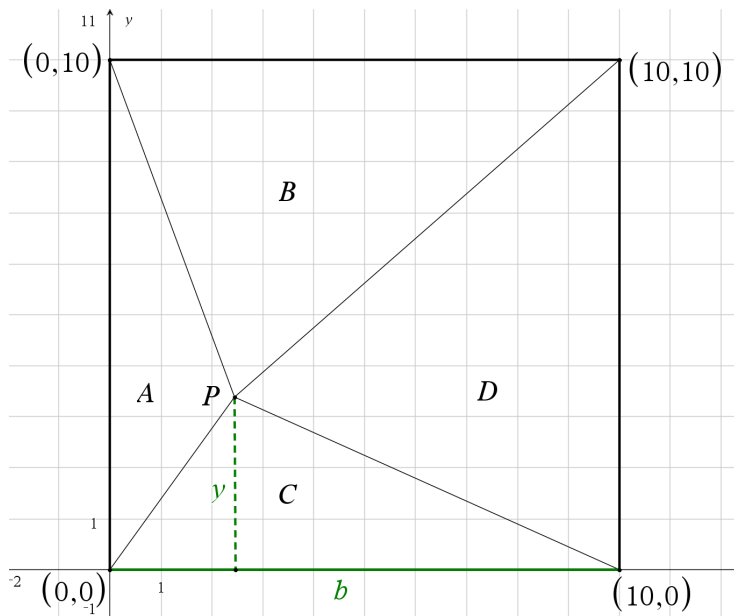
$$2A_A = a \cdot x \quad || : a$$

$$x = \frac{2A_A}{a}$$

$$x = \frac{2 \cdot 10}{10}$$

$$x = 2 \quad \text{1 p. (yht. 8 p.)}$$

Tiedetään, että kolmion C pinta-ala on $A_C = 30$. Valitaan kolmion C kannaksi pisteiden $(0, 0)$ ja $(10, 0)$ välinen jana b , jonka pituudeksi tiedetään 10, ja merkitään kolmion korkeutta muuttujalla y : 1 p. (yht. 9 p.)



Kolmion C pinta-alan avulla voidaan muodostaa yhtälö, josta saadaan ratkais-

tua etäisyys y . Tämä etäisyys on samalla pisteen P y -koordinaatti.

$$A_C = \frac{b \cdot y}{2} \quad || \cdot 2 \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

$$2A_C = b \cdot y \quad || : b$$

$$y = \frac{2A_C}{b}$$

$$y = \frac{2 \cdot 30}{10}$$

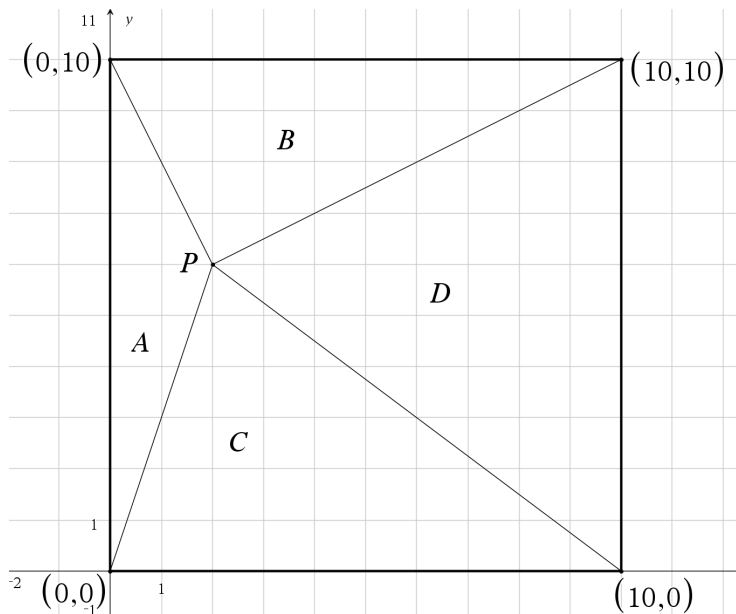
$$y = 6 \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

Pisteen P koordinaatit ovat siis $(2, 6)$. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Pisteen P koordinaatit ovat $(2, 6)$.

