MAFY-VALMENNUS

MAFYNETTI

Valmistaudu täydellisesti lääkiksen pääsykokeeseen!

- Voit harjoitella kotoa käsin huippusuositulla Mafynetti-ohjelmalla. Mukaan kuuluu 4 täysimittaista harjoituskoetta!!
- Harjoittelu tehdään aktiivisesti tehtäviä tekemällä. Tehtävät kattavat yksityiskohtaisesti pääsykokeessa tarvittavat biologian, fysiikan ja kemian asiat.
- Vastaaminen tehdään kynällä ja paperilla. Mafynetti opettaa ja näyttää sinulle aina malliratkaisun.
- Mafynetti huolehtii kertauksesta, joten et unohda oppimiasi asioita.

Kokeile ilmaiseksi mafyvalmennus.fi/mafynetti

Arviomme tehtävien pisteytyksestä
on merkitty sinisellä tekstillä.

Fysiikka, syksy 2013

Mallivastaukset, 16.9.2013

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Antti on toiminut neljä vuotta tuntiopettajana Teknillisessä korkeakoulussa ja sen jälkeen lukiossa. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen ja opettavat sen kaikilla kursseilla ympäri vuoden. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, valmennuskursseihin sekä matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- arkkitehtuurin valmennuskurssit
- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet:	`www.mafyvalmennus.fi`
s-posti:	`info@mafyvalmennus.fi`
puhelin:	(09) 3540 1373

1. Taulukossa on joukko fysiikassa esiintyviä käsitteitä. Kopioi taulukko vastauspaperiisi ja merkitse taulukkoon rastilla, onko käsite skalaarisuure, vektorisuure tai ei suure lainkaan.

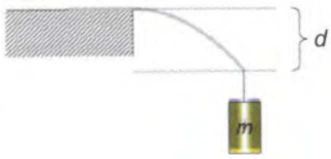
	skalaarisuure	vektorisuure	ei suure
aika			
massa			
gravitaatio			
nopeus			
liikemäärä			
liike-energia			

Ratkaisu.

	skalaarisuure	vektorisuure	ei suure
aika	✗		
massa	✗		
gravitaatio			✗
nopeus		✗	
liikemäärä		✗	
liike-energia	✗		

1 p kustakin kohdasta

2. Pöydän reunaan kuvan mukaisesti kiinnitettyä kevyttä, symmetristä viivoitinta kuormitetaan sen päästä eri massaisilla punnuksilla. Viivoittimen taipuma d eri punnuksen massoilla on esitetty taulukossa.



m (g)	0	25	50	75	100	150	200	300	400	500
d (cm)	0	1,1	2,1	3,1	4,0	5,9	7,5	10,1	12,1	13,5

a) Piirrä kuvaaja, joka esittää taipumaa kuormittavan voiman funktiona. Ota huomioon kohta c ennen kuin alat piirtää. (3 p.)
b) Kuinka paljon viivoitin taipuu, kun sitä kuormitetaan 350 g:n punnuksella? (1 p.)
c) Samaa viivoitinta taivutetaan ylöspäin langan, kitkattoman väkipyörän ja 65 g:n punnuksen avulla kuvan mukaisesti. Täydennä kohdan a kuvaaja niin, että se sisältää tätä tilannetta kuvaavan pisteen. (2 p.)

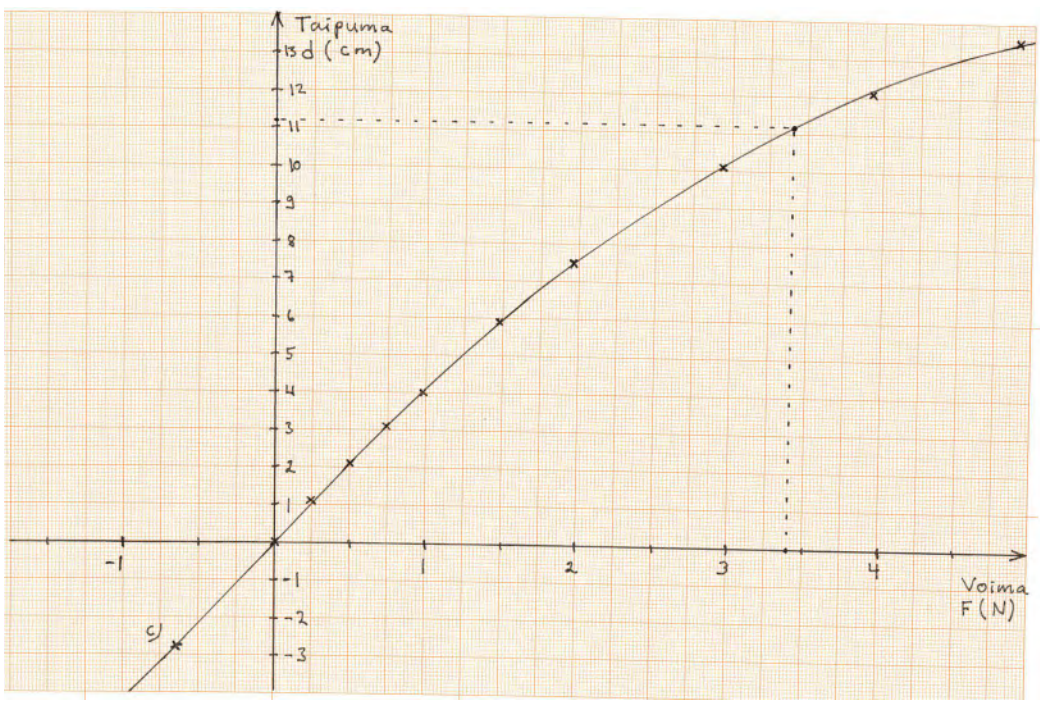
Ratkaisu. Lasketaan taulukkoon punnuksen massaa vastaavat gravitaatiovoimat kaavalla

$$F = G = mg,$$

missä m on massa kilogrammoina.

Massa m (kg)	0	0,025	0,050	0,075	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
Voima F (N)	0	0,24525	0,4905	0,73575	0,981	1,4715	1,962	2,943	3,924	4,905
Taipuma d (cm)	0	1,1	2,1	3,1	4,0	5,9	7,5	10,1	12,1	13,5

a)



3 p

b)

$$m = 350\,\mathrm{g} = 0{,}35\,\mathrm{kg}$$
$$F = mg = 0{,}35\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 3{,}4335\,\mathrm{N} \approx 3{,}4\,\mathrm{N}$$

Luetaan kuvaajasta 3,4 N:n voimaa vastaava taipuma:

$$d = \underline{\underline{11{,}2\,\mathrm{cm}}}$$ 1 p (4 p)

c)

$$m = 0{,}065\,\mathrm{kg}$$
$$F = -G = -mg = -0{,}065\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = -0{,}63765\,\mathrm{N} \approx -0{,}64\,\mathrm{N}$$ 1 p (5 p)

Piirretään piste kuvaajalle kohtaan $F = -0{,}64\,\mathrm{N}$.
Huom. Kuvaajan negatiivinen puoli on origon suhteen likimain symmetrinen positiivisen puolen kanssa.

Kuvaajan jatke ja piste merkitty a-kohdan kuvaajaan, +1 p (6 p)

3. Airbus A380-800, lempinimeltään Super Jumbo, on vuodesta 2005 alkaen ollut maailman suurin matkustajalentokone. Sen suurin lentoonlähtömassa on 560 000 kg. Koneen neljä suihkumoottoria tuottavat kukin suurimmilaan 310 kN:n työntövoiman. Nousua varten on saavutettava nopeus 280 km/h.

   a) Kuinka pitkä täysin vaakasuoran kiitoradan olisi vähintään oltava, jotta lentokone pystyisi nousemaan suurimmalla lentoonlähtömassallaan, jos liikevastusvoimia ei oteta huomioon? (4 p.)
   b) Mitä liikevastusvoimia koneeseen vaikuttaa lähtökiidon aikana? Selitä, miten ne vaikuttavat tarvittavaan kiitotien pituuteen. (2 p.)

