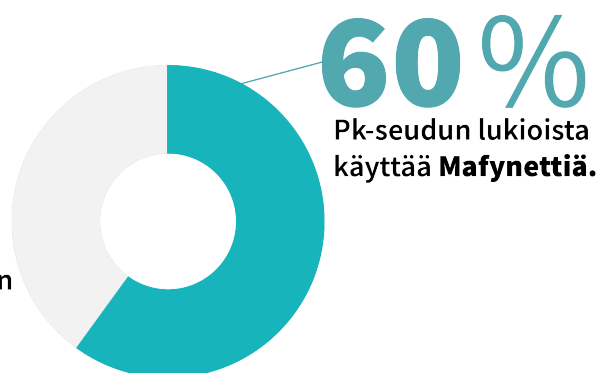
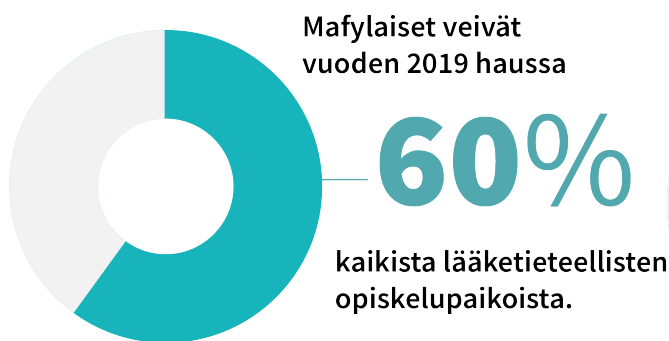




YO-MALLIVASTAUKSET
PITKÄ MATEMATIIKKA
SYKSY 2019

Tiesitkö tämän?



60 % PK-seudun lukioista käyttää Mafynettiä!
Mafynetti-oppimateriaaleja saa nyt myös
lukion 1. vuoden kursseille

MAFYNETTI

MALLIVASTAUSTEN TEKIJÄT:

Malliratkaisujen laatimisesta ovat vastanneet MAFY:n toinen perustaja Antti Suominen sekä MAFY:n oppimateriaalitiimi, jonka päätehtävä on laatia ja kehittää MAFY:n lukioon tarkoitettuja oppimateriaaleja.

Oppimateriaalitiimistä mukana laatimisessa olivat Sampsa Kurvinen ja Sakke Suomalainen. Lisäksi työn tukena olivat Tuomas Hauvala, Viljami Suominen ja Matti Virolainen.

MAFY-VALMENNUS on Helsingissä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys.

PALVELUITAMME OVAT:

- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali
- Lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- Yo-kokeisiin valmentavat kurssit.

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

KÄYTTÖEHDOT

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafyvalmennus.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion matematiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukiokursseillasi. **Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.**

MAFY-VALMENNUKSEN YHTEYSTIEDOT:

<https://mafyvalmennus.fi/yhteydenotto>

Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	4
Ratkaisu tehtävään 3	6
Ratkaisu tehtävään 4	8
Ratkaisu tehtävään 5	13
Ratkaisu tehtävään 6	14
Ratkaisu tehtävään 7	18
Ratkaisu tehtävään 8	21
Ratkaisu tehtävään 9	24
Ratkaisu tehtävään 10	28
Ratkaisu tehtävään 11	30
Ratkaisu tehtävään 12	33
Ratkaisu tehtävään 13	36

1. Kolmio (12 p.)

Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 350 ja 1 200. Kirjoita kohdissa 1.1.-1.3. pelkät vastausten lukuarvot annettuihin vastauskenttiin. Älä perustele tämän tehtävän vastauksia. Tässä tehtävässä ei voi käyttää kaavaeditoria. Kunkin vastauksen maksimipituus on 10 merkkiä.

1.1. Kolmion pinta-ala on _____. (4 p.)

1.2. Kolmion hypotenuusan pituus on _____. (4 p.)

1.3. Kolmion hypotenuusaa vasten piirretyn korkeusjanan pituus on _____. (4 p.)

Ratkaisu.

Tässä tehtävässä annettiin pelkkä lopullinen vastaus ilman perusteluja. Olemme näyttäneet värillisellä tekstillä, miten tehtävät voidaan ratkaista.

- 1.1. Kolmion pinta-ala on kanta kertaa korkeus jaettuna kahdella. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, joten kun toinen niistä on kolmion kanta, toinen on korkeus. Kolmion pinta-ala on siis

$$A = \frac{350 \cdot 1200}{2} = 210\,000.$$

Vastaus: 210 000. _____ 4p

- 1.2. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituuksille a ja b , ja hypotenuusan pituudelle c pätee Pythagoraan lause

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

josta voidaan ratkaista hypotenuusan pituus:

$$c = (\pm) \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{350^2 + 1200^2}$$

$$c = 1250.$$

Vastaus: 1250. _____ 4p

- 1.3. Kolmion pinta-ala on kanta kertaa korkeus jaettuna kahdella. Jos kanta on hypotenuusa, korkeus on hypotenuusaa vasten piirretty korkeusjana. Tästä voidaan ratkaista tämän korkeusjanan pituus h :

$$A = \frac{ch}{2} \quad || \cdot 2$$

$$2A = ch \quad || : c$$

$$h = \frac{2A}{c}$$

$$h = \frac{2 \cdot 210\,000}{1250}$$

$$h = 336.$$

Vastaus: 336. _____

4p

2. Derivaatta ja integraali (12 p.)

Määritä seuraavien funktioiden derivaattafunktiot tai integraalifunktiot ja kirjoita pelkät vastaukset annettuihin vastauskenttiin. Älä perustele tämän tehtävän vastauksia.

2.1. Kun $f(x) = 4x + 3$, niin $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$. (3 p.)

2.2. Kun $f(x) = x^3 + x^2$, niin $\int f(x) \, dx = \underline{\hspace{2cm}} + C$. (3 p.)

2.3. Kun $f(x) = (2x - 1)^7$, niin $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$. (3 p.)

2.4. Kun $f(x) = 12 \sin(3x)$, niin $\int f(x) \, dx = \underline{\hspace{2cm}} + C$. (3 p.)

Ratkaisu.

Tässä tehtävässä annettiin pelkkä lopullinen vastaus ilman perusteluja. Olemme näyttäneet värillisellä tekstillä, miten tehtävät voidaan ratkaista.

2.1. $D(4x + 3) = 4$

Vastaus: 4 3p

2.2. $\int (x^3 + x^2) \, dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$

Vastaus: $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$ 3p

Tehtävänannossa oli annettu integrointivakio C valmiiksi, joten vastauslaatikoon ei ollut tarkoitus kirjoittaa sitä. Jos kirjoitit vastaukseen integrointivakion, ei ole syytä huoleen: integrointivakion arvo on mielivaltainen ja siten kahden integrointivakion summa on myös mielivaltainen, joten integrointivakion kirjoittamisesta vastaukseen tuskin menettää pisteitä.

2.3. Sovelletaan yhdistetyn funktion derivointikaavaa $Dg(f(x)) = g'(f(x))f'(x)$.

$$\begin{aligned} D(2x - 1)^7 &= 7 \cdot (2x - 1)^6 \cdot D(2x - 1) \\ &= 7 \cdot (2x - 1)^6 \cdot 2 \\ &= 14 \cdot (2x - 1)^6 \end{aligned}$$

Vastaus: $14 \cdot (2x - 1)^6$ 3p

2.4.

$$\begin{aligned}\int 12 \sin(3x) \, dx &= 12 \int \sin(3x) \, dx \\ &= 12 \cdot \frac{1}{3} \int 3 \sin(3x) \\ &= 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-\cos(3x)) + C \\ &= -4 \cos(3x) + C\end{aligned}$$

Vastaus: $-4 \cos(3x)$

3p

3. Pistetulo (12 p.)

Määritä kaikki tason vektorit $\vec{u}$, jotka toteuttavat ehdot

$$\left(\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}\right) \cdot \vec{u} = 3 \quad \text{ja} \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = 25.$$

Ratkaisu.

Tason vektori $\vec{u}$ voidaan ilmaista muodossa

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}, \quad \text{1p}$$

missä a ja b ovat jotain lukuja. Tutkitaan, mitä tehtävänannon ehdoista seuraa.