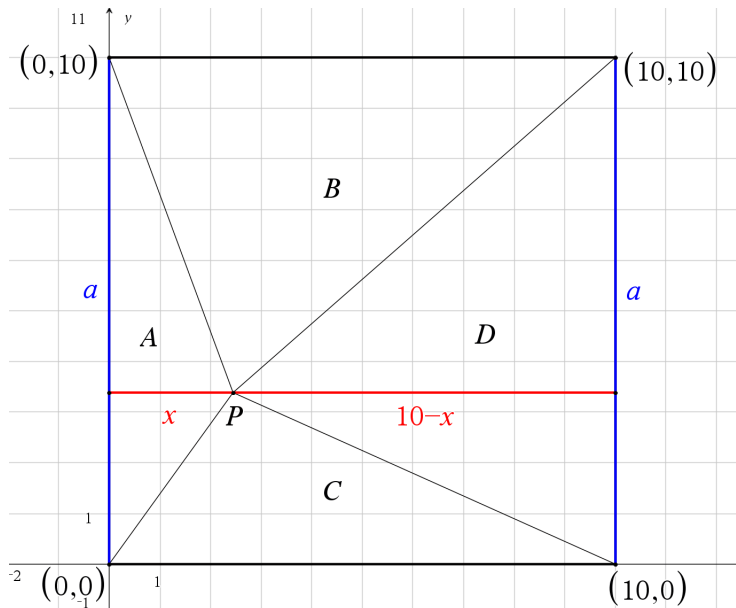
Kuvia ei edellytetä kohdan 11.2. vastauksessa. Ne ovat selventämässä tilannetta.

Kolmioita B ja D voidaan käyttää tuloksen tarkistamiseen. Kuvio näyttää siis tältä (kuvaa ei pyydetty vastauksessa):



Ratkaisuvaihtoehto 2

Merkitään pisteen P x -koordinaattia muuttujalla x . Tällöin x on samalla y -akselin ja pisteen P välinen etäisyys. Toisaalta pisteen P etäisyys pisteiden $(10, 0)$ ja $(10, 10)$ välisestä janasta on $10 - x$. 1 p. (yht. 4 p.)



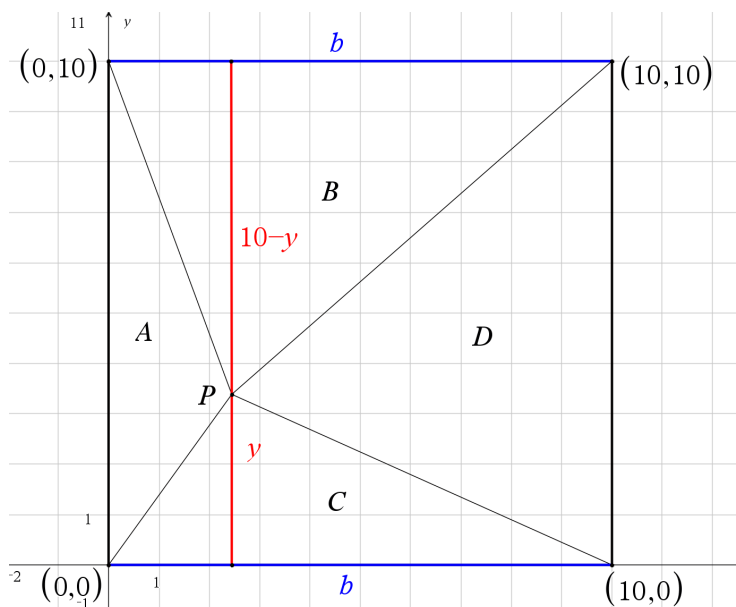
Kolmioilla A ja D on molemmilla pystysuora sivu a , jonka pituus on 10. 1 p. (yht. 5 p.)
Tehtävänannon mukaan kolmion D pinta-ala on neljä kertaa niin suuri kuin kolmion A . Tästä saadaan yhtälö, josta voidaan ratkaista tuntematon x :

$$A_D = 4 \cdot A_A \quad \text{1 p. (yht. 6 p.)}$$

$$\frac{10 \cdot (10 - x)}{2} = 4 \cdot \frac{10 \cdot x}{2} \quad \text{|| laskinohjelmalla}$$

$$x = 2 \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

Pisteen P x -koordinaatti on siis 2. **Vastaavalla tavalla saadaan ratkaistua y -koordinaatti kolmioiden B ja C pinta-alojen avulla:**



Etäisyyksien y ja $10 - y$ merkitsemisestä yksi piste.