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} m &= 560\,000\,\mathrm{kg} \\ F_{\max} &= 4 \cdot 310\,\mathrm{kN} = 1{,}24 \cdot 10^6\,\mathrm{N} \\ v_{\min} &= 280\,\mathrm{km/h} \\ &x \text{ on kysytty kiitoradan vähimmäispituus.} \end{aligned}$$

a) Moottorien koneeseen tekemä työ on

$$W = F_{\max} \cdot x. \tag{1}$$

Työ on yhtäsuuri kuin koneen liike-energian muutos

$$\begin{aligned} W &= \Delta E_k \\ W &= \frac{1}{2} m v_{\min}^2 - 0\,\mathrm{J}. \qquad \text{1 p} \end{aligned} \tag{2}$$

Yhdistetään (1) ja (2).

$$\begin{aligned} F_{\max} \cdot x &= \frac{1}{2} m v_{\min}^2 \quad \| : F_{\max} \\ x &= \frac{m v_{\min}^2}{2F_{\max}} \qquad \text{2 p (3 p)} \quad (3) \\ x &= \frac{560\,000\,\mathrm{kg} \cdot \left(\frac{280}{3{,}6}\,\mathrm{m/s}\right)^2}{2 \cdot 1{,}24 \cdot 10^6\,\mathrm{N}} \\ x &= 1\,365{,}98\ldots\,\mathrm{m} \\ &\approx 1\,400\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Vastaus: <u>Kiitoradan olisi oltava vähintään 1 400 m pitkä.</u> 1 p (4 p)

b) Koneeseen vaikuttaa lähtökiidon aikana <u>ilmanvastus, renkaiden vierimisvastukset sekä laakerikitka.</u> 1 p (5 p)
Vastusvoimat pienentävät koneeseen kohdistuvaa kokonaisvoimaa, joten

$$F_{\mathrm{kok}} < F_{\max}.$$

Kaavasta (3) nähdään, että <u>tarvittava kiitoradan pituus on tällöin suurempi.</u> 1 p (6 p)

4. Naisten moukarinheiton olympiafinaalissa Lontoossa 2012 tapahtui pienehkö skandaali, kun järjestäjät eivät onnistuneet mittaamaan saksalaisen Betty Heidlerin viidettä heittoa, joka lopulta toi hänelle pronssimitalin. Eräiden lehtitietojen mukaan mittaus tehtiin perinteisellä teräsmittanauhalla, kun optista järjestelmää ei saatu toimimaan. Teräsmitalla tulokseksi saatiin 77,13 m. Kilpailun jälkeen optinen mittaus antoi tuloksen 77,12 m. Oletetaan, että heiton pituus osui molemmilla mittavälineillä tasasenttimetriluvuille. Teräsmitta oli kalibroitu lämpötilassa 20 °C, ja minimilämpötila Lontoossa kisapäivänä oli 15 °C. Voiko lämpötila olla ainoa syy heittopituuden mittaustulosten eroon?

Ratkaisu. Käytetään seuraavia merkintöjä:

ℓ_{20} = mittanauhan 0-merkin ja merkinnän 77,13 m välisen osan pituus lämpötilassa 20 °C
ℓ_{15} = mittanauhan 0-merkin ja merkinnän 77,13 m välisen osan pituus lämpötilassa 15 °C

Mittanauha on kalibroitu lämpötilassa 20 °C, joten $\ell_{20} = 77{,}13\,\mathrm{m}$. 15 celsiusasteen lämpötilassa kyseinen mittanauhan osa on lyhyempi, joten lämpölaajenemisen kaavan avulla saadaan

$$\begin{aligned}\Delta\ell &= \ell_{20}\alpha\Delta t\\ &= 77{,}13\,\mathrm{m}\cdot 12\cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}}\cdot 5\,\mathrm{K}\\ &= 0{,}0046278\,\mathrm{m} \approx 0{,}46\,\mathrm{cm}\end{aligned}$$

2 p

ja

$$\begin{aligned}\ell_{15} &= \ell_{20} - \Delta\ell\\ &= 77{,}13\,\mathrm{m} - 0{,}0046278\,\mathrm{m}\\ &= 77,1253\ldots\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

1 p (3 p)

Jos mittaus on tehty lämpötilassa 15 °C, heiton pituus on mittanauhalla saadun tuloksen perusteella ℓ_{15} eli 77,12537 . . . m. Lämpötila voi siis selittää osan mittaustulosten erosta, mutta lämpötilakorjattu arvo on edelleen suurempi kuin optisella mittauksella saatu 77,12 m. 1 p (4 p)

Mittaustulosten ero on 77,13 m − 77,12 m = 0,01 m = 1 cm. Lämpötila voi selittää erosta korkeintaan 0,46 cm, joten lämpötila ei voi olla ainoa syy mittaustulosten eroon.

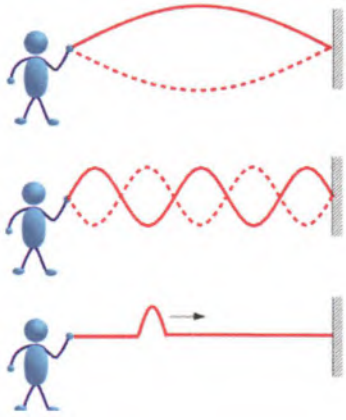
2 p (6 p)

5. Kalle tekee kokeita jännitetyllä jousella, joka on kiinnitetty toisesta päästään seinään. Jousen pituus suorana on 4,2 m.

a) Kalle heiluttaa jousta niin, että siihen syntyy aalto kuvan i) mukaisesti. Hän mittaa jousen kymmeneen edestakaiseen heilahdukseen kuluvaksi ajaksi 15,0 s. Kuinka suuria ovat tämän aaltoliikkeen aallonpituus ja taajuus?

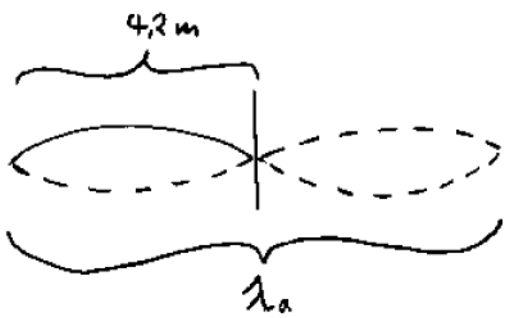
b) Seuraavaksi Kalle alkaa heiluttaa jousta niin, että siihen syntyy kuvan ii) esittämä aalto. Kuinka suuria ovat tämän aaltoliikkeen aallonpituus, jaksonaika ja taajuus?

c) Lopuksi Kalle heilauttaa jousen päätä nopeasti, jolloin jousessa alkaa edetä pulssi kuvan iii) mukaisesti. Pulssi heijastuu seinästä. Kuinka kauan kestää pulssin kulku edestakaisin käden ja seinän välillä?



Ratkaisu.

a) Lasketaan aallonpituus.



$$\frac{\lambda_a}{2} = 4{,}2\,\text{m} \quad \| \cdot 2$$
$$\lambda_a = 2 \cdot 4{,}2\,\text{m}$$
$$\lambda_a = 8{,}4\,\text{m}$$ 1 p

Yhteen heilahdukseen kuluva aika on värähtelyn jaksonaika.

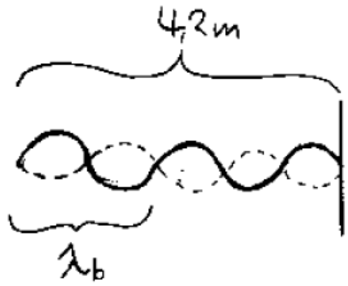
$$T_a = \frac{15\,\text{s}}{10} = 1{,}5\,\text{s}$$

Taajuus on siis

$$f_a = \frac{1}{T_a} = \frac{1}{1{,}5\,\text{s}} = 0{,}666\ldots\,\text{Hz} \approx 0{,}67\,\text{Hz}$$

Vastaus: Aaltoliikkeen aallonpituus on 8,4 m ja taajuus 0,67 Hz. 1 p (2 p)

b) Lasketaan aallonpituus.



$$\begin{aligned} 2{,}5\lambda_b &= 4{,}2\,\mathrm{m} \quad \| : 2{,}5 \\ \lambda_b &= 1{,}68\,\mathrm{m} \approx 1{,}7\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

1 p (3 p)

Aaltoliikkeen nopeus riippuu vain väliaineesta, joten se on sama kuin a-kohdassa. Aaltoliikkeen perusyhtälöstä:

$$v = f_a\lambda_a = 0{,}666\ldots\ \mathrm{Hz} \cdot 8{,}4\,\mathrm{m} = 5{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Lasketaan taajuus tilanteessa ii).

$$\begin{aligned} f_b\lambda_b &= v \quad \| : \lambda_b \\ f_b &= \frac{v}{\lambda_b} \\ &= \frac{5{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}68\,\mathrm{m}} \\ &= 3{,}333\ldots\ \mathrm{Hz} \\ &\approx 3{,}3\,\mathrm{Hz} \end{aligned}$$

Jaksonaika on siis

$$T_b = \frac{1}{f_b} = \frac{1}{3{,}333\ldots\ \mathrm{Hz}} = 0{,}3\,\mathrm{s}$$

Vastaus: Aallonpituus on 1,7 m, jaksonaika 0,30 s ja taajuus 3,3 Hz. 1 p (4 p)

c) Edestakainen matka on

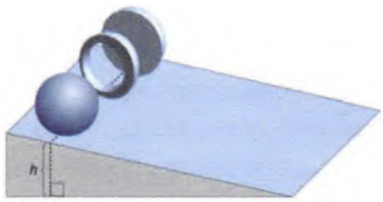
$$\Delta x = 2 \cdot 4{,}2\,\mathrm{m} = 8{,}4\,\mathrm{m}$$

Pulssin nopeus on aaltoliikkeen nopeus, joten

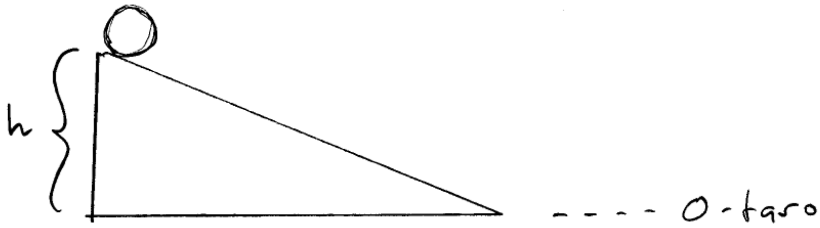
$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta x}{v} \\ &= \frac{8{,}4\,\mathrm{m}}{5{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \\ &= 1{,}5\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Vastaus: Pulssilta kestää edestakaisessa matkassa 1,5 s. 2 p (6 p)

6. Kaltevalle tasolle on asetettu kuvan mukaisesti kiekko, ohut rengas ja umpinainen pallo. Kaikilla on yhtä suuri massa m ja säde r. Kappaleet lähtevät vierimään liukumatta yhtä aikaa korkeudelta h. Johda lausekkeet kappaleiden nopeuksille tason alareunan kohdalla. Mikä kappaleista saavuttaa alareunan ensimmäisenä ja mikä viimeisenä? Perustele.