Ehto 1:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}\right) \cdot \vec{u} &= 3 \\ \left(\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}\right) \cdot (a\vec{i} + b\vec{j}) &= 3 \\ \frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b &= 3 \quad \parallel \cdot 5 \\ 3a + 4b &= 15 \quad \text{1p(2p)} \\ 3a &= 15 - 4b \quad \parallel : 3 \\ a &= 5 - \frac{4}{3}b \quad (1) \quad \text{1p(3p)} \end{aligned}$$

Ehto 2:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{u} &= 25 \\ (a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot (a\vec{i} + b\vec{j}) &= 25 \\ a^2 + b^2 &= 25 \quad \text{1p(4p)} \end{aligned}$$

Sijoitetaan (1).

$$\left(5 - \frac{4}{3}b\right)^2 + b^2 = 25 \quad \text{1p(5p)}$$

$$5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{4}{3}b + \left(\frac{4}{3}b\right)^2 + b^2 = 25 \quad \text{1p(6p)}$$

$$25 - \frac{40}{3}b + \frac{16}{9}b^2 + b^2 = 25$$

$$\frac{25}{9}b^2 - \frac{40}{3}b = 0 \quad \text{1p(7p)}$$

$$\left(\frac{25}{9}b - \frac{40}{3}\right)b = 0.$$

Tulon nollasäännöllä saadaan $b = 0$ 1p(8p)
tai

$$\frac{25}{9}b - \frac{40}{3} = 0$$

$$\frac{25}{9}b = \frac{40}{3} \quad \parallel \cdot \frac{9}{25}$$

$$b = \frac{40 \cdot 9}{3 \cdot 25}$$

$$b = \frac{24}{5}. \quad \text{1p(9p)}$$

Lasketaan saatuja b :n arvoja vastaavat a :n arvot yhtälöstä (1).

$$b = 0 : \quad a = 5 - \frac{4}{3} \cdot 0 = 5 \quad \text{1p (10p)}$$

$$b = \frac{24}{5} : \quad a = 5 - \frac{4}{3} \cdot \frac{24}{5} = -\frac{7}{5}. \quad \text{1p (11p)}$$

Vastaus: Ehdot toteuttavat tason vektorit ovat $5\vec{i}$ ja $-\frac{7}{5}\vec{i} + \frac{24}{5}\vec{j}$. 1p (12p)

4. Eksponentti- ja trigonometriset funktiot (12 p.)

Määritellään $f(x) = e^{\sin x}$, kun $x \in \mathbb{R}$.

4.1. Määritä funktion $f(x)$ suurin ja pienin arvo. (6 p.)

4.2. Osoita, että

$$f(x) \geq e^{1-\cos x}$$

kaikilla $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. (6 p.)

Ratkaisu.

4.1 Tutkitaan funktiota $f(x) = e^{\sin x}$.

Eksponenttifunktio e^x on aidosti kasvava. _____ 1p

Siten $e^{\sin x}$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa silloin, kun eksponentissa oleva lauseke $\sin x$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa.

Sinifunktion suurin arvo on 1 ja pienin arvo -1 . _____ 2p(3p)

Siten funktion f suurin arvo on $e^1 = e$ ja pienin arvo on $e^{-1} = \frac{1}{e}$. _____ 2p(5p)

Vastaus: Funktion f suurin arvo on e ja pienin arvo $\frac{1}{e}$. _____ 1p(6p)

4.2 Väite: $e^{\sin x} \geq e^{1-\cos x}$, kun $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Todistus. Eksponenttifunktio e^x on aidosti kasvava, _____ 1p
joten väite on tosi, kun

$$\sin x \geq 1 - \cos x \quad \text{_____} \quad 1p(2p)$$

$$\iff \sin x + \cos x \geq 1. \quad \text{_____} \quad (1) \quad 1p(3p)$$

Osoitetaan epäyhtälö (1) todeksi, kun $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

LOPPUOSA RATKAISUSTA, VAIHTOEHTO 1

Tarkasteltavalla välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$ pätee

$$0 \leq \sin x \leq 1$$

$$0 \leq \cos x \leq 1,$$

joten pätee myös

$$\begin{aligned}\sin x &\geq \sin^2 x \\ \cos x &\geq \cos^2 x.\end{aligned}$$

2p(5p)

Tästä saadaan

$$\sin x + \cos x \geq \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

eli väite on tosi. ☐

1p(6p)

LOPPUOSA RATKAISUSTA, VAIHTOEHTO 2

Tunnetusti kaikilla x pätee

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Huomataan, että

$$\begin{aligned}(\sin x + \cos x)^2 &= \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \\ &= 1 + 2 \sin x \cos x\end{aligned}$$

(2)

1p(4p)

Lauseke (2) on positiivinen, koska tunnetusti $\sin x \geq 0$ ja $\cos x \geq 0$, kun $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Edelleen $2 \sin x \cos x \geq 0$.

1p(5p)

Siten

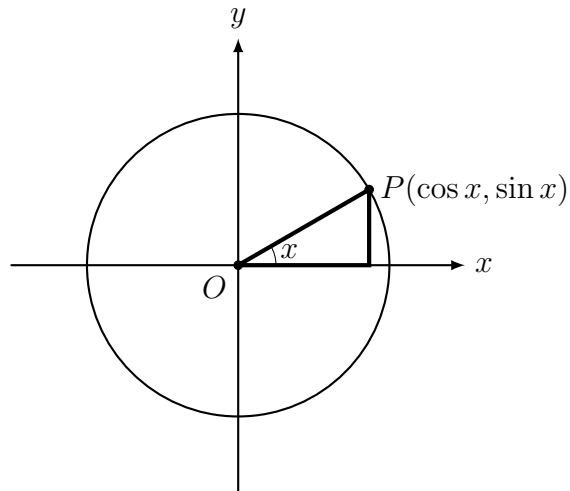
$$\begin{aligned}\sin x + \cos x &= \sqrt{1 + 2 \sin x \cos x} \\ &\geq \sqrt{1 + 0} \\ &= 1\end{aligned}$$

Nyt on osoitettu (1) todeksi, joten myös alkuperäinen väite on tosi. ☐

1p(6p)

LOPPUOSA RATKAISUSTA, VAIHTOEHTO 3

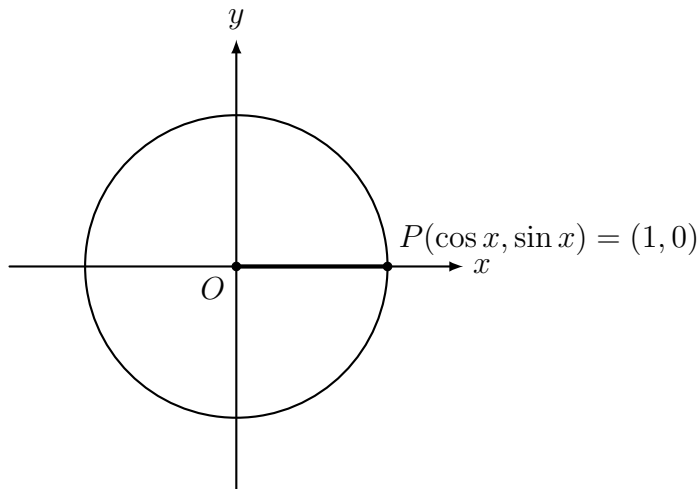
Kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tilanne näyttää yksikköympyrässä tältä:



Kateetteja pitkin matka pisteestä O pisteeseen P on $\cos x + \sin x$. Lyhin reitti pisteestä O pisteeseen P on hypotenuusa OP , jonka pituus on 1. Näin ollen

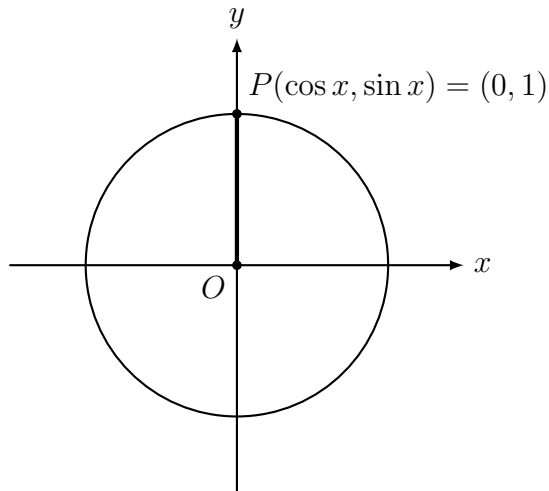
$$\sin x + \cos x > 1. \quad \text{2p(5p)}$$

Kun $x = 0$, tilanne näyttää yksikköympyrässä tältä:



Nyt $\sin x + \cos x = 0 + 1 = 1$.

Kun $x = \frac{\pi}{2}$, tilanne näyttää yksikköympyrässä tältä:



Nyt $\sin x + \cos x = 1 + 0 = 1$.

Yhdistämällä käsitellyt tilanteet todetaan, että $\sin x + \cos x \geq 1$, kun $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Nyt on osoitettu (1) todeksi, joten myös alkuperäinen väite on tosi. ☐ 1p(6p)

LOPPUOSA RATKAISUSTA, VAIHTOEHTO 4

Merkitään

$$g(x) = \sin x + \cos x, \quad \text{jolloin}$$

$$g'(x) = \cos x - \sin x.$$

Etsitään derivaatan nollakohdat.

$$g'(x) = 0$$

$$\cos x - \sin x = 0 \quad \text{1p(4p)}$$

Jos $\cos x = 0$, niin $\sin x \neq 0$, joten yhtälön ratkaisuille täytyy päteä $\cos x \neq 0$.

Voidaan siis jakaa $\cos x$:llä.

$$\sin x = \cos x \quad || : \cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$$\tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \quad \text{1p(5p)}$$

Suljetulla välillä derivoituvan funktion suurin ja pienin arvo saadaan välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa. Ainoa nollakohta välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$ on $x = \frac{\pi}{4}$. Funktion g arvot nollakohdassa ja välin $[0, \frac{\pi}{2}]$ päätepisteissä ovat

$$\begin{aligned}g(0) &= \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1 \\g\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > 1 \\g\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1.\end{aligned}$$

Funktion g pienin arvo välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$ on siis 1, joten $\sin x + \cos x \geq 1$, kun $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Nyt on osoitettu (1) todeksi, joten myös alkuperäinen väite on tosi. ☐

1p(6p)

5. Polynomiepäyhtälö (12 p.)

Ratkaise epäyhtälö $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 \geq 0$. Voit käyttää esimerkiksi laskinohjelmistoa. Selitä sanallisesti (enintään 1 000 merkillä), miten polynomifunktion tulomuotoa $p(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ voidaan käyttää epäyhtälön $p(x) \geq 0$ ratkaisemiseen, kun $a < b < c$.