Kolmioilla B ja C on molemmilla vaakasuora sivu b , jonka pituus on 10. 1 p. (yht. 9 p.)
Tehtävänannon mukaan kolmioiden B ja C pinta-alojen suhde on $2 : 3$. Tästä saadaan yhtälö, josta voidaan ratkaista tuntematon y :

$$\frac{A_B}{A_C} = \frac{2}{3} \quad || \cdot A_C \quad \text{1 p. (yht. 10 p.)}$$

$$A_B = \frac{2}{3} \cdot A_C$$

$$\frac{10 \cdot (10 - y)}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot y}{2} \quad || \text{laskinohjelmalla}$$

$$y = 6 \quad \text{1 p. (yht. 11 p.)}$$

Pisteen P y -koordinaatti on siis 6. 1 p. (yht. 12 p.)

Vastaus: Pisteen P koordinaatit ovat $(2, 6)$.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

12. Korrelaatiot (12 p.)

12.1. Arvioi yleistiedon perusteella, mikä vaihtoehdoista kuvaa parhaiten seuraavien muuttujien välistä korrelaatiota.

Oikea vastaus 1 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p. (4 p.)

suomalaisten lasten pituus ja paino (1 p.)

- positiivinen korrelaatio
- korrelaatio lähes nolla
- negatiivinen korrelaatio

suomalaisten aikuisten kengännumero ja verenpaine (1 p.)

- positiivinen korrelaatio
- korrelaatio lähes nolla
- negatiivinen korrelaatio

maan bruttokansantuote asukasta kohti ja lapsikuolleisuus (1 p.)

- positiivinen korrelaatio
- korrelaatio lähes nolla
- negatiivinen korrelaatio

tikkatauluun osuneiden tikkojen pysty- ja vaakasuuntaiset koordinaatit (1 p.)

- positiivinen korrelaatio
- korrelaatio lähes nolla
- negatiivinen korrelaatio

12.2. Vastaa seuraaviin korrelaatiota ja syy-yhteyttä koskeviin osatehtäviin. (8 p.)

1. Selitä omin sanoin, mitä tarkoittaa kahden muuttujan välinen korrelaatio. (4 p.)
2. Usein varoitetaan, että tilastollinen korrelaatio ei ole sama kuin muuttujien välinen syy-yhteys. Anna esimerkki todellisesta tilanteesta, jossa kahdella muuttujalla ei ole syy-yhteyttä, mutta ne kuitenkin korreloivat selvästi keskenään. Laskuja ei vaadita esimerkin tueksi, vaan sanallinen perustelu riittää. (4 p.)

Ratkaisu.

12.1 suomalaisten lasten pituus ja paino: **positiivinen korrelaatio** 1 p. (yht. 1 p.)

Lasten kasvaessa sylivauvoista aikuisiksi sekä pituus että paino kasvavat. Esimerkiksi teini-ikäiset ovat tyypillisesti sekä pidempiä että painavampia kuin esi-koululaiset. Yksilöllisistä eroista huolimatta tyypillisesti pidempi ihminen on myös painavampi, joten muuttujien välillä on positiivinen korrelaatio. Tämä ei kuitenkaan tarkoita täydellistä korrelaatiota, eli aina pidempi lapsi ei ole painavampi.

suomalaisten aikuisten kengännumero ja verenpaine: **korrelaatio lähes nolla**1 p. (yht. 2 p.)

Verenpaine riippuu perintötekijöistä ja elintavoista sekä mahdollisesta lääkityksestä. Sillä ei ole yleistiedon perusteella yhteyttä kengännumeroon. Ylipaino johtaa usein kohonneeseen verenpaineeseen, mutta ei vaikuta kengännumeroon.

maan bruttokansantuote asukasta kohti ja lapsikuolleisuus: **negatiivinen korrelaatio** 1 p. (yht. 3 p.)

Maissa, joissa asukaskohtainen bruttokansantuote on korkea, käytetään usein enemmän rahaa lasten terveydenhuoltoon kuin maissa, joissa asukaskohtainen bruttokansantuote on alhainen. Tämän vuoksi korkean bruttokansantuotteen maissa lapsikuolleisuus on tyypillisesti alhaisempi kuin matalan bruttokansantuotteen maissa. Voi olla olemassa joitakin maita, joissa tilanne on päinvastainen, mutta maan asukaskohtaisen bruttokansantuotteen ja lapsikuolleisuuden välinen korrelaatio on edellä mainituin perustein kuitenkin negatiivinen.

tikkatauluun osuneiden tikkojen pysty- ja vaakasuuntaiset koordinaatit: **korrelaatio lähes nolla** 1 p. (yht. 4 p.)