Ratkaisu.



Kappaleiden hitausmomentit ovat (taulukosta)

$$\begin{array}{ll} \text{pallo:} & J_p = \frac{2}{5}mr^2 \\ \text{kiekko:} & J_k = \frac{1}{2}mr^2 \\ \text{rengas:} & J_r = mr^2 \end{array}$$

Merkitään termin mr^2 edessä olevaa kerrointa k:lla. 1 p
Kappaleet vierivät, joten niille pätee vierimisehto $v = \omega r$. Kappaleilla on aluksi vain potentiaalienergiaa ja lopuksi vain liike- ja pyörimisenergiaa.

$$\begin{aligned} E_{pa} &= E_{tl} + E_{rl} \\ mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \quad \| J = kmr^2 \\ \cancel{m}gh &= \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \frac{1}{2}k\cancel{m}r^2\omega^2 \quad \| : m \\ gh &= \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}k(r\omega)^2 \quad \| r\omega = v \\ gh &= \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}kv^2 \\ gh &= \frac{1}{2}(1+k)v^2 \quad \Big\| \cdot \tfrac{2}{1+k} \\ v^2 &= \frac{2gh}{1+k} \quad \Big\| \sqrt{} \\ v &= \sqrt{\frac{2gh}{1+k}} \end{aligned}$$

2 p (3 p)

Pallon nopeus alareunalla saadaan, kun $k = \dfrac{2}{5}$.

$$v_{\text{pallo}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{2}{5}}} = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{5}{5}+\frac{2}{5}}} = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{7}{5}}} = \sqrt{2gh \cdot \frac{5}{7}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{10gh}{7}}}}$$

Kiekon nopeus alareunalla saadaan, kun $k = \dfrac{1}{2}$.

$$v_{\text{kiekko}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{3}{2}}} = \sqrt{2gh \cdot \frac{2}{3}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{4gh}{3}}}}$$

Renkaan nopeus alareunalla saadaan, kun $k = 1$.

$$v_{\text{rengas}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+1}} = \sqrt{\frac{\cancel{2}gh}{\cancel{2}}} = \underline{\underline{\sqrt{gh}}}$$ 1 p (4 p)

Mitä suuremman nopeuden kappale saa, sitä lyhyemmässä ajassa se saavuttaa alareunan. Nyt

$$1 < \frac{4}{3} < \frac{10}{7} \implies \sqrt{gh} < \sqrt{\frac{4gh}{3}} < \sqrt{\frac{10gh}{7}} \implies v_{\text{rengas}} < v_{\text{kiekko}} < v_{\text{pallo}}.$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Pallo saavuttaa alareunan ensimmäisenä ja rengas viimeisenä.}}}$ 2 p (6 p)

7. Sähkölämmitin A on tarkoitettu käytettäväksi Suomessa ja lämmitin B USA:ssa. Suomessa sähköverkon (pienjänniteverkon tehollisjännite on 230 V ja USA:ssa 110 V). Kummankin lämmittimen teho oman maansa sähköverkossa on 2,0 kW. Virtapiirien suojaamiseksi on käytettävissä virrankestoltaan 5 A:n, 10 A:n, 16 A:n, 20 A:n ja 25 A:n sulakkeita.
   a) Kuinka suuria virrankestoltaan täytyy lämmittimien virtapiirejä suojaavien sulakkeiden vähintään olla?
   b) Kuinka suuri olisi lämmittimen A teho USA:n sähköverkkoon kytkettynä ja lämmittimen B teho Suomen verkkoon kytkettynä, kun oletetaan, että lämmittimien sähkövastusten resistansssit noudattavat Ohmin lakia lämpötilasta riippumatta?
   c) Mitä vaaroja voi aiheutua kohdan b kytkennöistä?

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} U_\mathrm{A} &= 230\,\mathrm{V} \\ U_\mathrm{B} &= 110\,\mathrm{V} \\ P &= 2000\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

a) Lasketaan lämmittimien A ja B kuluttamat virrat.

$$P = UI \iff I = \frac{P}{U}$$

Siten

$$\begin{aligned} I_\mathrm{A} &= \frac{P}{U_\mathrm{A}} = \frac{2000\,\mathrm{W}}{230\,\mathrm{V}} = 8{,}6956\ldots\,\mathrm{A} \qquad \text{1 p} \\ I_\mathrm{B} &= \frac{P}{U_\mathrm{B}} = \frac{2000\,\mathrm{W}}{110\,\mathrm{V}} = 18{,}1818\ldots\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

Käytettävissä olevista sulakkeista sopii lämmittimeen A vähintään 10 A:n sulake ja lämmittimeen B vähintään 20 A:n sulake.

1 p (2 p)

b)

$$P = \frac{U^2}{R} \iff R = \frac{U^2}{P}$$

Lämmittimien resistanssit:

$$R_\mathrm{A} = \frac{U_\mathrm{A}^2}{P} \tag{1}$$

$$R_\mathrm{B} = \frac{U_\mathrm{B}^2}{P} \tag{2}$$

Tehot vääriin jännitteisiin kytkettynä:

$$\begin{aligned} P_\mathrm{A} &= \frac{U_\mathrm{B}^2}{R_\mathrm{A}} \quad \text{sij. (1)} \\ &= \frac{U_\mathrm{B}^2}{\frac{U_\mathrm{A}^2}{P}} \\ &= \left(\frac{U_\mathrm{B}}{U_\mathrm{A}}\right)^2 P \\ &= \left(\frac{110\,\mathrm{V}}{230\,\mathrm{V}}\right)^2 \cdot 2000\,\mathrm{W} \\ &= 457{,}46\ldots\,\mathrm{W} \\ &\approx \underline{\underline{460\,\mathrm{W}}} \qquad \text{1 p (3 p)} \end{aligned}$$

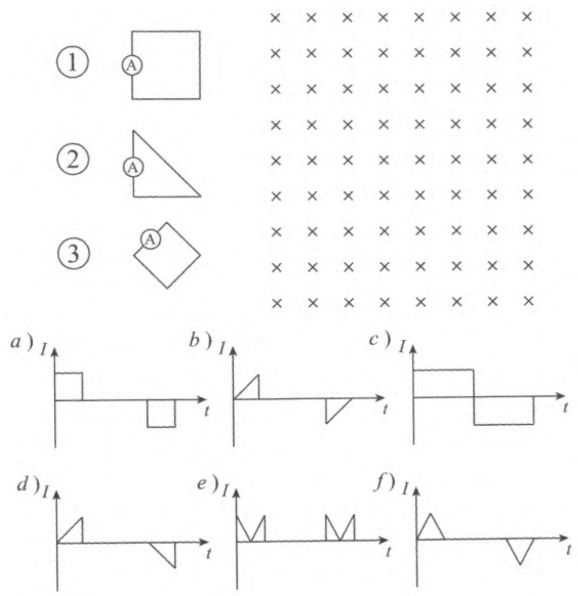
$$\begin{aligned} P_\mathrm{B} &= \frac{U_\mathrm{A}^2}{R_\mathrm{B}} \quad \text{sij. (2)} \\ &= \frac{U_\mathrm{A}^2}{\frac{U_\mathrm{B}^2}{P}} \\ &= \left(\frac{U_\mathrm{A}}{U_\mathrm{B}}\right)^2 P \\ &= \left(\frac{230\,\mathrm{V}}{110\,\mathrm{V}}\right)^2 \cdot 2000\,\mathrm{W} \\ &= 8743{,}80\ldots\,\mathrm{W} \\ &\approx \underline{\underline{8{,}7\,\mathrm{kW}}} \qquad \text{1 p (4 p)} \end{aligned}$$

1 p (5 p)

c) Lämmittimen A kytkeminen USA:n sähköverkkoon ei aiheuta vaaraa, koska teho ja virta ovat suunniteltua pienempiä, mutta lämmittimen B kytkeminen Suomen verkkoon joko polttaa heti sulakkeen tai ilman sulaketta aiheuttaa lämmittimen ylikuumenemis- ja tulipalovaaran, koska teho ja virta ovat suunniteltua suurempia. Lisäksi ylisuuri jännite voi aiheuttaa sähköiskuvaaran, jos laite on heikommin eristetty.