Ratkaisu.

Laskinohjelmiston avulla saadaan, että epäyhtälön

$$x^3 - 2x^2 - 11x + 12 \geq 0$$

ratkaisut ovat $-3 \leq x \leq 1$

3p

tai $x \geq 4$.

3p(6p)

Polynomin tulomuodosta

$$p(x) = (x - a)(x - b)(x - c),$$

missä $a < b < c$, nähdään tulon nollasäännön avulla, että polynomin nollakohdat ovat $x = a$, $x = b$ ja $x = c$. Polynomi voi vaihtaa etumerkkiä vain nollakohtissa, joten selvittämällä polynomin merkit nollakohtien välissä ja välin $[a, c]$ ulkopuolella saadaan selville polynomin etumerkki kaikkialla.

2p

(8p)

Polynomin etumerkki määräytyy tulon tekijöiden etumerkkien perusteella siten, että jos tulon tekijöistä pariton määrä on negatiivisia, myös tulo on negatiivinen, ja jos tulon tekijöistä parillinen määrä on negatiivisia, tulo on positiivinen.

1p(9p)

Voidaan siis taulukoida tulon tekijöiden etumerkit nollakohtien välissä ja välin $[a, c]$ ulkopuolella

1p

(10p)

ja laskea kussakin alueessa, onko negatiivisten tulon tekijöiden määrä parillinen vai pariton, jolloin saadaan helposti selville polynomin etumerkki.

1p

(11p)

Nyt kun on saatu selville polynomin merkkikaavio, siitä voidaan lukea, millä väleillä epäyhtälö toteutuu. Nämä välit muodostavat siis epäyhtälön ratkaisun.

1p

(12p)

6. Kaksi paraabelia (12 p.)

Anna esimerkki kahdesta paraabelista, joilla on täsmälleen yksi sivuamispiste; sivuamispiste ei saa olla kummankaan paraabelin huippupiste. Anna paraabelit muodossa $y = ax^2 + bx + c$.

Ratkaisu.

Tässä tehtävässä on lukemattomia erilaisia hyväksyttäviä pareja esimerkkiparaabeleja. Olemme esittäneet kolme eri lähestymistapaa, miten sopivat esimerkkiparaabelit voi muun muassa löytää.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Tässä ratkaisuvaihtoehdossa keksitään ensin nokkelasti lähes sopivat paraabelit, ja selvitetään vain yhden tuntemattoman vakion arvo.

Ylöspäin aukeavalla ja alaspäin aukeavalla paraabelilla on täsmälleen yksi sivuamispiste silloin, kun niillä on täsmälleen yksi yhteinen piste. _____ 2p

Paraabeli $y = x^2$ on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on origossa. Vastaa- vasti paraabeli

$$y = -(x - 1)^2 + a = -x^2 + 2x - 1 + a$$

on alaspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on kohdassa $x = 1$. _____ 2p(4p)

Etsitään sellainen vakion a arvo, että paraabeleilla $y = x^2$ ja $y = -x^2 + 2x - 1 + a$ on täsmälleen yksi yhteinen piste. Paraabelien leikkauskohdat saadaan yhtälöstä

$$\begin{aligned} x^2 &= -x^2 + 2x - 1 + a \\ 2x^2 - 2x + 1 - a &= 0. \end{aligned}$$

2p(6p)

Toisen asteen yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu silloin, kun diskriminantti on nol- la. Diskriminantti lausekkeelle $ax^2 + bx + c$ on $D = b^2 - 4ac$.

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (1 - a) &= 0 \end{aligned}$$

$$a = \frac{1}{2}.$$

2p(8p)

Sopivat paraabelit voisivat siis olla $y = x^2$ ja $y = -x^2 + 2x - 1 + \frac{1}{2} = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$. Ratkaistaan vielä sivuamispisteen x -koordinaatti tarkistaaksemme, ettei sivuamispiste ole kummankaan paraabelin huippupiste.

$$x^2 = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ (laskinohjelmalla)}$$

2p
(10p)

Paraabelien huiput ovat kohdissa $x = 0$ ja $x = 1$, joten sivuamispiste ei ole kummankaan paraabelin huippukohdassa, joten paraabelit täyttävät tehtävän ehdot.

Vastaus: Kysytyt paraabelit ovat esimerkiksi $y = x^2$ ja $y = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$.

2p
(12p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Tässä ratkaisuvaihtoehdossa käytetään apuna yksinkertaista suoraa, jota paraabelit myös sivuavat niiden sivuamispisteissä. Tämän avulla säästetään vaivaa sen osoittamisesta, että sivuamispiste ei ole kummankaan paraabelin huippupiste.

Ylöspäin aukeava ja alaspäin aukeava paraabeli sivuavat toisiaan, kun niillä on täsmälleen yksi yhteinen piste.

2p

Etsitään tällaiset paraabelit, jotka sivuavat toisiaan ja suoraa $y = x$ origossa.

1p(3p)

Paraabelien tangentit ovat vaakasuoria huippukohdissa, joten jos paraabelit sivuavat keskinäisessä sivuamispisteessään myös suoraa $y = x$, sivuamispiste ei voi olla kummankaan paraabelin huippupiste.

2p(5p)

Muotoa

$$y = f(x) = ax^2 + bx$$

olevat paraabelit kulkevat origon kautta, sillä

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 = 0.$$

3p(8p)

Ne sivuavat suoraa $y = x$ origossa, jos niiden derivaatat origossa ovat samat kuin suoran kulmakerroin, eli 1.

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(0) = 2a \cdot 0 + b = 1$$

$$b = 1.$$

2p
(10p)

Esimerkkiparaabeleiksi käyvät siis mitkä tahansa kaksi muotoa

$$y = ax^2 + x$$

olevaa paraabelia, joissa toisessa $a > 0$ ja toisessa $a < 0$. Valitaan esimerkiksi paraabelit

$$y = x^2 + x \quad \text{ja} \quad y = -2x^2 + x.$$

Vastaus: Kysytyt paraabelit ovat esimerkiksi $y = x^2 + x$ ja $y = -2x^2 + x$.

2p
(12p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 3

Ylöspäin aukeava ja alaspäin aukeava paraabeli sivuavat toisiaan, kun niillä on täsmälleen yksi yhteinen piste.

2p

Tarkastellaan paraabeleita, joiden yhtälöt ovat

$$y = a_1x^2 + b_1x + c_1,$$

$$y = a_2x^2 + b_2x + c_2.$$

Selvitetään kohdat, joissa paraabelit leikkaavat. Leikkauspisteessä y -koordinaatit ovat yhtäsuuret, joten

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

$$(a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + c_1 - c_2 = 0. \quad (1)$$

2p(4p)

Paraabeleilla on täsmälleen yksi yhteinen piste, kun yhtälöllä (1) on täsmälleen yksi ratkaisu. Toisen asteen yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu, kun diskriminantti on nolla. **Diskriminantti lausekkeelle $ax^2 + bx + c$ on $D = b^2 - 4ac$.**

Täytyy siis olla

$$D = 0$$

$$(b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2) = 0. \quad (2)$$

2p(6p)

Etsitään yhdet paraabelit, jotka toteuttavat yhtälön (2) ja joista toinen on ylöspäin ja toinen alaspäin aukeava. Valitaan

$$a_1 = 1$$

$$b_1 = 0$$

$$c_1 = 0$$

$$a_2 = -1$$

$$c_2 = -1$$

Yhtälö (2) tulee nyt muotoon

$$(0 - b_2)^2 - 4[1 - (-1)][0 - (-1)] = 0$$

$$b_2^2 - 8 = 0$$

$$b_2^2 = 8$$

$$b_2 = \pm\sqrt{8}. \quad \text{2p(8p)}$$

Paraabelit voisivat olla siis esimerkiksi $y = x^2$ ja $y = -x^2 + \sqrt{8}x - 1$. Tarkistetaan vielä, että niiden sivuamispiste ei ole kummankaan paraabelin huippupiste. Paraabelin $y = x^2$ huippupiste on origossa. Paraabelin $y = -x^2 + \sqrt{8}x - 1$ huippukohta on sen derivaatan nollakohdassa. Derivaatta:

$$D(-x^2 + \sqrt{8}x - 1) = -2x + \sqrt{8}$$

Derivaatan nollakohta:

$$-2x + \sqrt{8} = 0$$

$$x = \sqrt{2}.$$

Ratkaistaan paraabelien sivuamispiste:

$$x^2 = -x^2 + \sqrt{8}x - 1$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (\text{laskinohjelmalla})$$

Sivuamispiste on eri kuin kummankaan paraabelin huippupiste, joten esimerkkiparaabelit täyttävät tehtävän ehdot. _____

Vastaus: Kysytyt paraabelit ovat esimerkiksi $y = x^2$ ja $y = -x^2 + \sqrt{8}x - 1$. _____

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä ratkaisussa.