Pysty- ja vaakakoordinaattien positiivinen korrelaatio tarkoittaisi sitä, että heitetyt tikat osuvat nousevan suoran muotoiseen kuvioon. Vastaavasti negatiivinen korrelaatio tarkoittaisi tikkojen osuvan laskevan suoran muotoiseen kuvioon. Ei ole mitään syytä, miksi tikat yleisesti osuisivat jommalla kummalla tavalla. Yksittäisen heittäjän kohdalla tällainen on toki mahdollista, mutta kyse

on yksilön heittotekniikasta eikä yleisestä korrelaatiosta näiden kahden muuttujan välillä. Tikkojen pysty- ja vaakasuuntaisten koordinaattien korrelaatio on siis lähes nolla.

- 12.2 1. Kahden muuttujan välinen korrelaatio tarkoittaa muuttujien välistä lineaarista riippuvuutta. Kun piirretään hajontakuviota, jossa suure A on kunkin pisteen x -koordinaatti ja suure B kunkin pisteen y -koordinaatti, ja sovitetaan hajontakuviota suora, suureiden A ja B välinen korrelaatio on sitä voimakkaampaa, mitä paremmin hajontakuviota pisteet osuvat suoralle. Sovitettua suoraa kutsutaan regressiosuoraksi.

Korrelaatiota kuvataan korrelaatiokerroimella. Korrelaatiokerroin on sitä lähempänä suurinta mahdollista arvoaan eli lukua 1, mitä paremmin hajontakuviota pisteet osuvat nousevalle suoralle. Korrelaatiokerroin on sitä lähempänä pienintä mahdollista arvoaan eli lukua -1 , mitä paremmin pisteet osuvat laskevalle suoralle. Positiivinen korrelaatio tarkoittaa siis, että toisen suureen kasvaessa toinen suure yleensä kasvaa. Jos taas korrelaatio on negatiivinen, niin toisen suureen kasvaessa toinen yleensä pienenee. Korrelaatiokerroimen itseisarvo on sitä suurempi, mitä voimakkaampi suureiden välinen korrelaatio on.

Korrelaatiokerroimen lukuarvo ei kuitenkaan kerro mitään muuttujien perusteella sovitettua suoran kulmakertoimesta. Ainoastaan suoran kulmakertoimen etumerkki on sama kuin korrelaatiokerroimella.

Pistetyksestä: Seuraavista asioista voi saada pisteitä, kuitenkin niin että maksimipistemäärä on 4:

- korrelaatio tarkoittaa muuttujien välistä lineaarista riippuvuutta 1 p.
 - korrelaatio on sitä voimakkaampaa, mitä paremmin hajontakuviota pisteet osuvat suoralle 1 p.
 - selitetty, milloin korrelaatiokerroin on positiivinen 1 p.
 - selitetty, milloin korrelaatiokerroin on negatiivinen 1 p.
 - selitetty, milloin korrelaatiokerroin on lähellä nollaa 1 p.
 - korrelaatiokerroimen suurin arvo 1 ja pienin arvo -1 : 1 p.
2. Kaksi sellaista muuttujaa, joiden välillä on korrelaatio, mutta ei syy-seuraussuhdetta ovat jäätelönsyönti ja aurinkolasien myyntimäärä. Molemmat ovat

suurimmillaan kesällä ja pienemmillään talvella. Syynä on se, että aurinkoinen sää lisää sekä jäätelön syöntiä että aurinkolasien ostamista. Aurinkolasien ostaminen sinänsä ei saa ihmisiä haluamaan jäätelöä eikä jäätelön ostaminen sinänsä häikäise ihmisiä ja saa heitä ostamaan aurinkolaseja.

Esimerkistä yksi piste, perusteluista kolme pistettä.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

13. Polynomien merkkikaavio (12 p.)

Tutkitaan kolmannen asteen polynomifunktiota $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Funktion derivaatan merkkikaavio on seuraavanlainen:

		-1	2		
$p'(x)$	+	-	+		

Lisäksi tiedetään, että funktion $p(x)$ kuvaaja kulkee origon ja pisteiden $(-1, 7)$ ja $(2, -20)$ kautta.