1 p (6 p)

8. Oheisessa kuvassa on kolme virtasilmukkaa. Niihin on kytketty virtamittari. Silmukat vedetään vakionopeudella vasemmalta oikealle homogeenisen magneettikentän läpi. Yhdistä kukin silmukka oikeaan virtakuvaajan. Perustele valintasi.



Ratkaisu. Kun silmukka liikkuu magneettikentässä, siihen indusoituu jännite

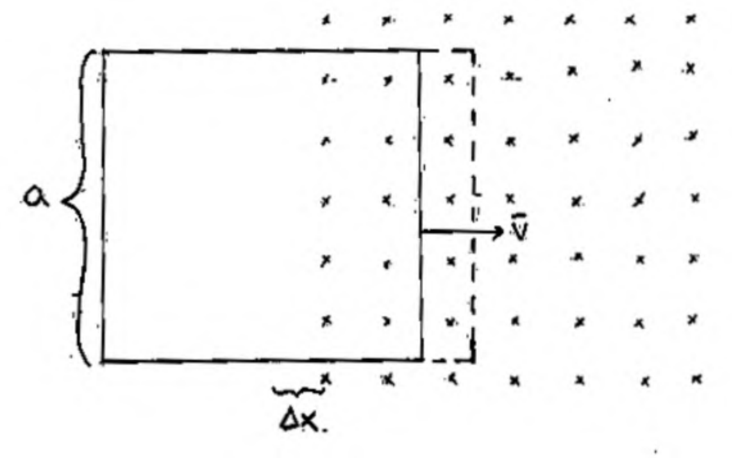
$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

missä Φ on silmukan läpäisevä magneettivuo. Merkitään tarkasteltavan silmukan resistanssia R:llä. Näin ollen silmukkaan indusoituu virta

$$I = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{1}{R}\frac{\Delta(AB)}{\Delta t} = -\frac{B}{R}\frac{\Delta A}{\Delta t}$$

Nyt $-\dfrac{B}{R}$ on vakio, joten virran kuvaajan muoto riippuu vain $\dfrac{\Delta A}{\Delta t}$:sta.

Tarkastellaan tapausta 1. Merkitään silmukan nopeutta v:llä ja sivun pituutta a:lla. Silmukka on menossa kenttään:



$$\begin{aligned}
\Delta A &= a\Delta x \quad \|\Delta x = v\Delta t \\
\Delta A &= av\Delta t \quad \| : \Delta t \\
\frac{\Delta A}{\Delta t} &= av = \text{ vakio} \qquad \text{1 p}
\end{aligned}$$

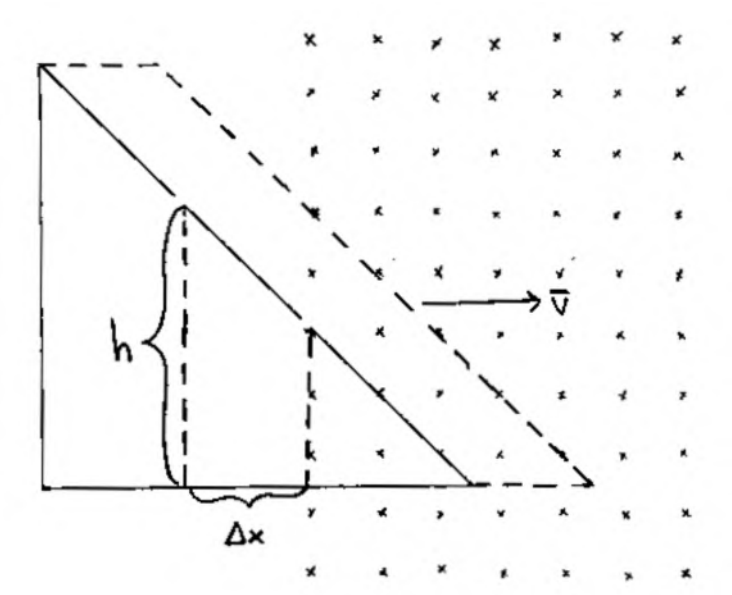
Kun silmukka on kokonaan sisällä kentässä:

$$\Delta A = 0 \iff \frac{\Delta A}{\Delta t} = 0$$

Kun silmukka tulee ulos kentästä, tilanne on symmetrinen sen kanssa, kun silmukka menee kenttään, joten $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ on samanmuotoinen, mutta eri merkkinen.

Täten virta on ensin positiivinen (tai negatiivinen) vakio, välissä nolla ja lopussa negatiivinen (tai positiivinen) vakio. Tapausta 1 vastaa siis kuvaaja a). 1 p (2 p)

Tarkastellaan tapausta 2.



Nyt ΔA on katkoviivalla piirretyn puolisuunnikkaan ala, jonka sivuja ovat Δx ja h. Mitä pidemmälle silmukka on työntynyt kentän sisään, sitä suurempi on mitta h. Näin ollen tiettyä Δt:tä ja siten tiettyä Δx:ää vastaava ΔA on sitä suurempi, mitä pidemmällä kentässä silmukka on. Toisin kuin kohdassa 1, $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ on siis sitä suurempi, mitä pidemmällä kentässä silmukka on. 1 p (3 p)

Samalla tavalla kuin kohdassa 1, kun silmukka on kokonaan kentässä,

$$\Delta A = 0 \iff \frac{\Delta A}{\Delta t} = 0$$

Kun silmukka tulee ulos kentästä, tilanne on symmetrinen sen kanssa, kun silmukka menee kenttään, eli $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ on samanmuotoinen, mutta eri merkkinen. Täten $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ pienenee sitä mukaa, kun silmukka tulee ulos kentästä.

Näin ollen virta kasvaa ensin hetken aikaa, on välissä nolla, ja pienenee sitten, kunnes silmukka on kokonaan ulkona kentästä. Tilannetta vastaa siis kuvaaja d). 1 p (4 p)

Tarkastellaan tilannetta 3. Nyt kun silmukka on menossa sisään kenttään, mutta silmukan keskikohta on vielä kentän ulkopuolella, tilanne on samankaltainen kuin kohdassa 2 - silmukan kenttään sisään menevän osan korkeus kasvaa. Täten $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ kasvaa, kun silmukka menee sisään kenttään.

Kun silmukan keskikohta on mennyt kenttään sisään, sen kenttään sisään menevän osan korkeus pienenee. Täten $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ pienenee, kunnes silmukka on kokonaan kentässä. Kun silmukka tulee ulos kentästä,
1 p (5 p)

$\dfrac{\Delta A}{\Delta t}$ on symmetrian nojalla samanmuotoinen kuin silmukan mennessä sisään kenttään, mutta eri merkkinen.

Täten kohdassa 3 virta ensin kasvaa ja pienenee takaisin nollaan, pysyy välissä nollassa, ja tämän jälkeen pienenee ja kasvaa takaisin nollaan. Täten tilannetta 3 vastaa kuvaaja f).

Vastaus: Tilannetta 1 vastaa kuvaaja a), tilannetta 2 kuvaaja d) ja tilannetta 3 kuvaaja f).

1 p (6 p)

9. Talvivaaran kaivoksen malmi sisältää keskimäärin noin 0,0018 % uraania, josta 99,27 % on isotooppia ^{238}U. Nuklidi ^{238}U on emoydin eräälle radioaktiiviselle hajoamissarjalle, jossa on aktiivisuustasapaino eli sarjan jokaisen ydinlajin aktiivisuus on yhtä suuri kuin lähtöaineen aktiivisuus. Sarjan eräs välinuklidi on radium ^{226}Ra. Uraanin vuosituotannoksi on arvioitu 350 t.
   a) Kuinka suuri on ^{238}U:n aktiivisuus uraanin vuosituotantoa vastaavassa määrässä malmia?
   b) Kuinka paljon radiumia sisältää yksi autokuorma, 168 tonnia, malmia?