7. Satunnaispolynomit (12 p.)

Toisen asteen polynomissa $x^2 - nx + n$ esiintyvä luku n arvotaan heittämällä tavallista 6-sivuista noppaa ja polynomissa $x^2 - mx + m$ esiintyvä luku m arvotaan heittämällä 8-sivuista noppaa, jonka silmäluvut ovat $1, 2, \dots, 8$. Kuinka suurella todennäköisyydellä ainakin toisella polynomilla on kaksinkertainen nollakohta?

Ratkaisu.

Selvitetään ensin, millä noppien silmäluvuilla polynomifunktiolla on kaksinkertainen nollakohta.

Merkitään

$$N(x) = x^2 - nx + n$$

$$M(x) = x^2 - mx + m.$$

Luku n arvotaan kuusisivuisella nopalla, joten $n \in \{1, 2, \dots, 6\}$ ja luku m arvotaan kahdeksansivuisella nopalla, joten $m \in \{1, 2, \dots, 8\}$.

Toisen asteen polynomilla on kaksinkertainen nollakohta täsmälleen silloin, kun sen diskriminantti on nolla.

1p

Ratkaistaan, millä n polynomien $N(x)$ diskriminantti on nolla.

$$D = 0$$

$$(-n)^2 - 4 \cdot 1 \cdot n = 0$$

$$n^2 - 4n = 0$$

$$n(n - 4) = 0$$

2p(3p)

1p(4p)

Tulon nollasäännöllä saadaan, että diskriminantti on nolla, kun $n = 0$ (ei mahdollinen) tai $n = 4$. Polynomifunktio $M(x)$ on samaa muotoa kuin $N(x)$, joten $M(x)$:n tapauksessa diskriminantti on vastaavasti nolla, kun $m = 4$.

2p(6p)

Molempien polynomifunktioiden tapauksessa funktiolla on siis kaksinkertainen nollakohta vain yhdellä nopan silmäluvuista.

Selvitetään sitten kysytty todennäköisyys.

VAIHTOEHTO 1

Merkitään N = "Polynomifunktiolla N on kaksinkertainen nollakohta" ja M = "Polynomifunktiolla M on kaksinkertainen nollakohta". Tapahtumat N ja M ovat riippumattomat, mutta eivät toisensa poissulkevat.

Riippumattomuus tarkoittaa sitä, että nopan heitot eivät vaikuta toistensa todennäköisyyksiin. Riippumattomuudesta seuraa, että $P(N \text{ ja } M) = P(N) \cdot P(M)$. Se, että tapahtumat eivät ole toisensa poissulkevat, tarkoittaa sitä, että ne voivat tapahtua molemmat myös samaan aikaan. Toisensa poissulkeville tapahtumille N ja M pätee, että $P(N \text{ tai } M) = P(N) + P(M)$, mutta koska tapahtumat eivät ole toisensa poissulkevat, kaava on $P(N \text{ tai } M) = P(N) + P(M) - P(N \text{ ja } M)$.

Merkitään A = "Ainakin toisella polynomeista on kaksinkertainen nollakohta". Tällöin

$$\begin{aligned} P(A) &= P(N \text{ tai } M) \\ &= P(N) + P(M) - P(N \text{ ja } M) \\ &= P(N) + P(M) - P(N) \cdot P(M). \end{aligned}$$

2p(8p)

Oletetaan, että kuusisivuisessa nopassa kunkin silmäluvun todennäköisyys on sama $1/6$ ja kahdeksansivuisessa nopassa kunkin silmäluvun todennäköisyys on sama $1/8$, jolloin

$$\begin{aligned} P(N) &= P(6\text{-sivuisella nopalla luku 4}) = \frac{1}{6} \\ P(M) &= P(8\text{-sivuisella nopalla luku 4}) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

1p(9p)

1p
(10p)

Saadaan siis

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{13}{48} \\ &\approx 27\%. \end{aligned}$$

Vastaus: Todennäköisyys, että ainakin toisella polynomeista on kaksinkertainen nollakohta, on $13/48 \approx 27\%$.

2p
(12p)

VAIHTOEHTO 2

Merkitään A = "Ainakin toisella polynomeista on kaksinkertainen nollakohta". Sen vastatapahtuma on $\bar{A}$ = "Kummallakaan polynomilla ei ole kaksinkertaista nollakohtaa", eli

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}). \quad (1)$$

Merkitään N = "Polynomifunktiolla N on kaksinkertainen nollakohta" ja M = "Polynomifunktiolla M on kaksinkertainen nollakohta". Näiden vastatapahtumat ovat $\overline{N}$ = "Polynomifunktiolla N ei ole kaksinkertaista nollakohtaa" ja $\overline{M}$ = "Polynomifunktiolla M ei ole kaksinkertaista nollakohtaa".

Nopanheitot ovat toisistaan riippumattomat, joten yhtälöstä (1) saadaan

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\overline{A}) \\ &= 1 - P(\overline{N})P(\overline{M}) \\ &= 1 - (1 - P(N))(1 - P(M)). \end{aligned} \quad (2) \quad \text{2p(8p)}$$

Oletetaan, että kuusisivuisessa nopassa kunkin silmäluvun todennäköisyys on $1/6$ ja kahdeksansivuisessa nopassa kunkin silmäluvun todennäköisyys on $1/8$, jolloin

$$\begin{aligned} P(N) &= P(6\text{-sivuisella nopalla luku } 4) = \frac{1}{6} \quad \text{1p(9p)} \\ P(M) &= P(8\text{-sivuisella nopalla } 4) = \frac{1}{8}. \quad \text{1p (10p)} \end{aligned}$$

Sijoitetaan nämä yhtälöön (2).

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - (1 - P(N))(1 - P(M)) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{13}{48} \\ &\approx 27\% \end{aligned}$$

Vastaus: Todennäköisyys, että ainakin toisella polynomeista on kaksinkertainen nollakohta, on $13/48 \approx 27\%$. 2p (12p)

Värikkiset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä ratkaisussa.

8. Suuria lukuja (12 p.)

Mitkä luvuista

111 111 111, 222 222 222 ja 333 333 333

ovat jaollisia yhdeksällä?

Onko luku

$$111\,111\,111^{111\,111\,111} + 222\,222\,222^{222\,222\,222} + 333\,333\,333^{333\,333\,333}$$

jaollinen yhdeksällä? Perustele vastauksesi.

Ratkaisu.

RATKAISUN OSA 1, VAIHTOEHTO 1

Tiedetään, että luku on jaollinen yhdeksällä, jos sen numeroiden summa on jaollinen yhdeksällä.

Luvun 111 111 111 numeroiden summa on

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9,$$

joka on selvästi jaollinen yhdeksällä, joten luku 111 111 111 on jaollinen yhdeksällä.

Luvun 222 222 222 numeroiden summa on

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 18 = 9 \cdot 2,$$

eli jaollinen yhdeksällä. Näin ollen myös luku 222 222 222 on jaollinen yhdeksällä.

Luvun 333 333 333 numeroiden summa on

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 27 = 9 \cdot 3,$$

eli jaollinen yhdeksällä. Näin ollen myös luku 333 333 333 on jaollinen yhdeksällä. 3p

RATKAISUN OSA 1, VAIHTOEHTO 2

Laskemalla voidaan todeta, että

$$\frac{111\,111\,111}{9} = 12345679,$$

joten luku 111 111 111 on jaollinen luvulla 9. Lisäksi

$$222\,222\,222 = 2 \cdot 111\,111\,111$$

$$333\,333\,333 = 3 \cdot 111\,111\,111,$$

joten myös luvut 222 222 222 ja 333 333 333 ovat jaollisia luvulla 9. 3p

RATKAISUN OSA 2, VAIHTOEHTO 1

Yllä osoitettiin, että luvut 111 111 111, 222 222 222 ja 333 333 333 ovat jaollisia luvulla 9, joten niille pätee

$$111\,111\,111 \equiv 0 \pmod{9}$$

$$222\,222\,222 \equiv 0 \pmod{9}$$

$$333\,333\,333 \equiv 0 \pmod{9}$$

2p(5p)

Tästä seuraa suoraan

$$\begin{aligned} & 111\,111\,111^{111\,111\,111} + 222\,222\,222^{222\,222\,222} + 333\,333\,333^{333\,333\,333} \\ & \equiv 0^{111\,111\,111} + 0^{222\,222\,222} + 0^{333\,333\,333} \pmod{9} \\ & \equiv 0 \pmod{9}, \end{aligned}$$

5p
(10p)

joten myös luku

$$111\,111\,111^{111\,111\,111} + 222\,222\,222^{222\,222\,222} + 333\,333\,333^{333\,333\,333}$$

on jaollinen luvulla 9.