1. Millä muuttujan x arvoilla $p'(x) = 0$? (2 p.)
2. Määritä funktio $p(x)$. (6 p.)
3. Määritä $p'(x)$. (4 p.)

Ratkaisu.

13.1. Derivaatan merkkikaavion mukaan derivaatan nollakohdat ovat $x = -1$ ja $x = 2$, 1 p. (yht. 1 p.) joten yhtälön $p'(x) = 0$ ratkaisu on $x = -1$ tai $x = 2$.
1 p. (yht. 2 p.)

Vastaus: $p'(x) = 0$ kun $x = -1$ tai $x = 2$.

13.2. Tehtävänannon mukaan polynomien $p(x)$ kuvaaja kulkee origon kautta. On siis

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = y \quad \parallel \text{ sij. } x = 0, y = 0$$

$$a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$$

$$d = 0 \quad \text{span style="border: 1px solid black; border-radius: 5px; padding: 2px;">1 p. (yht. 3 p.)}$$

Kahdesta muusta pisteestä, joiden kautta kuvaaja kulkee, saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) = 7 \\ a \cdot (2)^3 + b \cdot (2)^2 + c \cdot (2) = -20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a + b - c = 7 \\ 8a + 4b + 2c = -20 \end{cases}$$

Kolmen tuntemattoman ratkaiseminen kahdesta yhtälöstä ei onnistu, tarvitaan kolmas yhtälö. Tämä saadaan polynomifunktion derivaatasta. Derivaat-
tafunktio on

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \text{1 p. (yht. 4 p.)}$$

Kohdan 13.1 perusteella tiedetään, että derivaatalla on nollakohdat $x = -1$ ja $x = 2$. Käyttämällä jälkimmäistä nollakohtaa saadaan yhtälö

$$p'(2) = 0$$

$$3ax^2 + 2bx + c = 0 \quad \text{|| kun } x = 2$$

$$3a \cdot (2)^2 + 2b \cdot 2 + c = 0$$

$$12a + 4b + c = 0$$

Lisätään tämä kolmas yhtälö yhtälöryhmään. Ratkaistava yhtälöryhmä on siis:

$$\begin{cases} -a + b - c = 7 \\ 8a + 4b + 2c = -20 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \quad \text{1 p. (yht. 5 p.)}$$

Laskinohjelmalla ratkaisuksi saadaan

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = -12 \end{cases} \quad \text{1 p. (yht. 7 p.)}$$

Edellä saatiin selville, että $d = 0$. Kysytty polynomifunktio on siis $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$. 1 p. (yht. 8 p.)

Vastaus: Polynomifunktio on $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.

Ratkaisussa oltaisiin voitu aivan hyvin käyttää derivaatan toista nollakohtaa, jolloin yhtälöryhmän kolmas yhtälö olisi ollut $3a - 2b + c = 0$. Ratkaisu on luonnollisesti sama kuin yllä.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Kohdassa 13.2 laskettiin polynomifunktion derivaatan lausekkeeksi $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Sijoitetaan tähän edellä lasketut arvot vakioille a , b ja c , jolloin saadaan

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad ||\text{sij. } a = 2, b = -3, c = -12$$

$$p'(x) = 3 \cdot 2 \cdot x^2 + 2 \cdot (-3) \cdot x - 12 \quad (1+1+1 \text{ p. (yht. 11 p.)})$$

$$p'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \quad (1 \text{ p. (yht. 12 p.)})$$

Vastaus: Derivaattafunktio on $p'(x) = 6x^2 - 6x - 12$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Kohdassa 13.2. ratkaistiin polynomifunktion lauseke. Derivoidaan se:

$$p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$$

$$p'(x) = 2 \cdot 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 2 \cdot x - 12 \quad (1+1+1 \text{ p. (yht. 11 p.)})$$

$$p'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \quad (1 \text{ p. (yht. 12 p.)})$$

Vastaus: Derivaattafunktio on $p'(x) = 6x^2 - 6x - 12$.

Voidaan vielä tarkistaa, että tämän derivaatan nollakohdat ovat todella tehtävänannossa annetut $x = -1$ ja $x = 2$:

$$\begin{aligned} 6 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) - 12 &= 6 + 6 - 12 \\ &= 0 \quad \text{ok!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \cdot (2)^2 - 6 \cdot (2) - 12 &= 6 \cdot 4 - 12 - 12 \\ &= 24 - 24 \\ &= 0 \quad \text{ok!} \end{aligned}$$

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.