Ratkaisu.

$$N_A = 6{,}02213 \cdot 10^{23}\,\frac{1}{\text{mol}}$$
$$M_{238} = 238{,}05 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{kg}}{\text{mol}}$$
$$T_{238} = 4{,}468 \cdot 10^9\,\text{a} = 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 4{,}468 \cdot 10^9\,\text{s}$$

a) Uraanin massa on $m_\text{U} = 350\,\text{t}$.
^{238}U:n massa on $m_{238} = 0{,}9927 \cdot m_\text{U} = 0{,}9927 \cdot 350 \cdot 10^3\,\text{kg}$.
^{238}U:n ainemäärä on

$$n = \frac{m_{238}}{M_{238}}$$

^{238}U:n hiukkasmäärä on

$$N = nN_A$$
$$N = \frac{m_{238}N_A}{M_{238}} \qquad \text{1 p} \qquad (1)$$

Lasketaan aktiivisuus.

$$A = \lambda N \quad \|\,\text{sij. } \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$
$$A = \frac{\ln 2 \cdot N}{T_{1/2}} \quad \|\,\text{sij. (1) ja } T_{1/2} = T_{238}$$
$$A = \frac{\ln 2 \cdot m_{238} \cdot N_A}{T_{238} \cdot M_{238}} \qquad \text{1 p (2 p)} \qquad (2)$$
$$A = \frac{\ln 2 \cdot 0{,}9927 \cdot 350 \cdot 10^3\,\text{kg} \cdot 6{,}02213 \cdot 10^{23}\,\frac{1}{\text{mol}}}{365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 4{,}468 \cdot 10^9\,\text{s} \cdot 238{,}05 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{kg}}{\text{mol}}}$$
$$A = 4{,}32092\ldots \cdot 10^{12}\,\frac{1}{\text{s}}$$
$$\approx 4{,}3 \cdot 10^{12}\,\text{Bq}$$

Vastaus: Aktiivisuus on $4{,}3 \cdot 10^{12}$ Bq. 1 p (3 p)

b)

$$T_{226} = 1600\,\text{a} = 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 1600\,\text{s}$$
$$M_{226} = 226{,}02 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{kg}}{\text{mol}}$$

Lasketaan ^{238}U:n aktiivisuus, kun malmia on $M = 168 \cdot 10^3\,\text{kg}$. Tällöin

$$\begin{aligned} m_{238} &= 1{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}9927 \cdot M \\ &= 1{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}9927 \cdot 168 \cdot 10^3\,\text{kg} \\ &= 3{,}00192\ldots\,\text{kg}. \qquad \text{1 p (4 p)} \end{aligned}$$

Kaavasta (2) saadaan

$$A = \frac{\ln 2 \cdot 3{,}00192\ldots\ \mathrm{kg} \cdot 6{,}02213 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{\mathrm{mol}}}{365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 4{,}468 \cdot 10^{9}\ \mathrm{s} \cdot 238{,}05 \cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}}$$
$$A = 3{,}72622\ldots \cdot 10^{7}\ \mathrm{Bq}$$

^{226}Ra:n aktiivisuus kuormassa on sama kuin ^{238}U:n.

$$A = U_{238} = A_{226}$$ 1 p (5 p)

Lasketaan ^{226}Ra:n massa yhtälöstä (2).

$$A = \frac{\ln 2 \cdot m_{226} \cdot N_A}{T_{226} \cdot M_{226}} \quad \Big\| \cdot \frac{T_{226} \cdot M_{226}}{\ln 2 \cdot N_A}$$
$$m_{226} = \frac{A \cdot T_{226} \cdot M_{226}}{\ln 2 \cdot N_A}$$
$$m_{226} = \frac{3{,}72622\ldots \cdot 10^{7}\ \mathrm{Bq} \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 1600\ \mathrm{s} \cdot 226{,}02 \cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}}{\ln 2 \cdot 6{,}02213 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{\mathrm{mol}}}$$
$$m_{226} = 1{,}01874\ldots \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg}$$
$$\approx 1{,}0\ \mathrm{mg}.$$

Vastaus: Radiumin massa on 1,0 mg.

1 p (6 p)

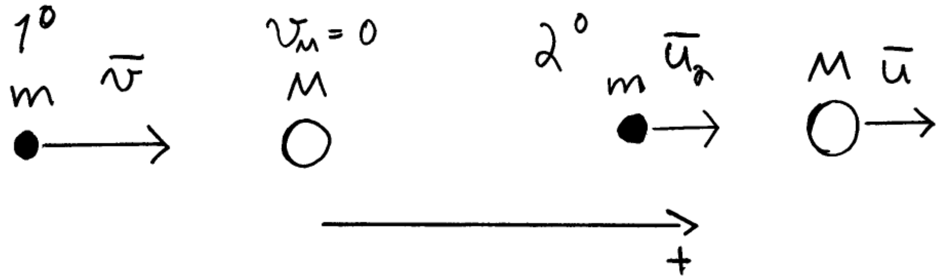
10. James Chadwick sai Nobelin fysiikan palkinnon vuonna 1935 neutronin löytämisestä. Kokeessaan hän pommitti booria alfahiukkasilla. Törmäyksissä syntyneillä hiukkasilla, jotka hän myöhemmin tunnisti neutroneiksi, hän pommitti vety- ja typpiytimiä ja mittasi ydinten saamat nopeudet.

a) Olettaen törmäys kimmoiseksi osoita, että pommitettaessa neutroneilla levossa olevia ytimiä niiden saama suurin mahdollinen nopeus on
$$u = \frac{2mv}{m+M},$$
jossa m on neutronin massa, v neutronin nopeus ja M ytimen massa.

b) Neutronipommituskokeissaan Chadwick havaitsi, että vety-ytimien saama nopeus oli $3{,}3 \cdot 10^7$ m/s ja typpiytimien $4{,}7 \cdot 10^6$ m/s. Laske näiden tulosten perusteella neutronin massa.

Ratkaisu.

a) Neutroni luovuttaa ytimelle eniten energiaa törmäyksessä, jossa ytimen saama nopeus $\bar{u}$ on samansuuntainen törmäävän neutronin nopeuden $\bar{v}$ kanssa.



Kimmoisassa törmäyksessä hiukkasten yhteinen liikemäärä sekä liike-energia säilyvät.
Liikemäärä säilyy:

$$\begin{aligned}
\bar{p}_A &= \bar{p}_L \\
m\bar{v} + M\bar{v}_u &= m\bar{u}_2 + M\bar{u} \quad \| \text{sij. } v_u = 0 \\
mv &= mu_2 + Mu \quad \| : m \\
v &= u_2 + \frac{M}{m}u \\
u_2 &= v - \frac{M}{m}u \qquad \text{1 p} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Liike-energia säilyy:

$$\begin{aligned}
\cancel{\tfrac{1}{2}}mv^2+\cancel{\tfrac{1}{2}}Mv_u^2&=\cancel{\tfrac{1}{2}}mu_2^2+\cancel{\tfrac{1}{2}}Mu^2 \quad \| \text{ sij. } v_u=0\\
mv^2&=mu_2^2+Mu^2 \quad \| \text{ sij. } (1)\\
mv^2&=m\left(v-\frac{M}{m}u\right)^2+Mu^2\\
mv^2&=m\left(v^2-2\frac{M}{m}vu+\frac{M^2}{m^2}u^2\right)+Mu^2\\
\cancel{mv^2}&=\cancel{mv^2}-2Mvu+\frac{M^2}{m}u^2+Mu^2\\
-2Mvu+\left(\frac{M^2}{m}+M\right)u^2&=0\\
u\cdot\left[\left(\frac{M^2}{m}+M\right)u-2Mv\right]&=0\\
\underbrace{u=0}_{\text{ei kelpaa}} \text{ tai } \quad \left(\frac{M^2}{m}+M\right)u-2Mv&=0 \quad \| :M \qquad \text{1 p (2 p)}\\
\left(\frac{M}{m}+{}^{m)}1\right)u-2v&=0\\
\left(\frac{M+m}{m}\right)u&=2v \quad \| \cdot \tfrac{m}{M+m}\\
u&=\frac{2mv}{m+M}. \qquad \text{1 p (3 p)} \qquad (2)
\end{aligned}$$

b)

$$u_{\mathrm{H}}=3{,}3\cdot 10^7\,\mathrm{m/s} \qquad M_{\mathrm{H}}=1{,}00782\ldots\,\mathrm{u}-5{,}485\cdot 10^{-4}\,\mathrm{u}=1{,}00727\ldots\,\mathrm{u}$$

$$u_{\mathrm{N}}=4{,}7\cdot 10^6\,\mathrm{m/s} \qquad M_{\mathrm{N}}=14{,}00307\ldots\,\mathrm{u}-7\cdot 5{,}485\cdot 10^{-4}\,\mathrm{u}=13{,}99923\ldots\,\mathrm{u}$$

Muodostetaan tunnetuista nopeuksista kaksi yhtälöä.

$$\begin{cases}
u_{\mathrm{H}}=\dfrac{2mv}{m+M_{\mathrm{H}}} & \| \cdot (m+M_{\mathrm{H}})\\
u_{\mathrm{N}}=\dfrac{2mv}{m+M_{\mathrm{N}}} & \| \cdot (m+M_{\mathrm{N}})
\end{cases}$$

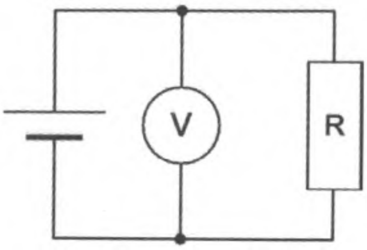
$$\begin{cases}
2mv=u_{\mathrm{H}}(m+M_{\mathrm{H}}) & (3)\\
2mv=u_{\mathrm{N}}(m+M_{\mathrm{N}}) & (4)
\end{cases} \qquad \text{1 p (4 p)}$$