□ 2p
(12p)

RATKAISUN OSA 2, VAIHTOEHTO 2

Tarkastellaan lukua

$$111\,111\,111^{111\,111\,111} + 222\,222\,222^{222\,222\,222} + 333\,333\,333^{333\,333\,333}.$$

Yllä perusteltiin, että luvut 111 111 111, 222 222 222 ja 333 333 333 ovat jaollisia yhdeksällä, joten ne voidaan ilmaista muodossa

$$111\,111\,111 = 9n_1$$

$$222\,222\,222 = 9n_2$$

$$333\,333\,333 = 9n_3, \quad \text{2p(5p)}$$

missä n_1 , n_2 ja n_3 ovat positiivisia kokonaislukuja. Tarkasteltava luku saa siis muodon

$$\begin{aligned} & (9n_1)^{9n_1} + (9n_2)^{9n_2} + (9n_3)^{9n_3} \\ & 9^{9n_1} \cdot n_1^{9n_1} + 9^{9n_2} \cdot n_2^{9n_2} + 9^{9n_3} \cdot n_3^{9n_3} \\ & 9 \cdot 9^{9n_1-1} \cdot n_1^{9n_1} + 9 \cdot 9^{9n_2-1} \cdot n_2^{9n_2} + 9 \cdot 9^{9n_3-1} \cdot n_3^{9n_3} \\ & 9 \cdot (9^{9n_1-1} \cdot n_1^{9n_1} + 9^{9n_2-1} \cdot n_2^{9n_2} + 9^{9n_3-1} \cdot n_3^{9n_3}) \end{aligned}$$

5p
(10p)

Suluissa oleva luku on positiivinen kokonaisluku, joten tarkasteltava luku on jaollinen yhdeksällä. _____

2p
(12p)

Huom! Jos et tiennyt, että luku on jaollinen yhdeksällä, jos sen numeroiden summa on jaollinen yhdeksällä, voit johtaa jaollisuussäännön kongruenssin avulla seuraavasti:

Positiivisen kokonaisluvun n voi esittää kymmenpotenssien avulla seuraavasti:

$$n = n_0 + n_1 \cdot 10 + n_2 \cdot 10^2 + \dots + n_k \cdot 10^k,$$

missä $n_0, n_1, \dots, n_k$ ovat luvun n numerot. Luku

$$10 \equiv 1 \pmod{9},$$

joten

$$n \equiv n_0 + n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 1^2 + \dots + n_k \cdot 1^k \pmod{9}$$

$$n \equiv n_0 + n_1 + n_2 + \dots + n_k,$$

eli jaettaessa luvulla 9, luvulla n ja sen numeroiden summalla on sama jakojäännös, eli jos luvun n numeroiden summa on jaollinen yhdeksällä, myös luku n on.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä ratkaisussa.

9. Käänteisfunktio (12 p.)

Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

9.1. Osoita, että funktio f on aidosti kasvava, ja määritä sen arvojoukko tarkastelemalla raja-arvoja

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

(6 p.)

9.2. Muodosta funktion f käänteisfunktion f^{-1} lauseke. (6 p.)

Ratkaisu.

9.1. Tehtävän funktio

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

voidaan esittää paloittain määriteltynä seuraavasti

$$f(x) = \begin{cases} f_+(x) = \frac{x}{1+x}, & x \geq 0 \\ f_-(x) = \frac{x}{1-x}, & x < 0. \end{cases}$$

Aidosti kasvavuuden osoittaminen, vaihtoehto 1

Derivoidaan f_+ .

$$\begin{aligned} f'_+(x) &= \frac{1 \cdot (1+x) - x \cdot 1}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{(1+x)^2} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Funktio f_+ on siis aidosti kasvava. _____

1p

Derivoidaan f_- .

$$\begin{aligned} f'_-(x) &= \frac{1 \cdot (1-x) - x \cdot (-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Funktio f_- on siis myös aidosti kasvava. _____ 1p(2p)

Funktio f on jatkuva, joten näin ollen myös funktio f on aidosti kasvava. _____ 1p(3p)

AIDOSTI KASVAVUUDEN OSOITTAMINEN, VAIHTOEHTO 2

Muokataan f_+ toiseen muotoon.

$$\begin{aligned} f_+(x) &= \frac{x}{1+x} \\ &= \frac{1+x-1}{1+x} \\ &= \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} \\ &= 1 - \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

Tästä nähdään, että koska $1+x$ on aidosti kasvava, $\frac{1}{1+x}$ on aidosti vähenevä, ja näin ollen $1 - \frac{1}{1+x}$ on aidosti kasvava. _____ 1p

Muokataan f_- toiseen muotoon.

$$\begin{aligned} f_-(x) &= \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{x-1+1}{1-x} \\ &= \frac{x-1}{1-x} + \frac{1}{1-x} \\ &= -\frac{1-x}{1-x} + \frac{1}{1-x} \\ &= -1 + \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Tästä nähdään, että koska $1-x$ on aidosti vähenevä, $\frac{1}{1-x}$ on aidosti kasvava, ja näin ollen $-1 + \frac{1}{1-x}$ on aidosti kasvava. _____ 1p(2p)

Funktio f on jatkuva, joten näin ollen myös funktio f on aidosti kasvava. _____ 1p(3p)

RATKAISUN JATKO KUMMAN TAHANSA VAIHTOEHDON JÄLKEEN

Lasketaan tehtävänannossa mainitut raja-arvot.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} f_+(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} \\ &= \frac{1}{0+1} \\ &= 1.\end{aligned}$$

1p(4p)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f_-(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} \\ &= \frac{1}{0-1} \\ &= -1.\end{aligned}$$

1p(5p)

Vastaus: Funktion f arvojoukko on $] -1, 1[$.

1p(6p)

9.2. Muodostetaan ensin funktion f_+ käänteisfunktion lauseke.

$$\begin{aligned}y &= \frac{x}{1+x} \\ x &= \frac{y}{1-y} \quad (\text{laskinohjelmalla})\end{aligned}$$

2p

Muodostetaan sitten funktion f_- käänteisfunktion lauseke.

$$\begin{aligned}y &= \frac{x}{1-x} \\ x &= \frac{y}{1+y} \quad (\text{laskinohjelmalla})\end{aligned}$$

2p(4p)

Funktion kuvaaja kulkee origon kautta, sillä $f(0) = 0$, joten käänteisfunktion lauseke paloittain määriteltynä on siis

1p(5p)

Vastaus:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y}{1-y}, & y \geq 0 \\ \frac{y}{1+y}, & y < 0. \end{cases}$$

1p(6p)

Käänteisfunktion lauseke voidaan myös ilmaista yhdellä lausekkeella itseisarvon avulla.

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}.$$

Käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on funktion f arvojoukko, joten vastauksen voi antaa myös muodossa

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y}{1-y}, & 0 \leq y < 1 \\ \frac{y}{1+y}, & -1 < y < 0. \end{cases}$$

Tehtävässä kysyttiin kuitenkin vain käänteisfunktion lauseketta, jolloin sen määrittelyjoukkoa ei tarvitse ilmoittaa.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä ratkaisussa.

10. Pomppiva pallo (12 p.)

Pomppivan pallon korkeutta lattiasta kuvaa tietokonepelissä funktio

$$h(x) = \frac{25|\sin(x)|}{x+5}, \quad x \geq 0,$$

kun x on pallon vaakasuoraan kulkema matka ja $h(x)$ on pallon korkeus metreinä. Kuinka moni pomppu on yli metrin korkuinen?

Ratkaisu (korjattu 26.09.2019).

Kiitämme Hermanni Jussilaa korjaukseen johtaneesta palautteesta!

Tehtävänannon mukaan pompun korkeutta metreinä kuvaa funktio

$$h(x) = \frac{25|\sin(x)|}{x+5},$$

missä $x \geq 0$ on pallon vaakasuuntaan kulkema matka metreinä. Ratkaistaan, minkä kohdan x jälkeen pomput eivät voi olla yli 1 m korkeita. Koska $|\sin(x)| \leq 1$, niin $h(x) \leq 1$ kun

$$\frac{25}{x+5} \leq 1$$

$$x \geq 20$$

Pallo voi siis pomppata yli metrin korkeudelle vain välillä $x \in [0, 20]$. Edelleen, tällä välillä pallo on yli metrin korkeudella ainakin niissä kohdissa, joissa $|\sin(x)| = 1$. 2p

Ratkaistaan, kuinka monta pomppua tällä välillä on. Pallon korkeus on nolla, kun $|\sin(x)| = 0$ eli kun $x = \pi \cdot n$, missä $n = 0, 1, 2, \dots$. Suurin n , jolla $x < 20$ on $n = 6$, sillä $20/\pi \approx 6,37$. Funktiolla h on siis seitsemän nollakohtaa välillä $x \in [0, 20]$: $x = 0, \pi, 2\pi, \dots, 6\pi$. Nollakohtien välissä on aina yksi pomppu, joten välillä $x \in [0, 20]$ on kuusi kokonaista pomppua ja yksi vajaa pomppu. 2p(4p)

Nämä kokonaiset pomput ovat yli metrin korkuisia, koska nollakohtien välissä, tarkasti sanottuna kohdissa $x_i = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot i, i = 0, 1, \dots, 5$, on aina kohta, jossa $|\sin(x)| = 1$. 2p(6p)

Näytetään vielä, että kohdasta $x = 6\pi$ alkavan pompun korkeus ei ylitä yhtä metriä välillä $6\pi \leq x \leq 20$. Funktio $\sin(x)$ on kasvava ja ei-negatiivinen välillä $x \in [6\pi, 6\pi + \frac{\pi}{2}]$. Toisaalta $6\pi + \frac{\pi}{2} \approx 20,42 > 20$, joten $\sin(x)$ on kasvava ja ei-negatiivinen myös välillä $x \in [6\pi, 20]$. Tällöin saadaan 4p (10p)

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \frac{25 \cdot |\sin(x)|}{x + 5} \\
 &= \frac{25 \cdot \sin(x)}{x + 5} \\
 &\leq \frac{25 \cdot \sin(20)}{x + 5} & * \\
 &\leq \frac{25 \cdot \sin(20)}{6\pi + 5} & ** \\
 &= 0,956 \dots \\
 &< 1.
 \end{aligned}$$

* Koska $\sin(x)$ on tarkasteluvälillä kasvava, $\sin(x) \leq \sin(20)$, kun $x \in [6\pi, 20]$.