Yhdistetään yhtälöt (3) ja (4)

$$\begin{aligned}
u_\mathrm{H}(m + M_\mathrm{H}) &= u_\mathrm{H}(m + M_\mathrm{N}) \\
mu_\mathrm{H} + M_\mathrm{H}u_\mathrm{H} &= mu_\mathrm{N} + M_\mathrm{N}u_\mathrm{N} \\
mu_\mathrm{H} - mu_\mathrm{N} &= M_\mathrm{N}u_\mathrm{N} - M_\mathrm{H}u_\mathrm{H} \\
m(u_\mathrm{H} - u_\mathrm{N}) &= M_\mathrm{N}u_\mathrm{N} - M_\mathrm{H}u_\mathrm{H} \\
m &= \frac{M_\mathrm{N}u_\mathrm{N} - M_\mathrm{H}u_\mathrm{H}}{u_\mathrm{H} - u_\mathrm{N}} \qquad \text{1 p (5 p)} \\
m &= \frac{13{,}99923\ldots\ \mathrm{u}\cdot 4{,}7\cdot 10^{6}\ \mathrm{m/s} - 1{,}00727\ldots\ \mathrm{u}\cdot 3{,}3\cdot 10^{7}\ \mathrm{m/s}}{3{,}3\cdot 10^{7}\ \mathrm{m/s} - 4{,}7\cdot 10^{6}\ \mathrm{m/s}} \\
m &= 1{,}15040\ldots\ \mathrm{u} \approx 1{,}2\ \mathrm{u} \\
(m &= 1{,}91028\ldots\cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \approx 1{,}9\cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg})
\end{aligned}$$

Vastaus: Mittauksen mukaan neutronin massa oli 1,2 u. ($1{,}9 \cdot 10^{-27}$ kg) 1 p (6 p)

11. Täyteen ladatun NiMH-pienoisakun kuormittamaton napajännite on 1,335 V. Akkua testattiin purkamalla sitä 10,0 ohmin vastuksella kuvan esittämällä tavalla 20 tuntia. Jännitemittarin läpi ei kulje sähkövirtaa. Oletetaan, että akkua purettaessa ainoastaan sen lähdejännite laskee, mutta muut ominaisuudet pysyvät samoina. Taulukossa on jännitemittarin lukemat purkamisen aikana.



aika (h)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
jännite (V)	1,308	1,253	1,241	1,228	1,207	1,179	1,170	1,140	0,206	0,065	0,038

a) Kuinka paljon varausta siirtyy vastuksen läpi kokeen aikana?
b) Kuinka paljon sähköenergiaa muuttuu virtapiirissä lämmöksi kokeen aikana?

Ratkaisu.

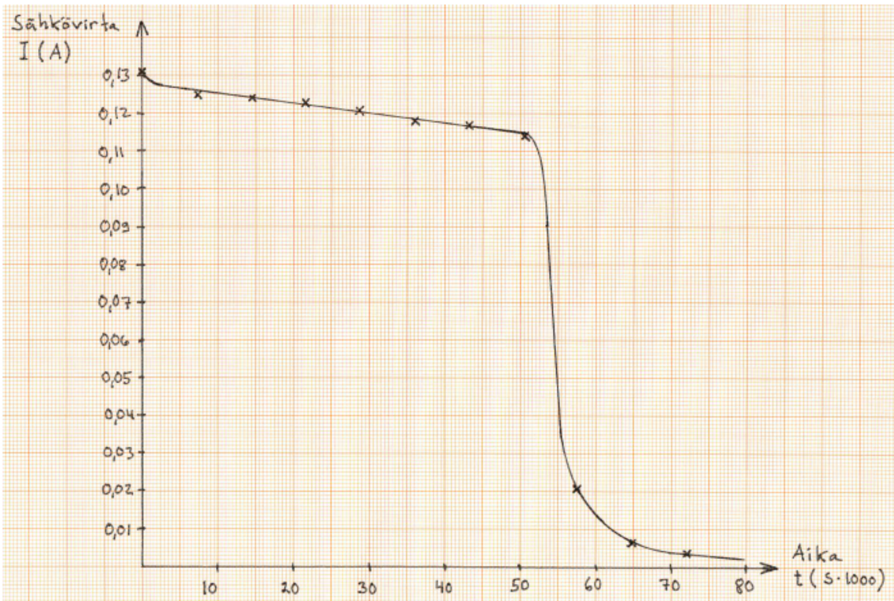
$$E = 1{,}335\,\mathrm{V}, \quad R = 10{,}0\,\Omega$$

a) Muutetaan mittausajat sekunneiksi ja mitattujen jännitteiden avulla lasketaan vastuksen R läpi kulkevat virrat kaavalla

$$I = \frac{U}{R}.$$

aika (s)	0	7 200	14 400	21 600	28 800	36 000	43 200	50 400	57 600	64 800	72 000
virta (A)	0,1308	0,1253	0,1241	0,1228	0,1207	0,1179	0,1170	0,1140	0,0206	0,0065	0,0038

1 p



1 p (2 p)

Nyt

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$
$$\Delta Q = I \cdot \Delta t,$$

joten kokeen aikana vastuksen R läpi siirtynyt varaus Q saadaan graafisella integroinnilla aika-virta-kuvaajan fysikaalisesta pinta-alasta välillä $0 \ldots 20\,\mathrm{h}$ eli $0 \ldots 72\,000\,\mathrm{s}$.

Yhden millimetriruudun pinta-alaa vastaa

$$0{,}001\,\mathrm{A} \cdot 500\,\mathrm{s} = 0{,}05\,\mathrm{C}.$$

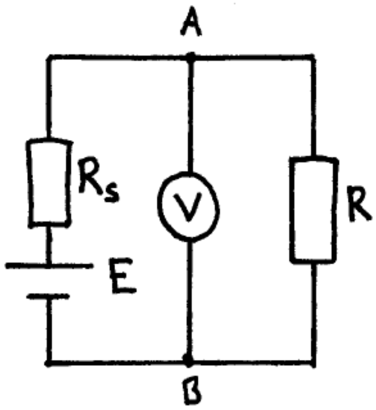
Lasketaan ruudut:

$$\left(10 \cdot 11 + 11 + \frac{24}{2}\right) \cdot 100 + 14 = 13\,314$$

Siten R:n läpi siirtynyt varaus on

$$\begin{aligned} 13\,314 \cdot 0{,}5\,\mathrm{C} &= 6\,657\,\mathrm{C} \\ &\approx \underline{\underline{6\,700\,\mathrm{C}}} \end{aligned}$$ 1 p (3 p)

b) Tarkempi kytkentäkaavio



Koko virtapiirin tehonkulutus on

$$P = EI = (R_S + R)I^2 \tag{1}$$

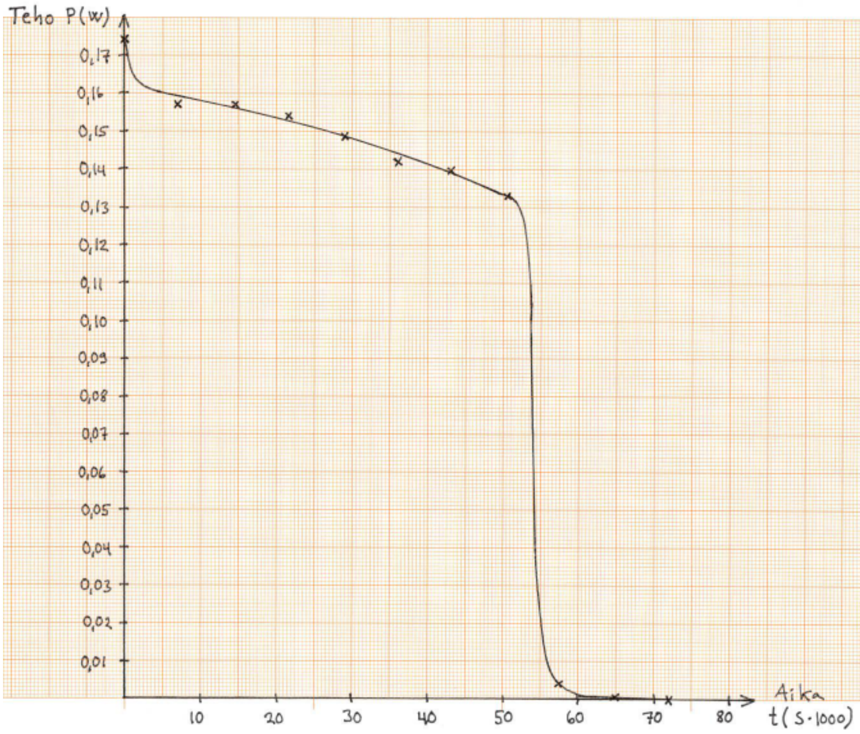
Hetkellä $t = 0$ akku on täyteen ladattu ja virta on a-kohdan perusteella

$$I_0 = 0{,}1308\,\mathrm{A}.$$

$$\begin{aligned} \text{KII:} \quad \sum \Delta V_B &= 0 \\ E - R_S I_0 - R I_0 &= 0 \\ R_S &= \frac{E}{I_0} - R = \frac{1{,}335\,\mathrm{V}}{0{,}1308\,\mathrm{A}} - 10{,}0\,\Omega \\ &= 0{,}20642\ldots\,\Omega \end{aligned}$$ 1 p (4 p)

Lasketaan a-kohdan virtojen avulla tehonkulutukset kaavalla (1) mittausten mukaisesti ja piirretään aika-teho-kuvaaja.

aika (s)	0	7 200	14 400	21 600	28 800	36 000	43 200	50 400	57 600	64 800	72 000
teho (W)	0,1746	0,1572	0,1572	0,1539	0,1487	0,1419	0,1397	0,1326	0,0043	0,0004	0,0001



1 p (5 p)

Sähköenergiaa muuttuu lämmöksi jännitelähteen tekemän työn verran, eli

$$E = W = P \cdot t.$$

Näin ollen kokeen aikana lämmöksi muuttuneen energian määrää vastaa aika-teho-kuvaajan fysikaalinen pinta-ala.
Yhden millimetriruudun pinta-alaa vastaa

$$0{,}001\,\mathrm{W} \cdot 500\,\mathrm{s} = 0{,}5\,\mathrm{J}.$$

Lasketaan ruudut

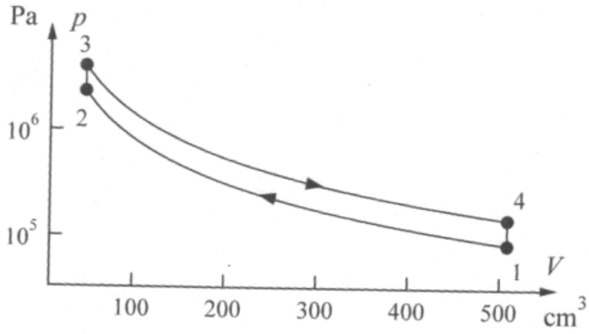
$$\left(13 \cdot 10 + 16 + \frac{27}{2}\right) \cdot 100 = 15\,950$$

Siten energiaa kuluu

$$15\,950 \cdot 0{,}5\,\mathrm{J} = 7\,975\,\mathrm{J} \approx \underline{\underline{8{,}0\,\mathrm{kJ}}}.$$

1 p (6 p)

+12. Nykyaikaisen bensiinimoottorin toimintaa voidaan mallintaa Otto-kiertoprosessin avulla. Oheisessa kuvassa on ideaalikaasun Otto-kiertoprosessin V_p-kuvaaja. Prosessi koostuu kahdesta isokoorisesta ja kahdesta adiabaattisesta prosessista. Adiabaattisessa prosessissa systeemi ei ole lämmönvaihdossa ympäristönsä kanssa.



a) Mitkä prosessit V_p-kuvaajassa ovat isokoorisia ja mitkä ovat adiabaattisia? (2 p.)
b) Missä prosessissa kaasu vastaanottaa lämpöä ympäristöstään ja missä kaasu luovuttaa lämpöä ympäristöönsä? Perustele. (2 p.)
c) Määritä oheisen V_p-kuvaajan esittämän Otto-prosessin hyötysuhde, kun ainemäärä on 0,0174 moolia ideaalikaasua, jonka ominaislämpökapasiteetti vakiotilavuudessa on 20,5 J/(mol · K) ja $p_1 = 8{,}54 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}$, $p_2 = 2{,}32 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa}$, $p_3 = 4{,}01 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa}$, $p_4 = 1{,}47 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$, $V_1 = V_4 = 508\,\mathrm{cm}^3$ ja $V_2 = V_3 = 48{,}1\,\mathrm{cm}^3$. (5 p.)

Ratkaisu.

1 p

a) Prosessi on isokoorinen, kun tilavuus on vakio. Täten prosessit $2 \to 3$ ja $4 \to 1$ ovat isokoorisia ja prosessit $1 \to 2$ ja $3 \to 4$ adiabaattisia. 1 p (2 p)

b) Adiabaattisissa prosesseissa ei tapahdu lämmönvaihtoa ympäristön kanssa. Koska isokoorisissa prosesseissa $\Delta V = 0$, systeemi ei tee työtä. Täten termodynamiikan ensimmäisen pääsäännön mukaan

$$\Delta U = \Delta Q,$$

missä U on systeemin sisäenergia ja ΔQ on systeemin ja ympäristön välillä siirtynyt energia. U kasvaa, kun lämpötila kasvaa. Ideaalikaasun tilanyhtälöstä

$$pV = nRT \quad \| : nR$$
$$T = \frac{pV}{nR} \tag{1}$$

nähdään, että kun isokoorisessa prosessissa paine kasvaa, lämpötila kasvaa. 1 p (3 p)
Täten prosessissa $2 \to 3$ lämpötila kasvaa, eli $\Delta U > 0$, joten systeemi vastaanottaa lämpöä ja prosessissa $4 \to 1$ $\Delta U < 0$, eli systeemi luovuttaa lämpöä. 1 p (4 p)

c)

$$p_1 = 8{,}54 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}$$
$$p_2 = 2{,}32 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa}$$
$$p_3 = 4{,}01 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa}$$
$$p_4 = 1{,}47 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$$
$$V_1 = V_4 = 508\,\mathrm{cm}^3$$
$$V_2 = V_3 = 48{,}1\,\mathrm{cm}^3$$

Kiertoprosessin hyötysuhde on nettotyö jaettuna systeemiin tuodulla lämpöenergialla, eli

$$\eta = \frac{W_{\text{netto}}}{Q_{\text{sisään}}}.$$

1 p (5 p)

Lämpövoimakoneessa

$$\begin{aligned} Q_{\text{sisään}} &= W_{\text{netto}} + Q_{\text{ulos}} \\ W_{\text{netto}} &= Q_{\text{sisään}} - Q_{\text{ulos}} \end{aligned}$$

Eli hyötysuhde on

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{Q_{\text{sisään}} - Q_{\text{ulos}}}{Q_{\text{sisään}}} \\ &= 1 - \frac{Q_{\text{ulos}}}{Q_{\text{sisään}}} \\ &= 1 - \frac{Q_{41}}{Q_{23}} \\ &= 1 - \frac{cn\Delta T_{41}}{cn\Delta T_{23}}. \end{aligned}$$

1 p (6 p)

Tehtävänannossa on annettu kaasun ominaislämpökapasiteetti yksiköissä J/(mol · K), joten kaasun lämpömäärä on $Q = cn\Delta T$.

Ideaalikaasun tilanyhtälöstä saadaan isokoorisille vaiheille

$$\begin{aligned} pV &= nRT \\ \Delta pV &= nR\Delta T \quad \| : (nR) \\ \Delta T &= \frac{V\Delta p}{nR}. \end{aligned}$$

1 p (7 p)

Sijoitetaan tämä edelleen hyötysuhteen lausekkeeseen.

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{\frac{\Delta p_{41} V_{41}}{\cancel{nR}}}{\frac{\Delta p_{23} V_{23}}{\cancel{nR}}} \\ &= 1 - \frac{(p_4 - p_1)V_{14}}{(p_3 - p_2)V_{23}} \\ &= 1 - \frac{(1{,}47 \cdot 10^5\,\text{Pa} - 8{,}54 \cdot 10^4\,\text{Pa}) \cdot 508\,\text{cm}^3}{(4{,}01 \cdot 10^6\,\text{Pa} - 2{,}32 \cdot 10^6\,\text{Pa}) \cdot 48{,}1\,\text{cm}^3} \\ &= 0{,}61504\ldots \\ &\approx 0{,}62. \end{aligned}$$

1 p (8 p)

Vastaus: Otto-prosessin hyötysuhde on 0,62.

1 p (9 p)

+13. Lasipinnasta heijastunutta valoa tutkittiin polarisoimattoman laserin, polarisaattorin ja valokennon avulla. Lasilevystä heijastuneen valon intensiteetti mitattiin kahdessa eri polarisaatiosuunnassa. $I_\parallel$ on suhteellinen intensiteetti, kun polarisaatiosuunta on tulevan säteen ja pinnan normaalin määräämässä tasossa ja $I_\perp$ kun polarisaatiosuunta on tätä tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Suhteelliset intensiteetit on esitetty tulokulman funktiona oheisessa taulukossa.

$a\,(°)$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
$I_\parallel$	0,0489	0,0467	0,0445	0,0400	0,0350	0,0300	0,0222	0,0154	0,0094	0,0046
$I_\perp$	0,0590	0,0650	0,0718	0,0784	0,0853	0,1068	0,1166	0,1352	0,1521	0,1782
$a\,(°)$	56	57	58	59	60	65	70	75	80	85
$I_\parallel$	0,0035	0,0030	0,0020	0,0015	0,0028	0,0095	0,0308	0,0852	0,1831	0,3983
$I_\perp$					0,2134	0,2560	0,3136	0,4789	0,6084	0,7832

a) Miksi intensiteettien $I_\parallel$ ja $I_\perp$ summa ei ole vakio, vaikka laserin teho on vakio? (2 p.)

b) Selitä, mitä tapahtuu heijastuneelle valolle, kun $I_\parallel = 0$. Millaista on tällöin lasilevyn läpäissyt valo? (3 p.)