** Koska $h(x)$ on positiivinen rationaalifunktio, se on suurimmillaan, kun nimittäjä on pienimmillään.

Pallo ei siis ylitä metrin korkeutta välillä $x \in [6\pi, 20]$.

2p
(12p)

Aiemmin osoitettiin jo, että pallo ei nouse yli metrin korkeudelle, kun $x \geq 20$, joten seitsemäs pomppu ei ylitä metrin korkeutta missään kohdassa.

Vastaus: Kuusi pomppua ovat yli metrin korkuisia.

Pisteytyksestä: Sen osoittamisesta, että välillä $x \in [0, 20]$ on kuusi kokonaista pomppua saa 4 pistettä. Sen osoittamisesta, että kaikki nämä pomput ovat yli metrin korkuisia saa 4 pistettä. Lopuksi siitä, että kohdan $x = 6\pi$ jälkeen mikään pomppu ei ole yli metrin korkuinen saa myös 4 pistettä.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä ratkaisussa.

11. Newtonin menetelmä (12 p.)

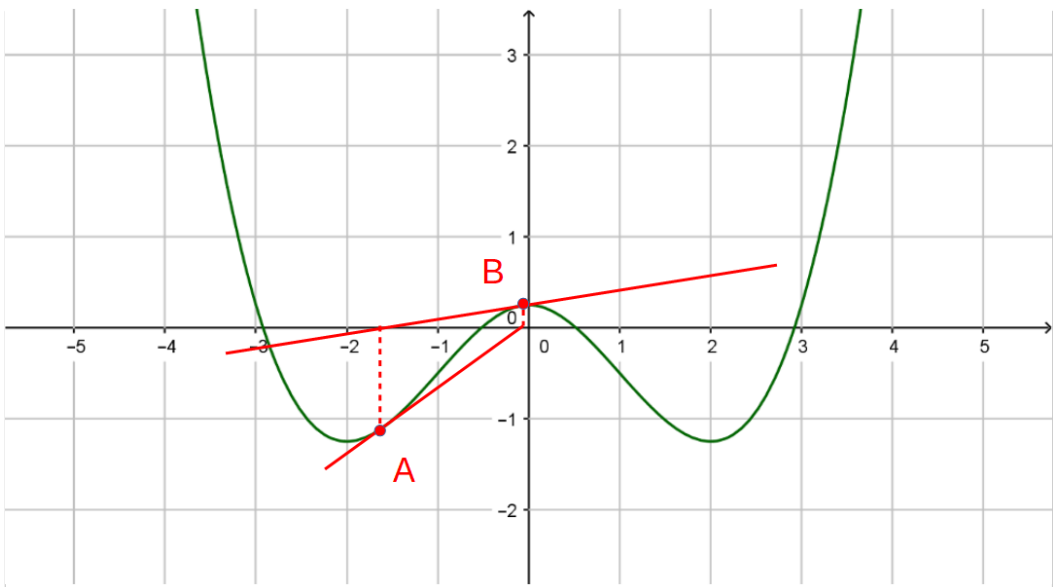
Aineisto:

11.A [Kuva: Funktion kuvaaja](#)

Toisinaan Newtonin menetelmä ei suppene kohti haluttua nollakohtaa, vaan juuttuu kahden eri pisteen välille: on olemassa sellaiset pisteet a ja b että $a \neq b$, $x_{2n-1} = a$ ja $x_{2n} = b$ kaikille $n \geq 1$.

Esitä tilanne graafisesti funktion 11.A kuvaajan tapauksessa ja määritä pisteiden a ja b likiarvot. Voit tehdä piirto-ohjelmalla merkintöjä kuvaan 11.A ja liittää sen vastaukseen. Selitä sanallisesti, missä tilanteessa edellä mainittu ilmiö esiintyy.

Ratkaisu.



Yllä on kuva tilanteesta. Piste A sijaitsee kohdassa a ja piste B kohdassa b . Newtonin menetelmä jumittuu näiden pisteen välille siten, kuin tehtävänannossa on kuvattu, eli aina joka toisella iteraatiolla Newtonin menetelmä antaa arvon a ja joka toisella b . [\(Tilanteen esittäminen aineiston kuvaajan tilanteessa.\)](#)

4p

Ilmiö syntyy seuraavalla tavalla:

Newtonin menetelmä perustuu siihen, että seuraava iteraatio x_{n+1} on se kohta, jossa kuvaajan kohtaan x_n piirretty tangentti leikkaa x -akselin. [\(Newtonin menetelmän selitys graafisesti.\)](#)

3p(7p)

Funktion kuvaajalle pisteeseen A piirretty tangentti leikkaa x -akselin kohdassa b , eli samassa kohdassa, jossa sijaitsee piste B . Pisteeseen B piirretty tangentti taas

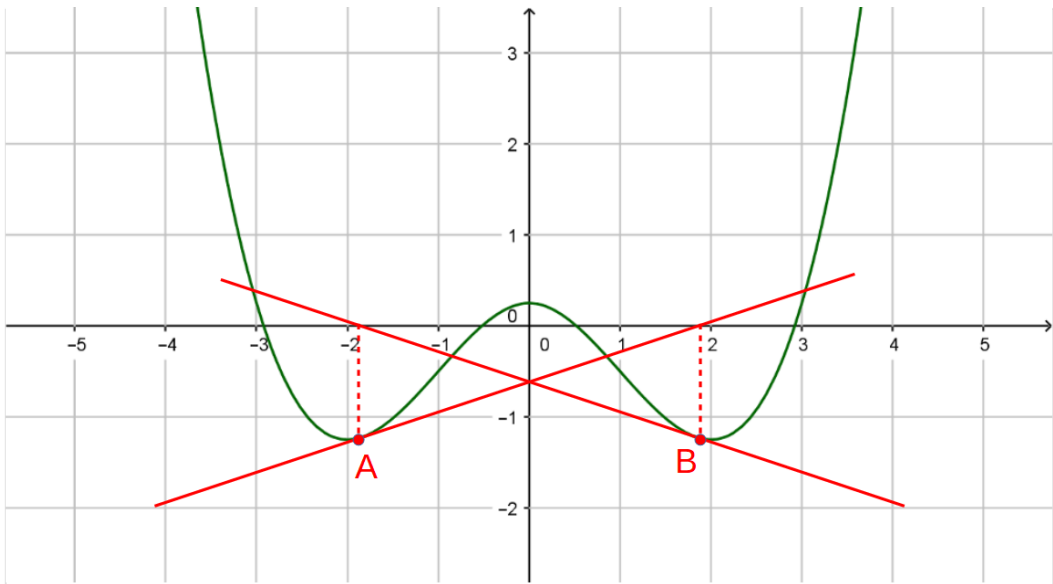
leikkaa x -akselin kohdassa a , eli samassa kohdassa, jossa sijaitsee piste A . Tällöin on palattu alkutilanteeseen, joten seuraava iteraatio on taas b , sitten a , sitten b jne.

Ilmiö tapahtuu aina, jos kohdat a ja b ovat sellaiset, että kohtaan a piirretty tangentti leikkaa x -akselin kohdassa b ja vastaavasti kohtaan b piirretty tangentti leikkaa x -akselin kohdassa a . [\(Tehtävän ilmiön selitys.\)](#)

3p
(10p)

Tehtävän tilanteessa toinen vastaava juuttumistilanne syntyy samoin kuin yllä olevassa kuvassa, mutta peilikuvana toiselle puolen y -akselia.

Kolmas juuttumistilanne syntyy alla olevan kuvan tilanteessa.