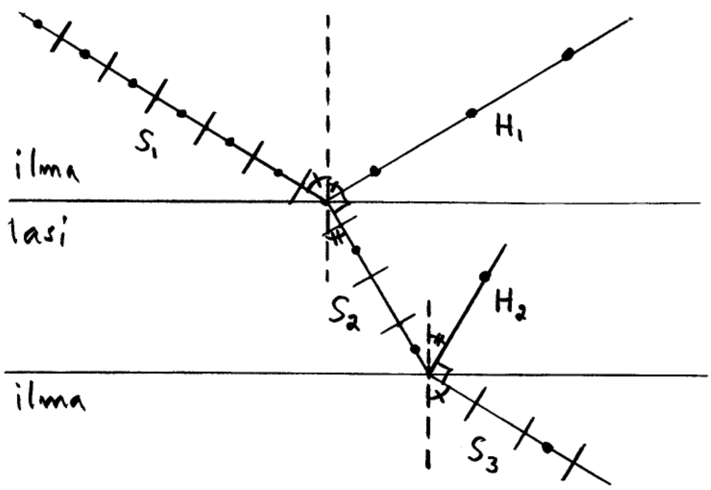
c) Laske lasin taitekerroin. (2 p.)

d) Mikä on polarisoivien aurinkolasien läpäisysuunta? Perustele. (2 p.)

Ratkaisu. 1 p

a) Intensiteettien $I_\parallel$ ja $I_\perp$ summa riippuu heijastuneen valon tehosta. Osa lasin pintaan osuvasta valosta taittuu ja osa heijastuu. Heijastuneen valon osuus riippuu tulokulmasta ja sen vuoksi heijastuneen valon teho muuttuu, vaikka laserin teho pysyy vakiona. 1 p (2 p)

b) Valo on poikittaista aaltoliikettä. Kun $I_\parallel = 0$, värähtelyä ei tapahdu ollenkaan tulevan säteen ja pinnan normaalin määräämässä tasossa, vaan ainoastaan tätä tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Heijastunut valo on tällöin täysin polarisoitunutta. 1 p (3 p)



Yllä olevaan kuvaan on piirretty lasilevylle tuleva valonsäde S_1, heijastunut säde H_1 ja taittunut säde S_2. Taittuneen säteen S_2 osuessa seuraavaan lasin ja ilman rajapintaan, se osittain taittuu ja osittain heijastuu valonsäteiksi S_3 ja H_2.

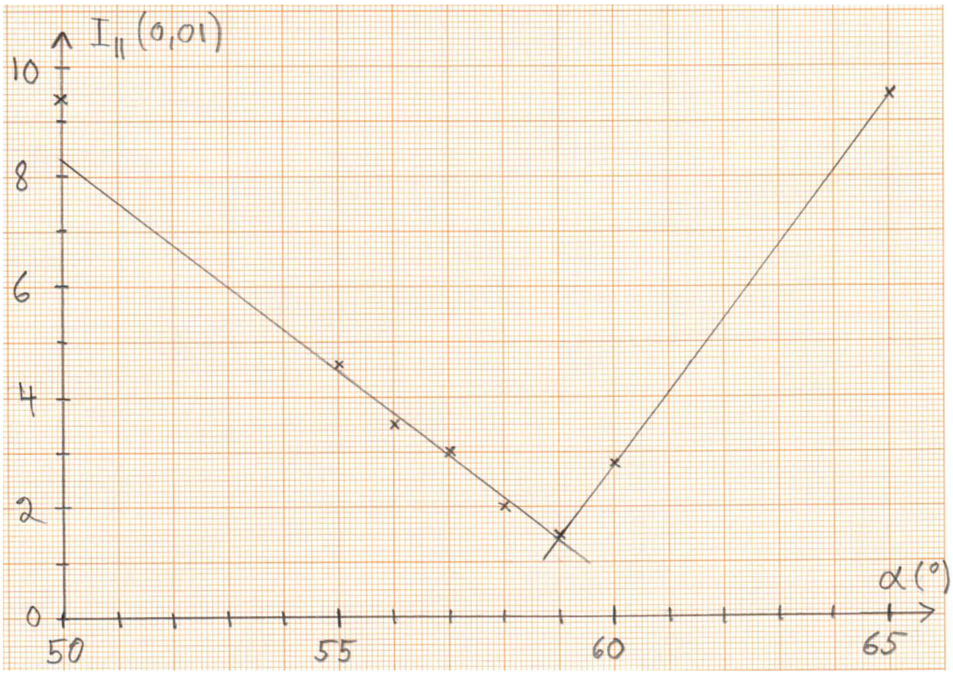
Heijastuskulmat ovat yhtä suuret, joten H_1 ja S_1 muodostavat yhtä suuret kulmat pinnan normaalin kanssa. Kun lasi on tasapaksu ja sen pinnat yhdensuuntaiset, niin tunnetusti säteen S_3 taitekulma on yhtä suuri kuin säteen S_1 tulokulma. Lisäksi, koska lasin pinnat ovat yhdensuuntaiset, S_2 muodostaa yhtä suuret kulmat molempien pintojen normaalien kanssa. Edelleen heijastumislain perusteella säde H_2 muodostaa yhtä suuren kulman normaalin kanssa kuin S_2. Mainitut yhtä suuret kulmat on merkitty kuvaan.

Kuvaan on merkitty suuntaa antavasti valon polarisoituminen. Valonsäteisiin on merkitty poikittaisilla viivoilla värähtely, joka tapahtuu säteen S_1 ja pinnan normaalin muodostamassa tasossa ja pisteillä värähtely, joka tapahtuu tätä tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Kutsutaan pisteellä merkittyjä värähtelijöitä pinnan suuntaisiksi ja viivalla merkittyjä tulotason suuntaisiksi.

Brewsterin lain mukaan säteiden H_1 ja S_2 välinen kulma on suora, koska heijastunut valonsäde on täysin polarisoitunut. Säteiden H_2 ja S_3 välinen kulma on suora kulma, koska kuvan geometrian perusteella se on yhtä suuri kuin säteiden H_1 ja S_2 välinen kulma. Näin ollen myös toisella rajapinnalla tapahtuu täydellinen polarisaatio siten, että H_2 on täysin polarisoitunut. 1 p (4 p)

Valonsäde H_1 on täysin polarisoitunut, mutta tunnetusti osa pinnan suuntaisista värähtelijöistä taittuu, joten S_2 on vain osittain polarisoitunut. Sama ilmiö toistuu seuraavassa rajapinnassa, joten H_2 on täysin polarisoitunut, mutta lasilevyn läpäisevä säde S_3 on vain osittain polarisoitunut siten, että värähtely tapahtuu pääasiassa tulotasossa. 1 p (5 p)

c)



Kuvassa on esitetty suhteellinen intensiteetti $I_{\parallel}$ tulokulman funktiona välillä $50° \ldots 65°$. Mittauspisteisiin voidaan sovittaa taitekohdan molemmin puolin suorat. Vasemmalla puolella kauimmainen mittauspiste ei sovi samalle suoralle muiden tulosten kanssa, mutta lähellä taitepistettä intensiteetti näyttää muuttuvan lineaarisesti. Kuvan perusteella $I_{\parallel}$ on pienimmillään, kun tulokulma on 59°, joten se on hyvä arvio Brewsterin kulmalle. Brewsterin lain mukaan

1 p (6 p)

$$\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}$$
$$n_2 = n_1 \tan \alpha_B$$

Sijoitetaan $\alpha_B = 59°$ ja ilman taitekerroin $n_1 = 1{,}00$, saadaan

$$\begin{aligned} n_2 &= 1{,}00 \cdot \tan 59° \\ &= 1{,}6642\ldots \\ &\approx 1{,}7 \end{aligned}$$

Vastaus: Lasin taitekerroin on 1,7. 1 p (7 p)

d) Heijastunut valo on osittain tai täysin polaroitunutta siten, että värähtely on suurinta kohtisuorassa suunnassa tulevan valonsäteen ja pinnan normaalin muodostamaa tasoa vastaan. Näin ollen vaakasuuntaisilta pinnoilta heijastunut valo värähtelee pääasiassa pystytasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Pystytasoa vastaan kohtisuora värähtely ei läpäise polarisaattoria, kun sen läpäisysuunta on pystytasossa. Polaroivien aurinkolasien läpäisysuunta on tehty pystysuuntaiseksi, koska siten lasien läpi pääsee mahdollisimman vähän sellaista valoa, joka on heijastunut vaakasuuntaisilta pinnoilta. Heijastunut valo on usein häiritsevää ja siksi sen määrää halutaan vähentää. Heijastukset syntyvät yleensä vaakasuuntaisista pinnoista, kuten märkä tie tai järven pinta. 1 p (8 p) 1 p (9 p)