Vastaus: Ylemmstä kuvasta voidaan lukea x -akselilta likiarvot kohdille $a = -0,1$ ja $b = -1,7$. Vastaava tilanne syntyy peilikuvana myös toiselle puolen y -akselia, jolloin $a = 0,1$ ja $b = 1,7$. Alemmasta kuvasta saadaan kolmas tilanne $a = -1,9$ ja $b = 1,9$. [\(Yhden tilanteen likiarvot riittävät.\)](#)

2p
(12p)

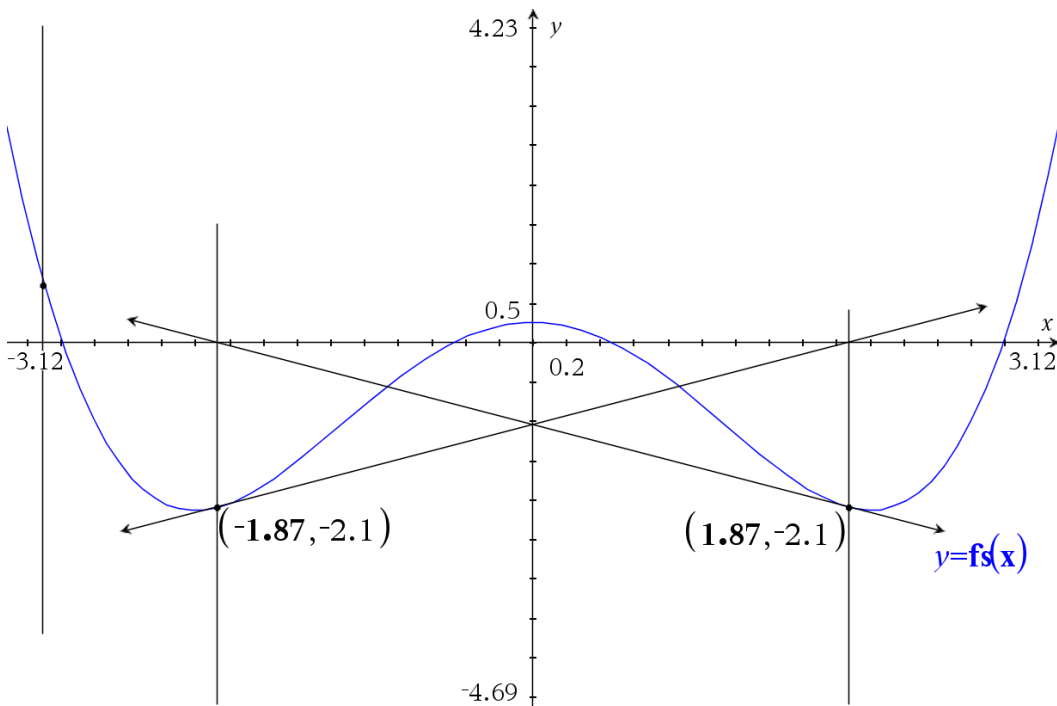
Pisteytyksestä:

- Koska kuvaajaa ei voi lukea kovin tarkasti, muuttujien a ja b arvot saavat varmasti poiketa tarkoista arvoista. Uskomme, että ylemmässä kuvassa a saa olla ainakin mitä tahansa väliltä $-0,2 \dots -0,05$ ja b ainakin mitä tahansa väliltä $-1,8 \dots -1,6$. Alemmassa kuvassa uskomme sallittavan ainakin vaihteluvälit $a = -1,95 \dots -1,8$ ja $b = 1,8 \dots 1,95$.
- Kaikkia kolmea tapausta ei tarvitse näyttää, vaan yksi tilanne ja yhden a :n ja b :n arvot riittävät täysiin pisteisiin (YTL:n hyvän vastauksen piirteiden mukaisesti).

- Huomautus opiskelijalle: Yllä oleva voidaan sanoa jälkiviisaana, mutta koetilanteessa on vaikea varmuudella tietää tämän tyyppisessä tehtävässä, edellytetäänkö kaikki vaihtoehdot. Jos sinulla on kokeessa aikaa, tee kaikki vaihtoehdot. Jos tulee kiire, luota siihen, että yksi riittää ja tee muita tehtäviä säästyneellä ajalla.

Jos sinulla on ylimääräistä harrastuneisuutta dynaamisen matematiikan ohjelmista, niin tässä vinkki:

Tehtävän voi ratkaista hyvin tarkasti laskinohjelman avulla. Ääriarvokohtien ja kahden pisteen avulla voi sovittaa neljännen asteen polynomin, jonka muoto on hyvin tarkasti sama kuin annetussa kuvassa. Saadun polynomin kuvaajalle voi sitten piirtää tangentin ja samaan pisteeseen pystysuoran suoran. Tällaisia tangenteja tulee konstruoida kaksi. Sitten ne liikutellaan hieman kokeillen ja sääten siten, että juutumiskohdan ehdot täyttyvät.



Huom! Laskinratkaisuun liittyvien temppujen osaamista ei siis edellytetty kokeessa, vaan ratkaisun sai tehdä paljon likimääräisemmin piirto-ohjelmalla.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä ratkaisussa.

12. Summan arviointi (12 p.)

Aineisto:

12.A [Tiedosto: Pylväät](#)Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$\frac{127}{7}(n-1)^7 \leq \sum_{k=n}^{2n-1} k^6 \leq \frac{127}{7}n^7.$$

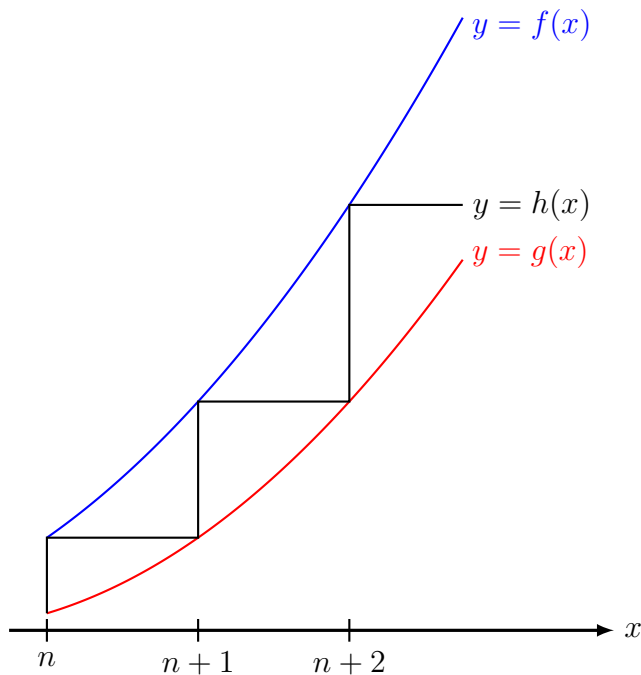
Voit käyttää aineistoa 12.A tehtävän tilanteen hahmottamiseksi, mutta tämä ei ole välttämätöntä ratkaisun kannalta. Muista myös, että pelkät kokeilut eivät riitä matemaattisen väitteen perusteluksi.

Ratkaisu.

Tutkitaan funktion $y = f(x) = x^6$ kuvaajaa, funktion $y = g(x) = (x-1)^6$ kuvaajaa sekä sellaista kuvaajaa $y = h(x)$, jonka korkeus kullakin välillä $[k, k+1[$ on k^6 .

1p

Huomataan, että $g(x+1) = (x+1-1)^6 = x^6 = f(x)$, eli $g(x)$ saa kohdassa $k+1$ aina saman arvon kuin $f(x)$ kohdassa k . Saadaan siis alla olevan näköiset kuvaajat.



Kuvaajan $y = f(x)$ alle jäävä pinta-ala A_f on siis suurempi kuin kuvaajan $y = h(x)$ alle jäävä pinta-ala A_h , joka on puolestaan suurempi kuin kuvaajan $y = g(x)$ alle jäävä pinta-ala A_g , eli

$$A_g < A_h < A_f \quad (1) \quad \text{2p(3p)}$$

Kuvaajan $y = h(x)$ alle jäävä pinta-ala A_h koostuu suorakulmioista, joiden leveys on 1 ja korkeus on k^6 kullakin välillä $[k, k + 1[$. Näin ollen välillä $[n, 2n[$

$$A_h = \sum_{k=n}^{2n-1} 1 \cdot k^6$$

$$A_h = \sum_{k=n}^{2n-1} k^6 \cdot \quad (2) \quad \text{2p(5p)}$$

Huom! Summan viimeinen k :n arvo on $2n - 1$, koska tarkastellaan väliä $[n, 2n[$ ja kuvaajan $y = h(x)$ korkeus viimeisellä "portaalla", eli välillä $[2n - 1, 2n[$ on $(2n - 1)^6$.

Kuvaajan $y = f(x)$ alle jäävä pinta-ala A_f voidaan laskea määrättynä integraalina.

$$A_f = \int_n^{2n} f(x) \, dx$$

$$A_f = \int_n^{2n} x^6 \, dx$$

$$A_f = \frac{127}{7} n^7 \quad (\text{CAS-ohjelmalla}) \quad (3) \quad \text{3p(8p)}$$

Kuvaajan $y = g(x)$ alle jäävä pinta-ala A_g saadaan vastaavasti.

$$A_g = \int_n^{2n} g(x) \, dx$$

$$A_g = \int_n^{2n} (x - 1)^6 \, dx \quad *$$

$$A_g = \int_n^{2n-1} (x - 1)^6 \, dx + \int_{2n-1}^{2n} (x - 1)^6 \, dx \quad (4)$$

Integraalin (*) voi laskea auki laskinohjelmalla, mutta lausekkeesta tulee pitkä eikä se sellaisenaan muistuta tavoiteltua lauseketta (5). Yksi tapa kiertää ongelma on jakaa integrointiväli kahteen osaan, kuten yllä. Tämän keksiminen toki vaatii ensin ongelman tutkimista.

Yhtälössä (4) jälkimmäinen määrätty integraali on positiivinen, joten

$$A_g > \int_n^{2n-1} (x-1)^6 dx = \frac{127}{7}(n-1)^7 \quad (\text{CAS-ohjelmalla})$$

$$A_g > \frac{127}{7}(n-1)^7 \quad \text{_____} \quad (5)$$

3p
(11p)

Näin ollen yhtälöiden (2) ja (3) sekä epäyhtälön (5) nojalla epäyhtälöstä (1) saadaan

$$\frac{127}{7}(n-1)^7 < A_g < \sum_{k=n}^{2n-1} k^6 < \frac{127}{7}n^7$$

$$\frac{127}{7}(n-1)^7 < \sum_{k=n}^{2n-1} k^6 < \frac{127}{7}n^7,$$

josta seuraa väite

$$\frac{127}{7}(n-1)^7 \leq \sum_{k=n}^{2n-1} k^6 \leq \frac{127}{7}n^7. \quad \square$$

1p
(12p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä ratkaisussa.

13. Joukon alkioden summa (12 p.)

Tarkastellaan joukkoja

$$A_1 = \{0\}, \quad A_2 = \{1, 2\}, \quad A_3 = \{3, 4, 5\}, \quad A_4 = \{6, 7, 8, 9\}, \quad \dots$$

Joukossa A_k on siis k alkioita, jotka ovat peräkkäisiä kokonaislukuja ja joista pienin on yhtä suurempi kuin joukon A_{k-1} suurin alkio. Joukon alkioden summa tarkoittaa sitä, että joukkoon kuuluvat luvut lasketaan yhteen. Esimerkiksi joukon A_3 alkioden summa on $3 + 4 + 5 = 12$.

Määritä joukon A_6 alkioden summa sekä joukon A_{2019} alkioden summa. Muodosta yleinen polynomifunktio $P(k)$, joka antaa joukon A_k alkioden summan kaikilla $k = 1, 2, 3, \dots$.

Ratkaisu.

Huom! Jos yleistä polynomifunktiota $P(k)$ ei saanut johdettua, tästä tehtävästä oli mahdollista saada hajapisteitä laskemalla joukon A_6 alkioden summa käsin seuraavasti:

$$A_5 = 10, 11, 12, 13, 14$$

$$A_6 = 15, 16, 17, 18, 19, 20.$$

Joukon A_6 alkioden summa on siis

$$P(6) = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 105.$$

Pisteytyksestä: Jos on saanut tehtyä vain ylläolevan, voi antaa irtopisteen joukon A_6 alkioden selvittämisestä ja toisen irtopisteen summan $P(6)$ laskemisesta.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Selvitetään ensin joukon A_k pienimmän alkion suruuus.

Joukossa A_k on aina k kappaletta alkioita, joten kaikissa niissä joukoissa A_i , joille $i < k$, on yhteensä

$$N(k) = \sum_{i=1}^{k-1} i$$

1p

alkiota. Esimerkiksi $N(4)$ kertoo siis joukoissa A_1 , A_2 ja A_3 olevien alkioden kokonaismäärän, joka on

$$N(4) = \sum_{i=1}^{4-1} i = \sum_{i=1}^3 i = 1 + 2 + 3 = 6.$$

Kyseessä on aritmeettinen summa, jonka ensimmäinen termi on 1 ja viimeinen termi on $k - 1$, joten termien lukumäärä on $k - 1$ ja aritmeettisen summan kaavalla saadaan

$$N(k) = (k - 1) \cdot \frac{1 + (k - 1)}{2} = \frac{(k - 1)k}{2} \quad (1) \quad 2p(3p)$$

Joukkojen A_k alkiot ovat peräkkäisiä kokonaislukuja, jotka lähtevät nolasta, joten joukon A_k pienin alkio on suuruudeltaan sama kuin joukkojen A_i , joille $i < k$, alkioden yhteismäärä, eli $N(k)$. 1p(4p)

Lasketaan sitten joukon A_k alkioden summa.

Joukon A_k alkioden summa on

$$P(k) = \sum_{i=0}^{k-1} (N(k) + i) \quad (2)$$

$$= kN(k) + \sum_{i=0}^{k-1} i \quad (3) \quad 1p(5p)$$

Esimerkiksi joukon A_4 alkioden summa on

$$\begin{aligned} P(4) &= \sum_{i=0}^{4-1} (N(4) + i) \\ &= (N(4) + 0) + (N(4) + 1) + (N(4) + 2) + (N(4) + 3) \\ &= 4N(4) + 0 + 1 + 2 + 3. \end{aligned}$$

$P(k)$:n lausekkeessa oleva summa

$$\sum_{i=0}^{k-1} i$$

on aritmeettinen summa, jonka ensimmäinen termi on nolla, viimeinen termi on $k - 1$ ja termien lukumäärä on k , joten

$$\sum_{i=0}^{k-1} i = k \cdot \frac{0 + k - 1}{2} = \frac{(k - 1)k}{2}. \quad (4) \quad 1\text{p}(6\text{p})$$

Aritmeettisen summan voi laskea myös ilman nollaa, eli siten, että ensimmäinen termi on 1, viimeinen termi on $k - 1$ ja termien lukumäärä on $k - 1$, jolloin saadaan aritmeettisen summan kaavalla

$$\sum_{i=1}^{k-1} i = (k - 1) \cdot \frac{1 + k - 1}{2} = \frac{(k - 1)k}{2}.$$

Sijoitetaan (1) ja (4) $P(k)$:n lausekkeeseen (3).

$$\begin{aligned} P(k) &= k \cdot \frac{(k - 1)k}{2} + \frac{(k - 1)k}{2} \\ &= \frac{1}{2}k^3 - \frac{1}{2}k. \end{aligned} \quad 1\text{p}(7\text{p})$$

Lasketaan joukkojen A_6 ja A_{2019} alkioden summat.

$$P(6) = \frac{1}{2} \cdot 6^3 - \frac{1}{2} \cdot 6 = 105. \quad 2\text{p}(9\text{p})$$

$$P(2019) = \frac{1}{2} \cdot 2019^3 - \frac{1}{2} \cdot 2019 = 4115085420. \quad 3\text{p} (12\text{p})$$

Vastaus: Joukon A_6 alkioden summa on 105, joukon A_{2019} alkioden summa on 4115085420 ja yleinen polynomifunktio, joka antaa joukon A_k alkioden summan, on $P_k = \frac{1}{2}k^3 - \frac{1}{2}k$.

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Selvitetään ensin joukon A_k suurin alkio.

Merkitään joukon A_k pienintä alkioita e_k :lla. Joukon A_k alkiot ovat siis

$$e_k, e_k + 1, \dots, e_k + k - 1.$$

Merkitään joukon A_k suurinta alkioita v_k :lla, eli

$$v_k = e_k + k - 1 \quad (1)$$

Joukon A_k pienin alkio on yhden suurempi kuin joukon A_{k-1} suurin alkio, eli $e_k = v_{k-1} + 1$. Sijoitetaan tämä yhtälöön (1).

$$v_k = v_{k-1} + 1 + k - 1$$

$$v_k = v_{k-1} + k. \quad \text{1p}$$

Siten

$$v_2 = v_1 + 2$$

$$v_3 = v_2 + 3 = v_1 + 2 + 3$$

$$v_4 = v_3 + 4 = v_1 + 2 + 3 + 4$$

$$\vdots$$

$$v_k = v_1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k. \quad \text{1p(2p)}$$

Joukon A_1 suurin (ja ainoa) alkio on $v_1 = 0$, joten kyseessä on aritmeettinen summa, jonka ensimmäinen termi on 2, viimeinen termi on k ja termien lukumäärä on $k - 1$. Aritmeettisen summan kaavalla saadaan

$$v_k = (k - 1) \cdot \frac{2 + k}{2} \quad \text{(2)} \quad \text{2p(4p)}$$

Selvitetään sitten joukon A_k pienin alkio.

Yhtälöstä (1) saadaan

$$e_k = v_k - k + 1$$

Sijoitetaan (2).

$$e_k = (k - 1) \cdot \frac{2 + k}{2} - k + 1$$

$$e_k = \frac{(k - 1)k}{2}. \quad \text{(3)} \quad \text{1p(5p)}$$

Lasketaan sitten joukon A_k alkioden summa.

Joukon A_k alkiot ovat peräkkäisiä kokonaislukuja. Joukon A_k alkioden summa on siis aritmeettinen summa, jonka termien lukumäärä on k , ensimmäinen termi on e_k ja viimeinen termi on v_k , eli

$$P(k) = k \cdot \frac{e_k + v_k}{2}$$

Sijoitetaan (3) ja (2).

$$P(k) = k \cdot \frac{\frac{(k-1)k}{2} + (k-1)\frac{2+k}{2}}{2}$$

$$P(k) = \frac{1}{2}k^3 - \frac{1}{2}k. \quad \text{2p(7p)}$$

Lasketaan joukkojen A_6 ja A_{2019} alkioden summat.

$$P(6) = \frac{1}{2} \cdot 6^3 - \frac{1}{2} \cdot 6 = 105. \quad \text{2p(9p)}$$

$$P(2019) = \frac{1}{2} \cdot 2019^3 - \frac{1}{2} \cdot 2019 = 4115085420. \quad \text{3p (12p)}$$

Vastaus: Joukon A_6 alkioden summa on 105, joukon A_{2019} alkioden summa on 4115085420 ja yleinen polynomifunktio, joka antaa joukon A_k alkioden summan, on $P_k = \frac{1}{2}k^3 - \frac{1}{2}k$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä ratkaisussa.